

**FOR PUBLIC RELEASE**

**REVISED**

12:17 pm, Jun 05, 2005

Jesús Humberto Molina Melara

5 22 007

*Introducción a los  
Principios de Mecánica*

*A mis padres*

Jesús Humberto Molina Melara

# *Introducción a los Principios de Mecánica*

**WALTER HAUSER**

*Universidad Northeastern*

TRADUCCIÓN AL ESPAÑOL POR EL  
**ING. CARLOS ORDÓÑEZ**

*Ingeniero Industrial  
Profesor de la E.S.I.M.E. del Instituto  
Politécnico Nacional (México)*

REVISIÓN DE LA TRADUCCIÓN POR EL

**ING. SANTIAGO ALONSO**

*Ex Profesor de la Escuela de Ingenieros  
de Bilbao (España)*

PRIMERA EDICIÓN EN ESPAÑOL

Jesús Humberto Molina Melara

Jesús Humberto Molina Melara



**UNION TIPOGRAFICA EDITORIAL HISPANO AMERICANA**  
Barcelona, Bogotá, Buenos Aires, Caracas, Guatemala, La Habana, Lima, Montevideo, Panamá,  
Quito, Río de Janeiro, San José de Costa Rica, San Salvador, Santiago, Teacucigalpa.  
**MEXICO**

## INTRODUCCION A LOS PRINCIPIOS DE MECANICA

*Esta obra es la traducción al español, debidamente autorizada, de la publicada originalmente en inglés por Addison-Wesley Publishing Company, Inc., de Reading, Massachusetts, EE. UU., con el título de*

## INTRODUCTION TO THE PRINCIPLES OF MECHANICS

Second Printing-April 1966

DERECHOS RESERVADOS, © 1969, POR «UTEHA»  
(UNIÓN TIPOGRÁFICA EDITORIAL HISPANO-AMERICANA)  
Avenida de la Universidad, 767, México 12, D. F.  
Queda hecho el registro y el depósito que determinan  
las respectivas leyes en todos los países de lengua  
española.

IMPRESO EN MEXICO  
PRINTED IN MEXICO

Jesús Humberto Molina Melara

Impreso en Unión Gráfica, S. A., de México, D. F., Av. División del Norte, 1521.

Jesús Humberto Molina Melara

## Prólogo

Este es un texto para un curso intermedio de mecánica para los cursos tercero y cuarto de los colegios universitarios. Contiene también suficiente material para que sea adecuado para el primer semestre de un curso de preparación para graduados de física teórica. El texto se ha escrito para estudiantes que han seguido un curso preparatorio de mecánica con algún libro como el de Resnick y Halliday o el de Sears y Zemansky, y un curso de cálculo diferencial e integral. Además, se supone que se estudiará un curso de ecuaciones diferenciales junto con este curso intermedio de mecánica.

La mecánica clásica ha sido, desde hace mucho, un curso básico en la preparación del estudiante de física e ingeniería. En gran parte, esto se ha debido a la aplicación general de la mecánica clásica a gran número de fenómenos conocidos. La mecánica nos proporciona así ejemplos llenos de sentido y fácilmente comprensibles con que estimular el interés del alumno por la física. También le ofrece numerosos problemas que le permitirán familiarizarse con las operaciones matemáticas que necesitará conocer para el dominio eficiente de otros campos de la física. La mecánica ha sido desde hace mucho tiempo, y deberá seguir siéndolo, una base de capacitación matemática para el físico en ciernes.

La tremenda velocidad con que están creciendo los distintos campos de la física ha obligado a una revisión de los planes de estudio de esta ciencia para subgraduados y a una elevación general del nivel de los cursos que se ofrecen. Esta modificación del programa educativo del estudiante de física e ingeniería justifica la adición de nuevos libros a una ya larga lista de excelentes textos aun en temas tradicionales y aparentemente cerrados como los de la mecánica clásica.

Hemos sentido desde hace tiempo la necesidad de un texto intermedio de mecánica que satisfaga la que siente el estudiante actual de física, a quien no se le permite el lujo de un lento dominio de la materia. Más que nunca antes, el alumno actual debe adquirir al principio de su carrera el hábito de dominar gran caudal de matemáticas y física por su propia iniciativa. Por tanto, es extraordinariamente importante que los textos

intermedios de física muestren la unidad de esta ciencia y traten de impartir una profunda comprensión de los principios básicos de la misma.

En la redacción de este texto, nuestro principal interés ha sido el alumno. Hemos tenido especial cuidado en justificar la razón de la introducción de nuevos conceptos y de métodos matemáticos para hacerlos más asequibles. En muchas ocasiones no titubeamos en presentar un enfoque elemental (no complicado) si sentimos que tal exposición añadirá algo a la comprensión del problema. Se introducen lentamente conceptos nuevos e importantes, con gran anticipación a que se tenga que hacer pleno uso de ellos. Tampoco titubeamos en incluir los detalles de las deducciones para que el libro fuera más ameno. Esto no quiere decir que el texto sea sencillo. Entre sus páginas hemos intercalado gran número de temas complejos y avanzados que no se encuentran comúnmente en textos intermedios de mecánica, pero que consideramos indispensables para el estudiante actual. Desafortunadamente, el espacio no nos permitió incluir todos los temas avanzados que hubiésemos deseado. Por ejemplo, originalmente pensamos dedicar un capítulo a los principios variacionales. Quizá tengamos la oportunidad de rectificar esta y otras omisiones en futuras ediciones de este libro. Esperamos que el estudiante consciente no quede satisfecho con el solo dominio de lo ofrecido en la clase o con una sola lectura del texto. También confiamos en que dedicará el tiempo necesario a consultar otros textos de mecánica en su afán de adquirir una mejor comprensión de la materia. Es también de singular importancia que se dedique a resolver los problemas para consolidar esta comprensión.

La mecánica es una materia antigua y bien desarrollada. La diferencia entre nuestra presentación y otras actuales reside únicamente en el orden y el modo de ofrecer su contenido. Juzgamos que hemos sido suficientemente diferentes en este respecto para justificar la publicación de esta obra. Para mencionar sólo algunas de las innovaciones que hemos presentado, en el Capítulo 1 introducimos el concepto de la independencia lineal de vectores y la representación de un vector tridimensional como la suma lineal de tres vectores base linealmente independientes. Esto, a su vez, nos conduce a una exposición de los vectores base recíprocos y, con bastante naturalidad, a una definición geométrica de las componentes covariantes y contravariantes de un vector. En este punto, hicimos un convenio transaccional en la notación. Habiendo encontrado que la notación usual del superíndice para las componentes contravariantes de un vector confunde al estudiante medio, consentimos, con cierto sentimiento, en representarlas con un asterisco (\*) como superíndice. Todo aquel que desee emplear la notación del superíndice no encontrará dificultad alguna en sustituir nuestro  $A^*$  para las componentes contravariantes del vector  $\mathbf{A}$  por la  $A^i$  corriente.

Creemos que la introducción de este tema es *de lo más importante*, porque, a su vez, permite una temprana introducción de las coordenadas generalizadas y una deducción geométrica muy satisfactoria y fácilmente comprensible de las ecuaciones del movimiento, de Lagrange. En nuestra opinión ésta es una innovación singularmente importante, que fue realmente nuestro estímulo original para escribir este libro.

También damos a conocer al lector el concepto de la representación matricial de un vector y la notación a base de delta y paréntesis, de Dirac, para hacer una distinción entre el vector representado por una matriz columna y el representado por una matriz fila. Hasta el Capítulo 10 sólo se emplean ocasionalmente las matrices, las ecuaciones matriciales y sus ecuaciones equivalentes con operadores. En el Capítulo 10 presentamos una exposición del álgebra de vectores  $n$ -dimensionales y de los elementos básicos de la teoría de transformación lineal necesaria para el manejo eficiente de la teoría de las oscilaciones acopladas (Capítulo 11) y la teoría de la relatividad especial o restringida (Capítulo 13).

Otra innovación es la introducción del método de la función de Green para resolver ecuaciones diferenciales. En el Capítulo 4 extendemos el estudio corriente del oscilador armónico simple expresando la solución general para el oscilador armónico forzado en función de una integral que contiene una función de Green. También ofrecemos una breve introducción a las oscilaciones no lineales, obteniendo soluciones cada vez más aproximadas al problema del oscilador anarmónico utilizando la función de Green, y por la introducción iterativa en ella de más términos cada vez de la serie de Fourier.

El libro contiene más material del que puede darse eficientemente en un curso de dos semestres. Esto permite cierta flexibilidad en la elección de los temas. No hacemos ningunas sugerencias específicas respecto a un curso más o menos largo. Hemos basado un curso de mecánica de 72 horas sobre el contenido de los nueve primeros capítulos, variando los temas para adaptarlos a la capacidad y los conocimientos matemáticos del alumno. Con estudiantes débiles en matemáticas, que tienden a cansarse con el desarrollo del lenguaje matemático presentado en los tres primeros capítulos, omitiríamos el Capítulo 3 hasta el momento en que su contenido fuera necesario. Además, sólo daríamos a dicho grupo de estudiantes débiles un mínimo del contenido avanzado que hemos intercalado de vez en cuando en beneficio del más capaz y formal. A los mejores estudiantes de una clase débil les alentamos para que se esforzaran por dominar a fondo los temas que no se dieran en clase. Al escribir este libro hemos tenido muy en cuenta este problema, y lo planeamos para que gran parte del mismo fuera estudiada en esta forma por el alumno más capaz y entusiasta.

Estoy reconocido a varias personas por su ayuda y su estímulo. En primer lugar, agradezco a mis padres su amor, su inspiración y su sacrificio durante los años de mi formación y los siguientes. Este libro es tanto de ellos como mío. Me gustaría también expresar mi agradecimiento a mi querida esposa, Betty, por su ayuda, su paciencia y su aliento durante la elaboración de esta obra. Su escritura a máquina y su corrección de la redacción contribuyeron inmensamente a su satisfactoria terminación. Estoy en deuda con mis ex maestros del Brooklyn College, especialmente los doctores Bernhard Kurrelmeyer y Walter H. Mais, por sus clases teóricas inspiradoras y claras que hicieron de la física una materia deliciosa para mí, y al doctor Herman Feshbach por mantenerme en este ánimo durante mi estancia en el Instituto de Tecnología de Massachusetts.

Debo también gratitud a mis compañeros por las muchas discusiones y sugerencias útiles. Específicamente, doy las gracias a los doctores Marvin H. Friedman y Michael Glaubman, con quienes traté muchas de las innovaciones que he introducido. Me fueron muy útiles y alentadores. Mi agradecimiento se extiende también al señor Peter Gianino, quien leyó todo el manuscrito, corrigiendo numerosos errores y sugiriendo muchas mejoras, y al doctor Robert G. Arns, cuyas críticas entusiastas, comprensibles y útiles las consideré muy adecuadas. También he de agradecer a mis alumnos que fueran pacientes conmigo durante la elaboración de este texto. Finalmente, debo reconocer la útil cooperación que recibí de mis editores. Su cuerpo de redactores fue muy acogedor y sentí placer de trabajar con ellos, y a ellos debo la idea de escribir este libro, tarea en la que disfruté inmensamente.

W.H.

*Boston, Massachusetts*  
*Marzo de 1965*

## Indice

### Capítulo 1. VECTORES

1-1	Representación geométrica de un vector . . . . .	2
1-2	Suma y resta de vectores . . . . .	3
1-3	Representación algebraica de un vector . . . . .	4
1-4	Multiplicación vectorial . . . . .	7
1-5	Sistemas de coordenadas no ortogonales . . . . .	10
1-6	Representación matricial de los vectores . . . . .	19
1-7	Derivada de un vector con respecto a un escalar . . . . .	21
1-8	Rotación de un vector . . . . .	23
1-9	Representación de vectores planos por medio de números complejos . . . . .	28

### Capítulo 2. CINEMATICA DE LA PARTICULA

2-1	Velocidad y aceleración . . . . .	37
2-2	Velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas . . . . .	39
2-3	Velocidad y aceleración en coordenadas esféricas . . . . .	43
2-4	Vectores base para coordenadas generalizadas . . . . .	46
2-5	Velocidad y aceleración en coordenadas generalizadas . . . . .	50
2-6	Geometría diferencial de las coordenadas curvilíneas . . . . .	54
2-7	Movimiento sobre una curva determinada . . . . .	58

### Capítulo 3. SISTEMAS DE COORDENADAS EN MOVIMIENTO

3-1	Movimiento de traslación . . . . .	65
3-2	Movimiento de rotación . . . . .	70
3-3	Movimiento de traslación y rotación . . . . .	77
3-4	Transformación de coordenadas . . . . .	78
3-5	Representación matricial de transformaciones de coordenadas ortogonales . . . . .	82

### Capítulo 4. DINAMICA DE LAS PARTICULAS: MOVIMIENTO UNDIMENSIONAL

4-1	Primera ley del movimiento de Newton . . . . .	94
4-2	Segunda ley del movimiento de Newton: conceptos de masa y fuerza . . . . .	96
4-3	Tercera ley de Newton sobre el movimiento . . . . .	98

4-4	Problemas unidimensionales . . . . .	99
4-5	Fuerza en función únicamente del tiempo . . . . .	100
4-6	Fuerza en función de la posición: conceptos de trabajo y energía . . . . .	103
4-7	Fuerza que es función sólo de la posición: movimiento limitado e ilimitado . . . . .	108
4-8	Equilibrio estable e inestable . . . . .	110
4-9	Movimiento a un lado y otro de un punto de equilibrio estable: el oscilador armónico simple . . . . .	111
4-10	Movimiento bajo la acción de una fuerza dependiente de la velocidad . . . . .	114
4-11	Oscilador armónico con amortiguamiento . . . . .	118
4-12	Oscilador armónico forzado: resonancia . . . . .	125
4-13	Movimiento a lo largo de una curva determinada . . . . .	144
4-14	Oscilador anarmónico . . . . .	147
4-15	Oscilador anarmónico forzado . . . . .	151

### Capítulo 5. ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE LAGRANGE

5-1	Fuerzas generalizadas . . . . .	157
5-2	Cantidades de movimiento generalizadas de una partícula . . . . .	160
5-3	Ecuaciones de movimiento generalizadas . . . . .	162
5-4	Movimiento restringido: restricciones holonómicas . . . . .	167

### Capítulo 6. MOVIMIENTO CONSERVATIVO

6-1	Fuerzas conservativas . . . . .	182
6-2	Energía potencial: conservación de la energía . . . . .	184
6-3	Condiciones necesarias y suficientes para que una fuerza sea conservadora . . . . .	187
6-4	Ecuaciones de Lagrange para fuerzas conservadoras: el lagrangiano . . . . .	189
6-5	Ejemplos de fuerzas conservativas: fuerzas centrales, eléctricas y magnética . . . . .	190
6-6	Movimiento en un campo eléctrico uniforme . . . . .	193
6-7	Movimiento en un campo magnético uniforme . . . . .	193
6-8	Movimiento en un campo eléctrico uniforme y magnético uniforme . . . . .	196
6-9	El oscilador isotrópico en un campo magnético . . . . .	199
6-10	Teorema de Larmor . . . . .	203
6-11	Continuación del teorema de Larmor . . . . .	204
6-12	Resonancia magnética . . . . .	209
6-13	Funciones de energía potencial dependientes de la velocidad: cantidades de movimiento generalizadas . . . . .	211
6-14	Conservación de la energía: función hamiltoniana . . . . .	213
6-15	Ecuaciones de movimiento de Hamilton . . . . .	216
6-16	Mecánica y óptica geométricas . . . . .	219
6-17	Óptica geométrica, mecánica y mecánica ondulatoria . . . . .	222

### Capítulo 7. MOVIMIENTO EN UN CAMPO DE FUERZAS CENTRALES

7-1	Características generales del movimiento: solución formal . . . . .	231
7-2	Características generales de las órbitas . . . . .	236
7-3	Estabilidad de las órbitas circulares . . . . .	241
7-4	Ley de Newton para órbitas giratorias . . . . .	244
7-5	Movimiento en un campo de fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia . . . . .	246
7-6	Movimiento limitado: tercera ley de Kepler del movimiento planetario . . . . .	250
7-7	El teorema virial . . . . .	251
7-8	Movimiento ilimitado: dispersión . . . . .	253

### Capítulo 8. DINAMICA DE UN SISTEMA DE PARTICULAS

8-1	El sistema de dos partículas: centro de masa y masa reducida . . . . .	261
8-2	Energía cinética: conservación de la energía . . . . .	264
8-3	Colisión entre dos partículas . . . . .	267
8-4	Movimiento por cohete . . . . .	270
8-5	Cantidad de movimiento angular . . . . .	273
8-6	Dispersión: relaciones entre los ángulos de dispersión en los sistemas de coordenadas del centro de masa y del laboratorio (o sea de un observador) . . . . .	276
8-7	Dinámica de un sistema de $N$ partículas: teoremas de conservación . . . . .	279
8-8	Ecuaciones de Lagrange para un sistema de dos partículas . . . . .	285
8-9	Las ecuaciones de Lagrange y los teoremas de conservación . . . . .	293
8-10	Ecuaciones de Lagrange para movimiento restringido de un sistema . . . . .	297
8-11	Aplicaciones de las ecuaciones de Lagrange . . . . .	299

### Capítulo 9. MOVIMIENTO DE UN CUERPO RIGIDO

9-1	Coordenadas generalizadas para el movimiento de cuerpos rígidos: ángulos de Euler . . . . .	314
9-2	Velocidad angular de un cuerpo rígido . . . . .	319
9-3	Relación entre la cantidad de movimiento angular y la velocidad angular de un cuerpo rígido: momentos y productos de inercia . . . . .	320
9-4	Energía cinética rotacional de un cuerpo rígido . . . . .	329
9-5	Teorema de los ejes paralelos . . . . .	329
9-6	Ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido . . . . .	332
9-7	Movimiento de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo de rotación . . . . .	334
9-8	Movimiento plano de un cuerpo rígido: eje instantáneo de rotación . . . . .	338
9-9	Movimiento plano de un cuerpo rígido: movimiento de rodadura . . . . .	340
9-10	Conservación de la energía en la rodadura . . . . .	343
9-11	Movimiento plano de un cuerpo rígido: rodadura y deslizamiento . . . . .	345

9-12	Equilibrio estático de cuerpos rígidos . . . . .	346
9-13	Equilibrio de un sistema de partículas: principio del trabajo virtual . . . . .	348
9-14	Choque de dos cuerpos rígidos . . . . .	352
9-15	Movimiento de un cuerpo rígido exento de momento rotacional . . . . .	355
9-16	Movimiento de un trompo simétrico bajo la acción de la gravedad . . . . .	361

#### Capítulo 10. ELEMENTOS DE LA TEORIA DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

10-1	Repaso de la representación matricial de los vectores tridimensionales . . . . .	372
10-2	Algebra matricial . . . . .	375
10-3	Producto directo; operadores . . . . .	382
10-4	Espacios vectoriales lineales . . . . .	388
10-5	Vectores base de un espacio vectorial $n$ -dimensional . . . . .	392
10-6	Transformaciones lineales . . . . .	393
10-7	Transformación de coordenadas . . . . .	398
10-8	Espacio vectorial complejo . . . . .	405
10-9	Valores propios y vectores propios de un operador: diagonalización de operadores normales . . . . .	411
10-10	Diagonalización simultánea de operadores normales de conmutación . . . . .	420

#### Capítulo 11. TEORIA DE LAS OSCILACIONES PEQUEÑAS

11-1	Condiciones para la estabilidad de una configuración de equilibrio de un sistema conservativo de partículas . . . . .	430
11-2	Ecuaciones de movimiento para desplazamientos pequeños a partir de la posición de equilibrio: movimiento no amortiguado . . . . .	433
11-3	Coordenadas normales . . . . .	436
11-4	Movimiento amortiguado . . . . .	441
11-5	Oscilaciones forzadas: fuerza excitadora sinusoidal . . . . .	449
11-6	Oscilación forzada: fuerzas de impulso, función tensorial de Green . . . . .	453
11-7	Teoría de las perturbaciones . . . . .	456

#### Capítulo 12. PROPAGACION DE ONDAS A LO LARGO DE UNA CUERDA

12-1	Representación matemática de ondas planas, el principio de superposición, ecuaciones de onda . . . . .	463
12-2	Ecuación de onda de la cuerda vibrante . . . . .	466
12-3	Ondas armónicas . . . . .	468
12-4	Flujo de energía en una onda armónica . . . . .	470
12-5	Polarización . . . . .	471
12-6	Reflexión y transmisión de ondas armónicas . . . . .	477
12-7	Cuerda vibrante con los extremos fijos . . . . .	484
12-8	Movimiento general de una cuerda vibrante . . . . .	486
12-9	Vibración forzada de una cuerda: resonancia, función de Green . . . . .	490
12-10	Fuerza impulsora: función de Green . . . . .	495

#### Capítulo 13. TEORIA ESPECIAL O RESTRINGIDA DE LA RELATIVIDAD

13-1	La transformación de Lorentz . . . . .	503
13-2	Dilatación del tiempo y contracción Lorentz-Fitzgerald . . . . .	513
13-3	Transformación de velocidades . . . . .	516
13-4	Velocidad y aceleración en cuatro dimensiones . . . . .	518
13-5	Dinámica relativista, ecuaciones de movimiento relativistas, masa relativista, cantidad de movimiento lineal . . . . .	521
13-6	Fuerza tetradimensional, energía cinética relativista, cantidad de movimiento tetradimensional . . . . .	523
13-7	Propiedades de transformación del campo electromagnético . . . . .	527
13-8	Movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme . . . . .	531
13-9	Movimiento en un campo magnético uniforme . . . . .	533
13-10	Movimiento bajo la acción de campos eléctrico y magnético paralelos . . . . .	534
13-11	Coordenadas generalizadas, ecuación de movimiento de Lagrange . . . . .	535
13-12	Formulación lagrangiana covariante . . . . .	538
13-13	Movimiento de una partícula cargada en un campo de Coulomb . . . . .	541
13-14	Cantidad de movimiento angular . . . . .	544
13-15	Colisión de partículas: reacciones, energía de umbral . . . . .	545

REFERENCIAS RECOMENDADAS . . . . .	553
RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMEROS IMPARES . . . . .	555
INDICE ALFABÉTICO . . . . .	571

*Introducción a los  
Principios de Mecánica*

Jesús Humberto Molina Melara

Jesús Humberto Molina Melara



Jesús Humberto Molina Melara

1

## Vectores

La Física es una ciencia que estudia cantidades físicas observables (medibles cuantitativamente) y las relaciones que pueden existir entre sus valores determinados experimentalmente. Algunas cantidades físicas requieren únicamente de la determinación de un solo número para su completa especificación. Temperatura, volumen, tiempo, longitud de recorrido, velocidad de la luz, frecuencia de una onda de sonido y carga eléctrica, son ejemplos de tales cantidades físicas, que son denominadas *escalares*. Por otra parte, hay cantidades físicas que requieren de dos o más números para su completa especificación. Para especificar un desplazamiento rectilíneo, por ejemplo, no es suficiente medir únicamente la magnitud del desplazamiento, sino que, para especificarlo en el espacio tridimensional, nos hacen falta dos cantidades más, con las que podremos determinar la dirección y sentido en que tiene lugar el desplazamiento. Cualquier cantidad física que, como el desplazamiento rectilíneo, requiera de una magnitud, una dirección y un sentido para su especificación, y que, además, pueda ser añadida a otra cantidad física similar, del mismo modo que son añadidos dos desplazamientos consecutivos para formar una sola cantidad física, también con una magnitud, una dirección y un sentido (ver sección 1-2), recibe el nombre de cantidad vectorial tridimensional o simplemente vector tridimensional. En este capítulo familiarizaremos al lector con el lenguaje matemático y la manipulación matemática fundamental de los vectores tridimensionales. En uno de los últimos capítulos (Capítulo 10) generalizaremos nuestros resultados para vectores de  $n$  dimensiones, que son cantidades que requieren de  $n$  números para su especificación.

Usaremos las letras negritas para señalar los vectores y distinguirlos de los escalares, que estarán indicados por letras cursivas. Así, **A** representa un vector, mientras que su magnitud, siendo un número puro o escalar, será representada por *A*. A veces, también utilizaremos  $|A|$  para representar la magnitud *A* del vector **A**.

## 1-1 Representación geométrica de un vector

Gráficamente podemos representar la dirección, sentido y magnitud de un vector por un segmento de recta dirigido, o sea, con una flecha trazada paralelamente al vector y apuntando en el sentido de éste. La longitud de la flecha será dibujada a escala, de manera que esta longitud pueda representar la magnitud del vector. En la figura 1-1, por ejemplo, representamos gráficamente un vector **A**, paralelo al plano  $xy$  y que forma un ángulo  $\phi$  con una recta paralela al eje  $x$ . Si el vector **A** tiene una magnitud de cinco unidades, entonces, la longitud de la flecha que lo representa se dibujaría igual a cinco veces la longitud escogida para representar al vector de magnitud unidad.

De la representación de la magnitud de un vector por la longitud de una flecha deducimos que la multiplicación de un vector **A** por un escalar  $c$  (positivo) da como producto un vector paralelo a **A**, que tiene una magnitud igual a  $c$  veces la magnitud de **A**,

$$|c\mathbf{A}| = cA. \quad (1-1)$$

De esto, resulta que podríamos expresar cualquier vector como el producto de un escalar por un vector de magnitud uno, llamado *vector*

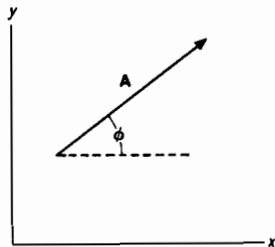


FIG. 1-1. Representación gráfica de un vector.

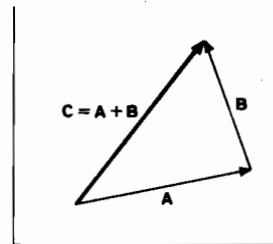


FIG. 1-2. Representación gráfica de la suma de vectores.

*unidad*. Está claro que si  $\mathbf{e}_A$  es el vector unidad en la dirección y sentido de **A**, el vector  $A\mathbf{e}_A$  es un vector en la dirección y sentido de **A** que tiene una magnitud  $A$ .

Se dice que dos vectores **A** y **B** son iguales si ambos tienen las mismas magnitud y dirección y el mismo sentido. Por lo tanto, podemos escribir:

$$\mathbf{A} = A\mathbf{e}_A. \quad (1-2)$$

El *vector nulo* **O** se define como un vector de magnitud igual a cero y, por lo tanto, no tiene dirección ni sentido.

## 1-2 Suma y resta de vectores

La suma de dos vectores **A** y **B** está representada gráficamente en la figura 1-2. Para sumar gráficamente dos vectores **A** y **B**, dibujamos la flecha que representa al vector **A**, y desde su punta trazaremos la flecha que representa al vector **B**. El vector **C**, que es la suma de los dos vectores, está entonces representado por la flecha dibujada desde la cola de la flecha de **A**, hasta la punta de la de **B**. Esta regla para la suma de vectores se llama *ley de adición del paralelogramo*.

En la figura 1-3 podemos ver que la suma de vectores es conmutativa:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

Es también asociativa (ver fig. 1-4):

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}.$$

Si la suma de dos vectores **A** y **B** es igual a un vector de magnitud cero,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{O}, \quad (1-3)$$

entonces, los dos vectores **A** y **B**, obviamente, deben tener iguales magnitud y dirección y sentidos opuestos. Así, la ecuación (1-3) queda

$$\mathbf{B} = -\mathbf{A}, \quad (1-4)$$

que nos dice que  $-\mathbf{A}$  es un vector que tiene la misma magnitud (y dirección) del vector **A**, pero apunta en un sentido opuesto al de éste.

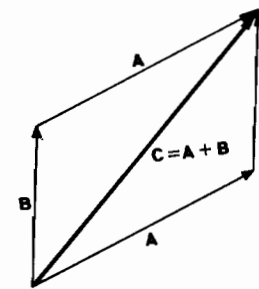


FIG. 1-3. Naturaleza conmutativa de la suma vectorial:  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ .

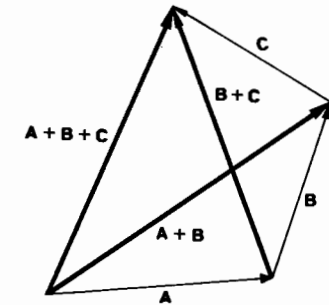


FIG. 1-4. Naturaleza asociativa de la suma vectorial:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ .

Esto nos permite definir la resta del vector **B** al vector **A**, como la suma del vector **A** y el vector  $(-\mathbf{B})$ ,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}). \quad (1-5)$$

### 1-3 Representación algebraica de un vector

Cualquier vector  $\mathbf{A}$ , como demostraremos, puede ser representado algebraicamente, especificando sus proyecciones sobre un sistema de ejes coordenados o de vectores base. Los tres vectores base de un sistema de coordenadas tridimensional deben ser independientes linealmente; por tanto, deben satisfacer el requisito de no ser coplanares. La elección más simple, aunque no queremos decir que sea la única, para tal sistema de vectores base no coplanares, es un sistema de vectores unidad perpendiculares entre sí.

En un sistema de coordenadas cartesianas se escogerán como los tres vectores base los vectores unidad tomados y dirigidos respectivamente a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  positivos. Los vectores unidad sobre los ejes coordenados  $x$ ,  $y$  y  $z$  positivos se designarán, respectivamente, por los símbolos  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  (fig. 1-5). A veces, también encontraremos notacionalmente conveniente designarlos por los símbolos  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$ .

La proyección de un vector  $\mathbf{A}$  sobre otro  $\mathbf{B}$  está representada gráficamente por la longitud del segmento rectilíneo comprendido entre la intersección de una recta paralela a  $\mathbf{B}$  con las perpendiculares a la dirección de  $\mathbf{B}$  desde la cola y la punta de la flecha que representa a  $\mathbf{A}$  (fig. 1-6).

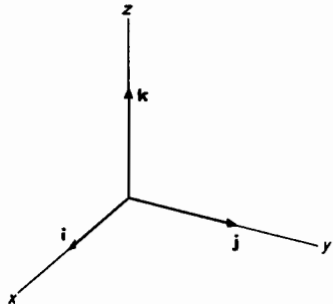


FIG. 1-5. Vectores base unidad cartesianos.

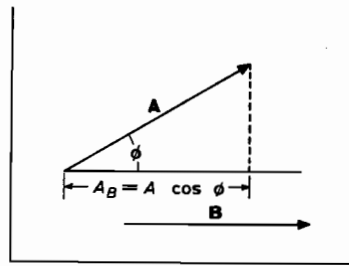


FIG. 1-6. Proyección del vector  $\mathbf{A}$  sobre el vector  $\mathbf{B}$ .

Si la proyección sobre  $\mathbf{B}$  de la punta de la flecha que representa a  $\mathbf{A}$ , se halla en el sentido de  $\mathbf{B}$  con respecto a la proyección de la cola de dicha flecha sobre  $\mathbf{B}$ , entonces, la proyección será considerada positiva. Si está dirigida en sentido opuesto, será considerada negativa. En relación con el más pequeño de los dos ángulos, el ángulo  $\phi$ , que forma la flecha que representa al vector  $\mathbf{A}$  con una flecha trazada en la dirección y sentido de  $\mathbf{B}$ , a partir del pie de la flecha de  $\mathbf{A}$ , la proyección de  $\mathbf{A}$  sobre  $\mathbf{B}$ ,

también llamada componente  $\mathbf{B}$  de  $\mathbf{A}$  y designada por  $A_B$ , está dada por la fórmula

$$A_B = A \cos \phi. \quad (1-6)$$

El ángulo  $\phi$  será mencionado como el ángulo entre los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ .

De acuerdo con la regla por la que indicamos que una proyección es positiva o negativa, encontramos que  $A_B$  es positiva para

$$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$$

y negativa para

$$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi.$$

De la ley de la suma se desprende que el vector  $\mathbf{A}$  se puede expresar por la suma de tres vectores  $A_x \mathbf{i}$ ,  $A_y \mathbf{j}$  y  $A_z \mathbf{k}$ . Esto es,

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}, \quad (1-7)$$

donde  $A_x$ ,  $A_y$  y  $A_z$  son las componentes de  $\mathbf{A}$  sobre los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  positivos. Por ejemplo, considérese un vector  $\mathbf{A}$  que esté en el plano  $xy$  ( $A_z = 0$ ). En este caso, siempre podremos imaginar al vector  $\mathbf{A}$  situado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos sean paralelos a los ejes  $x$  y  $y$  positivos. De la figura 1-7 resulta evidente que

$$A_x = A \cos \phi, \quad (1-8)$$

$$A_y = A \sin \phi, \quad (1-9)$$

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2, \quad (1-10)$$

y que la relación

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} \quad (1-11)$$

es correcta.

La extensión a vectores tridimensionales se muestra en la figura 1-8. En relación con el ángulo  $\theta$  que forma el vector  $\mathbf{A}$  con el eje  $z$  positivo y el ángulo  $\phi$  que forma la proyección de  $\mathbf{A}$  sobre el plano  $xy$  con el eje  $x$  positivo, resulta que

$$A_z = A \cos \theta, \quad (1-12)$$

$$A_x = A \sin \theta \cos \phi, \quad (1-13)$$

$$A_y = A \sin \theta \sin \phi, \quad (1-14)$$

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2, \quad (1-15)$$

y que, realmente,

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}.$$

De la definición de igualdad de dos vectores resultará evidente que la de sus componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  es una condición necesaria y suficiente para que sean iguales. También será claro que las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de la suma

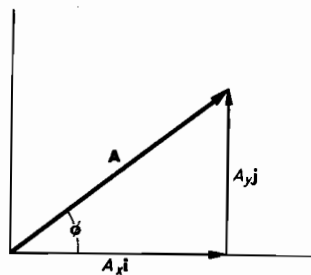


FIG. 1-7. Prueba gráfica de  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}$  para un vector paralelo al plano  $xy$ .

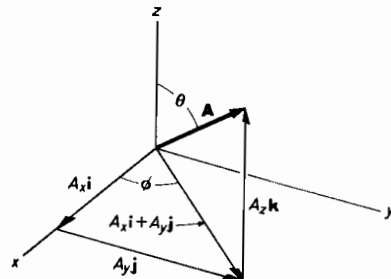


FIG. 1-8. Prueba gráfica de  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ .

de dos o más vectores son iguales a las sumas de las respectivas componentes de los vectores. Esto es, si el vector  $\mathbf{C}$  es la suma de los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad (1-16)$$

entonces

$$C_x = A_x + B_x, \quad C_y = A_y + B_y \quad \text{y} \quad C_z = A_z + B_z, \quad (1-17)$$

de donde podemos obtener

$$C^2 = C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 = A^2 + B^2 + 2(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \quad (1-18)$$

$$= A^2 + B^2 + 2AB \cos \phi.$$

La última expresión es la ley de los cosenos. Observaremos que el signo *más* frente al último término del segundo miembro de la ecuación (1-18) se

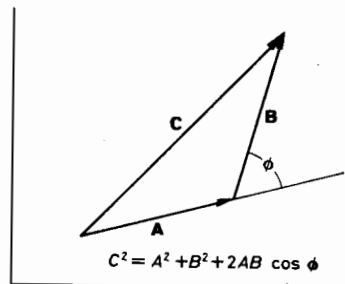


FIG. 1-9. Ley de los cosenos.

debe a que el ángulo entre los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  es el exterior del triángulo formado por estos vectores (fig. 1-9).

La elección de la orientación del sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  es, por supuesto, arbitraria. Por lo tanto, dos vectores iguales tienen componentes iguales en cualquier dirección, y la componente en cualquier dirección de la suma de dos o más vectores es igual a la suma de las componentes de estos vectores en dicha dirección,

$$C_D = A_D + B_D. \quad (1-19)$$

#### 1-4 Multiplicación vectorial

Dados los dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , existen dos productos de estos vectores para los que encontraremos uso inmediato. El primer producto es el llamado *producto escalar*, ya que nos da una cantidad escalar. Hemos hallado ya este producto en la ecuación (1-18). Se designa por  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , y está definido por la ecuación

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \phi, \quad (1-20)$$

donde  $\phi$  es el ángulo que forman los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ . Como hemos visto, esta expresión aparece en la ley de los cosenos, de la que obtenemos la relación (fig. 1-9)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \frac{C^2 - A^2 - B^2}{2} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (1-21)$$

De su definición, el producto escalar es, obviamente, conmutativo

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Como la proyección de la suma de los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  sobre un vector  $\mathbf{C}$  es igual a la suma de la proyección de  $\mathbf{A}$  sobre  $\mathbf{C}$  más la de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{C}$ , se encuentra que el producto escalar satisface la ley distributiva:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}.$$

El otro producto que necesitaremos es el producto vectorial de los dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , indicado por  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ . En la próxima sección encontraremos este producto en la forma

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}, \quad (1-22)$$

que utilizaremos como su definición.

Sólo hace falta una simple manipulación algebraica para demostrar que

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 = A^2 B^2 \sin^2 \phi,$$

o sea, que la magnitud del producto vectorial de los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  es

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \phi, \quad (1-23)$$

donde  $\phi$  es el ángulo que forman los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ .

El producto escalar de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  por uno cualquiera de los dos,  $\mathbf{A}$  o  $\mathbf{B}$ , es cero (problema 1-1). Por lo tanto, el producto vectorial  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  forma un ángulo de  $90^\circ$  con cualquiera de los vectores  $\mathbf{A}$  o  $\mathbf{B}$  y es, por consiguiente, perpendicular al plano de dichos vectores, así como a cualquier plano paralelo a éste. Para una determinación más completa del producto vectorial necesitamos una especificación más precisa del sentido de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  a lo largo de la perpendicular al plano de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , pues hay dos sentidos en la dirección de ésta. Para hallar cuál de estos dos es, hagamos que coincida el plano de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  con el  $xy$  y con el eje  $x$  positivo situado sobre el vector  $\mathbf{A}$  y en su mismo sentido. Con esta elección de los ejes coordenados, el producto vectorial está dado por

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = A_y B_x \mathbf{k}.$$

Así, para  $B_y$  positiva el producto vectorial de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  está sobre el sentido positivo de  $\mathbf{k}$ , mientras que para una  $B_y$  negativa está sobre el sentido negativo de  $\mathbf{k}$ . En este texto nos limitaremos a usar sistemas de coordenadas cartesianas de sentido a la derecha, para las cuales podemos establecer:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \phi \mathbf{n}, \quad (1-24)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unidad perpendicular al plano de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , en el sentido del avance de un tornillo de rosca a la derecha que es girado alrededor de un eje perpendicular al plano de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , en el sentido que llevaría  $\mathbf{A}$  sobre  $\mathbf{B}$  al girarlo el más pequeño de los dos ángulos que forman los dos vectores (fig. 1-10).

De la ecuación (1-22) se deduce que el producto vectorial no es conmutativo, sino que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}. \quad (1-25)$$

Sin embargo, la ley distributiva es válida

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}. \quad (1-26)$$

Esto se demuestra fácilmente usando el determinante que nos sirvió para definir el producto vectorial (ec. 1-22).

El producto escalar del vector  $\mathbf{A}$  por el producto vectorial de los vectores  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  se llama *triple producto escalar*. En relación con las componentes cartesianas de estos vectores, el triple producto escalar está dado por

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (1-27)$$

Intercambiando las filas del determinante, encontramos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \\ &= -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (1-28)$$

A causa de la equivalencia de los productos  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ ,  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$  y  $(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$ , es usual omitir el paréntesis en el triple producto escalar.

Geoméricamente, si las magnitudes de tres vectores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  tienen las dimensiones de longitud, su triple producto escalar representa el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores (fig. 1-11). El volu-

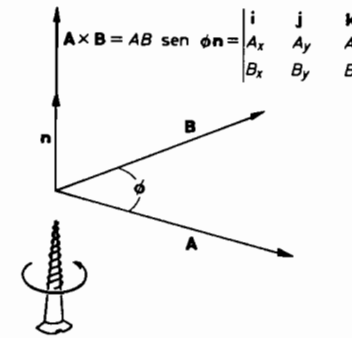


FIG. 1-10. Definición de producto vectorial en un sistema de coordenadas a la derecha.

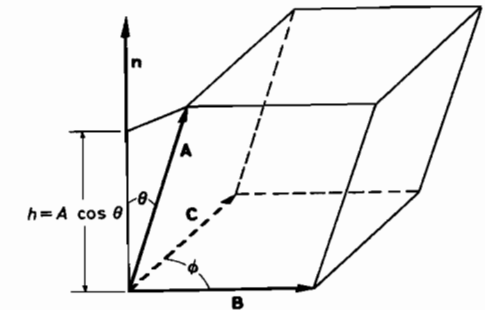


FIG. 1-11. Volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ :  $V = (A \cos \theta)(BC \sin \phi) = |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}|$

men de un paralelepípedo es igual al producto del área de su base por su altura. Para el paralelepípedo de los vectores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ , el área de la base, que es la del paralelogramo formado por los vectores  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  está dada por la fórmula:

$$\text{Area} = BC \sin \phi = |\mathbf{B} \times \mathbf{C}|. \quad (1-29)$$

La altura  $h$  puede ser expresada por

$$h = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = A \cos \theta,$$

donde  $\mathbf{n}$  es un vector unidad perpendicular a la base. Por tanto, tenemos para el volumen del paralelepípedo:

$$\text{Volumen} = |\mathbf{B} \times \mathbf{C}| A \cos \theta = |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}|. \quad (1-30)$$

Hay otro producto triple de uso frecuente, el triple producto vectorial  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ . Se deja como ejercicio para el lector (problema 1-5) demostrar que

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}. \quad (1-31)$$

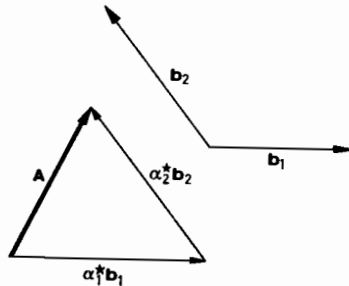


FIG. 1-12. Descomposición de un vector en la suma de dos vectores componentes coplanarios con el primero.

### 1-5 Sistemas de coordenadas no ortogonales

Es claro que no es necesario, y no siempre es la elección más conveniente, representar un vector en relación con sus componentes sobre tres vectores unidad perpendiculares entre sí. Por lo tanto, haremos una digresión para tratar sobre la representación de un vector  $\mathbf{A}$  en función de una suma lineal de tres vectores no coplanarios,  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  y  $\mathbf{b}_3$  (fig. 1-12).

Si establecemos

$$\mathbf{A} = \alpha_1^* \mathbf{b}_1 + \alpha_2^* \mathbf{b}_2 + \alpha_3^* \mathbf{b}_3, \quad (1-32)$$

donde las  $\alpha_i^*$  son constantes, entonces, por la ecuación (1-17):

$$\begin{aligned} A_x &= \alpha_1^* b_{1x} + \alpha_2^* b_{2x} + \alpha_3^* b_{3x}, \\ A_y &= \alpha_1^* b_{1y} + \alpha_2^* b_{2y} + \alpha_3^* b_{3y}, \\ A_z &= \alpha_1^* b_{1z} + \alpha_2^* b_{2z} + \alpha_3^* b_{3z}. \end{aligned} \quad (1-33)$$

Las tres ecuaciones (1-33) son lineales simultáneas en las que podemos determinar las tres constantes  $\alpha_1^*$ ,  $\alpha_2^*$  y  $\alpha_3^*$ . Las soluciones se expresan por medio de una notación a base de determinantes. Así, tenemos

$$\alpha_1^* = \frac{\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ b_{2x} & b_{2y} & b_{2z} \\ b_{3x} & b_{3y} & b_{3z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{1x} & b_{1y} & b_{1z} \\ b_{2x} & b_{2y} & b_{2z} \\ b_{3x} & b_{3y} & b_{3z} \end{vmatrix}} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}. \quad (1-34)$$

El último paso se deduce de la ecuación (1-27). De la misma manera obtenemos

$$\alpha_2^* = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3} \quad \text{y} \quad \alpha_3^* = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}. \quad (1-35)$$

Vemos, por supuesto, que las ecuaciones (1-34) y (1-35) tienen soluciones únicas sólo si el triple producto escalar de los tres vectores base no es nulo

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3 \neq 0.$$

Esta condición está satisfecha si los tres vectores base son no coplanarios.

Las ecuaciones (1-34) y (1-35) pueden ser expresadas más concisamente en función de los vectores  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  y  $\mathbf{b}_3$ , definidos por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) \div (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3), \\ \mathbf{b}_2 &= (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1) \div (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3), \\ \mathbf{b}_3 &= (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) \div (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3), \end{aligned} \quad (1-36)$$

y que satisfacen las relaciones

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3 = 1 \quad (1-37)$$

y

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_2 = 0.$$

Los productos escalares de los vectores  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$ ,  $\mathbf{b}_3$  y los vectores  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$ ,  $\mathbf{b}_3$  se expresan concisamente por la ecuación

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1-38)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la *delta de Kronecker*, que tiene un valor igual a cero cuando  $i \neq j$  e igual a la unidad cuando  $i = j$ , o sea,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases} \quad (1-39)$$

En función de los vectores  $\mathbf{b}_i$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_1^* &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_1, \\ \alpha_2^* &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_2, \\ \alpha_3^* &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_3. \end{aligned} \quad (1-40)$$

Los tres vectores  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  y  $\mathbf{b}_3$  se denominan vectores *inversos* o *recíprocos* de los tres vectores  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  y  $\mathbf{b}_3$ , y el sistema de coordenadas formado por los  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  y  $\mathbf{b}_3$  se llama el sistema recíproco del de coordenadas formado por los  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  y  $\mathbf{b}_3$  (fig. 1-13). Observaremos que un conjunto de vectores unidad mutuamente ortogonales es su propio conjunto recíproco.

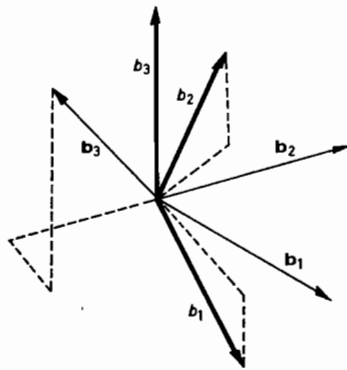


FIG. 1-13. Conjuntos recíprocos de vectores base:

$$b_1 \perp b_2^*, b_3^*; b_2 \perp b_3^*, b_1^*; b_3 \perp b_1^*, b_2^*;$$

$$b_1^* \perp b_2, b_3; b_2^* \perp b_3, b_1; b_3^* \perp b_1, b_2.$$

Utilizando la definición de los vectores base inversos y la ecuación (1-31), obtenemos la importante relación

$$\begin{aligned} b_1 \cdot b_2 \times b_3 &= \frac{(b_2 \times b_3) \cdot [(b_3 \times b_1) \times (b_1 \times b_2)]}{(b_1 \cdot b_2 \times b_3)^3} \\ &= \frac{(b_2 \times b_3) \cdot [(b_3 \times b_1 \cdot b_2) b_1]}{(b_1 \cdot b_2 \times b_3)^3} \quad (1-41) \\ &= \frac{1}{b_1 \cdot b_2 \times b_3} \end{aligned}$$

Aquellos que estén familiarizados con la multiplicación de determinantes podrían haber obtenido este mismo resultado por medio del producto del determinante

$$b_1 \cdot b_2 \times b_3 = \begin{vmatrix} b_{1x} & b_{1y} & b_{1z} \\ b_{2x} & b_{2y} & b_{2z} \\ b_{3x} & b_{3y} & b_{3z} \end{vmatrix}$$

y el determinante

$$b_1 \cdot b_2 \times b_3 = \begin{vmatrix} b_{1x}^* & b_{1y}^* & b_{1z}^* \\ b_{2x}^* & b_{2y}^* & b_{2z}^* \\ b_{3x}^* & b_{3y}^* & b_{3z}^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{1x}^* & b_{2x}^* & b_{3x}^* \\ b_{1y}^* & b_{2y}^* & b_{3y}^* \\ b_{1z}^* & b_{2z}^* & b_{3z}^* \end{vmatrix}.$$

Esto es,

$$\begin{vmatrix} b_{1x} & b_{1y} & b_{1z} \\ b_{2x} & b_{2y} & b_{2z} \\ b_{3x} & b_{3y} & b_{3z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1x}^* & b_{2x}^* & b_{3x}^* \\ b_{1y}^* & b_{2y}^* & b_{3y}^* \\ b_{1z}^* & b_{2z}^* & b_{3z}^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \cdot b_1 & b_1 \cdot b_2 & b_1 \cdot b_3 \\ b_2 \cdot b_1 & b_2 \cdot b_2 & b_2 \cdot b_3 \\ b_3 \cdot b_1 & b_3 \cdot b_2 & b_3 \cdot b_3 \end{vmatrix} = 1$$

► Como ejemplo, consideremos el vector

$$A = 5i - 3j + 8k,$$

que deseamos expresar como una suma lineal de los vectores

$$b_1 = 3i - 4j,$$

$$b_2 = 3j + 4k,$$

$$b_3 = -i + j + 2k.$$

Primero, verificamos que los tres vectores  $b_i$  son no coplanares evaluando su triple producto escalar

$$b_1 \cdot b_2 \times b_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 22.$$

Puesto que el triple producto escalar no es nulo, encontramos una solución única para las  $\alpha_i^*$ . Esta es

$$\alpha_i^* = A \cdot b_i.$$

Con la ecuación (1-36) hallamos que los vectores recíprocos  $b_i$  serán los vectores

$$b_1 = \frac{1}{22} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{22} [2i - 4j + 3k],$$

$$b_2 = \frac{1}{22} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{22} [8i + 6j + k],$$

$$b_3 = \frac{1}{22} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{22} [-16i - 12j + 9k],$$

y, por la ecuación (1-40), se tiene

$$\alpha_1^* = A \cdot b_1 = \frac{5 \times 2 + (-3) \times (-4) + 8 \times 3}{22} = \frac{23}{11},$$

$$\alpha_2^* = A \cdot b_2 = \frac{5 \times 8 + (-3) \times (6) + 8 \times 1}{22} = \frac{15}{11},$$

$$\alpha_3^* = A \cdot b_3 = \frac{5 \times (-16) + (-3) \times (-12) + 8 \times 9}{22} = \frac{14}{11}.$$

Por tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \alpha_1^* \mathbf{b}_1 + \alpha_2^* \mathbf{b}_2 + \alpha_3^* \mathbf{b}_3 \\ &= \frac{23}{11} \mathbf{b}_1 + \frac{15}{11} \mathbf{b}_2 + \frac{14}{11} \mathbf{b}_3. \end{aligned}$$

Comprobando, encontramos que esto nos vuelve a dar

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{23}{11} (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) + \frac{15}{11} (3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + \frac{14}{11} (-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \\ &= 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Por supuesto, podríamos haber empezado también nuestra exposición con los vectores base recíprocos  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  y  $\mathbf{b}_3$ , y escribir

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \alpha_3 \mathbf{b}_3. \quad (1-42)$$

Esto nos llevaría análogamente a la definición del conjunto de los vectores recíprocos de los  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  y  $\mathbf{b}_3$ . Hallamos que éstos son los vectores (problema 1-20):

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}, \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}, \\ \mathbf{b}_3 &= \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}. \end{aligned} \quad (1-43)$$

De la misma manera que para la determinación de las  $\alpha_i^*$ , deducimos que

$$\alpha_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_1, \quad \alpha_2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_2, \quad \alpha_3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_3. \quad (1-44)$$

► Por tanto, en el ejemplo anterior podemos también establecer

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \alpha_3 \mathbf{b}_3,$$

y obtener

$$\alpha_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_1 = 27, \quad \alpha_2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_2 = 23, \quad \alpha_3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_3 = 8.$$

Es decir,

$$\mathbf{A} = \frac{27}{22} (2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + \frac{23}{22} (8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \frac{8}{22} (-16\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 9\mathbf{k}). \quad \blacktriangleleft$$

Así, hemos llegado al importantísimo teorema de que un vector tridimensional está completamente determinado si se conocen sus productos escalares por tres vectores no coplanares.

Es interesante y extremadamente útil, como veremos, ser capaces de calcular los productos escalar y vectorial de dos vectores que estén expresados en función de sus productos escalares por tres vectores no coplanares.

Encontramos que el producto escalar de dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  toma su forma más simple si expresamos uno de los vectores en función de un conjunto de vectores base no coplanares y el otro vector en función del conjunto recíproco de vectores base. Por tanto, si ponemos

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \alpha_3 \mathbf{b}_3 \quad (1-45)$$

y

$$\mathbf{B} = \beta_1^* \mathbf{b}_1 + \beta_2^* \mathbf{b}_2 + \beta_3^* \mathbf{b}_3,$$

obtenemos, mediante la ecuación (1-37)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \alpha_1 \beta_1^* + \alpha_2 \beta_2^* + \alpha_3 \beta_3^*, \quad (1-46)$$

o, similarmente

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \beta_1 \alpha_1^* + \beta_2 \alpha_2^* + \beta_3 \alpha_3^*. \quad (1-47)$$

► Así, por ejemplo, consideremos el producto escalar del vector

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

por el vector  $\mathbf{A}$  del ejemplo anterior. Hallamos que el vector  $\mathbf{B}$  se puede expresar en la forma

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{b}_1 - 13\mathbf{b}_2 - 9\mathbf{b}_3,$$

donde los  $\mathbf{b}_i$  son los vectores recíprocos del ejemplo anterior. De ahí que, por la ecuación (1-47), el producto escalar de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  será

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \frac{23}{11} \times 2 + \frac{15}{11} (-13) + \frac{14}{11} (-9) = -25.$$

Este resultado coincide con el del producto escalar que encontramos usando las componentes cartesianas de los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 5 \times 2 + (-3) \times (1) + 8 \times (-4) = -25. \quad \blacktriangleleft$$

El producto vectorial de dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  toma su forma más simple cuando los dos vectores son expresados en función del mismo conjunto de vectores base. Por tanto, si escribimos

$$\mathbf{A} = \alpha_1^* \mathbf{b}_1 + \alpha_2^* \mathbf{b}_2 + \alpha_3^* \mathbf{b}_3$$

y

$$\mathbf{B} = \beta_1^* \mathbf{b}_1 + \beta_2^* \mathbf{b}_2 + \beta_3^* \mathbf{b}_3,$$

encontramos que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \\ \alpha_1^* & \alpha_2^* & \alpha_3^* \\ \beta_1^* & \beta_2^* & \beta_3^* \end{vmatrix}. \quad (1-48)$$



Igualmente, se halla que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (b_1 \cdot b_2 \times b_3) \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}. \quad (1-48a)$$

► Usando una vez más los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  del ejemplo anterior,

$$\mathbf{A} = 27b_1 + 23b_2 + 8b_3$$

y

$$\mathbf{B} = 2b_1 - 13b_2 - 9b_3,$$

encontramos, por la ecuación (1-48a), que el producto vectorial

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (b_1 \cdot b_2 \times b_3) \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 27 & 23 & 8 \\ 2 & -13 & -9 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{22} (-103b_1 + 259b_2 - 397b_3) \\ &= 4i + 36j + 11k. \end{aligned}$$

Este resultado coincide con el del producto vectorial hallado utilizando las componentes cartesianas de los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 8 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 4i + 36j + 11k. \leftarrow$$

Es evidente que a veces necesitaremos alguna notación con la cual se pueda reconocer cuándo está expresado un vector en función de sus vectores base  $b_i$ , o cuándo, en función de sus vectores recíprocos  $b_i^*$ . Para distinguir las dos maneras de representar al vector  $\mathbf{A}$ , admitiremos, siempre que sea necesario, que  $\mathbf{A}$  representa al vector  $\mathbf{A}$  expresado en función de un sistema de vectores base y  $\mathbf{A}^*$  al mismo vector  $\mathbf{A}$  expresado en función de los vectores base recíprocos, cualquiera que haya sido la manera en que hayamos elegido la correspondencia. La elección de los vectores base coordenados para la representación de  $\mathbf{A}$  determinará la representación de  $\mathbf{A}^*$ . Por tanto, si

$$\mathbf{A}^* = \alpha_1^* b_1 + \alpha_2^* b_2 + \alpha_3^* b_3, \quad (1-49)$$

entonces,

$$\mathbf{A} = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3.$$

Con esta notación el producto escalar de dos vectores está representado más concisamente por una u otra de las dos formas:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^* = \alpha_1 \beta_1^* + \alpha_2 \beta_2^* + \alpha_3 \beta_3^* \quad (1-50)$$

o bien,

$$\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B} = \alpha_1^* \beta_1 + \alpha_2^* \beta_2 + \alpha_3^* \beta_3.$$

Esto es,

$$\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^*.$$

Los vectores base no ortogonales son muy importantes en física. Se emplean mucho en problemas relacionados con la propagación de ondas (electromagnéticas, elásticas, materiales) en materiales que tengan una estructura periódica como, por ejemplo, los cristales.

Un cristal ideal es una estructura periódica, la cual es la misma cuando se le mira con respecto al punto interior del cristal escogido como origen que cuando se le mira con respecto a todos los puntos, cuya posición es dada por

$$\mathbf{r} = \rho_1 b_1 + \rho_2 b_2 + \rho_3 b_3,$$

donde  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $\rho_3$  son números enteros. Los vectores  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$  se llaman *ejes del cristal* o *vectores primitivos de translación* del cristal. El conjunto de puntos definido por los anteriores vectores de posición se llama *red cristalina* (fig. 1-14). Los vectores recíprocos  $b_i^*$  definen la *red recíproca*.

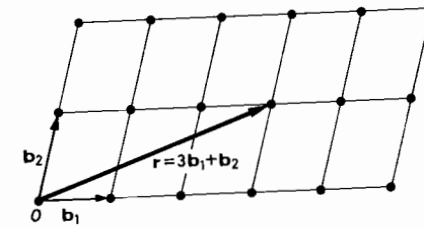


FIG. 1-14. Ejemplo de red bidimensional.

Como ejemplo de su utilidad consideremos la difracción de los rayos X por cristales. Los rayos X son radiaciones electromagnéticas que tienen longitudes de onda comparables a las distancias interatómicas dentro de un cristal. Cuando los rayos X chocan con un cristal, parte de su energía electromagnética es dispersada (absorbida y reemitida en todas direcciones) por los electrones de los átomos del cristal. La radiación dispersa emitida por los átomos espaciados periódicamente se suma coherentemente para producir rayos difractados en algunas direcciones incidentes.

W. L. Bragg dio a conocer los ángulos en que se pueden observar los rayos difractados. Su análisis mostró que los rayos difractados y los rayos incidentes forman un mismo ángulo con un conjunto de planos paralelos equidistantes de átomos del cristal, llamados planos cristalográficos (fig. 1-15). Los diferentes planos cristalográficos actúan, por tanto, como una especie de espejos que reflejan parcialmente.

La condición necesaria para que los rayos "reflejados" se unan constructivamente hasta formar un intenso rayo difractado es que todos ellos estén en fase. Esta condición, conocida como *ley de Bragg*, se expresa por

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, \dots,$$

donde  $d$  es el espaciamiento entre los planos,  $\theta$  el ángulo que forma el rayo incidente con los planos y  $\lambda$  la longitud de onda de la radiación electromagnética. Observemos que

el índice de refracción de los rayos X es esencialmente la unidad. Por tanto, el rayo transmitido pasa a través del cristal sin refractarse. En la figura 1-15 vemos que  $(2d \sin \theta)$  representa la diferencia de trayectorias entre los rayos reflejados desde planos vecinos.

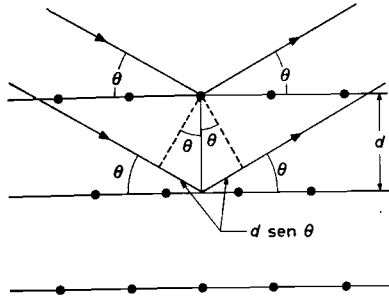


FIG. 1-15. Difracción de Bragg.

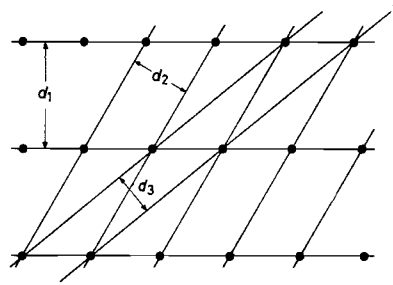


FIG. 1-16. Planos de difracción de Bragg en un cristal.

Hay varios sistemas de planos paralelos dentro de un cristal (fig. 1-16). La ubicación de los planos y la distancia entre éstos se representan muy eficientemente en función de los vectores base de la red cristalina y los vectores base de la red recíproca.

Un plano está determinado por tres puntos. Estos tres puntos son escogidos, corrientemente en las intersecciones, que determinan los segmentos  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $\rho_3$ , de uno de los planos con los tres ejes base de la red cristalina (fig. 1-17). En función de los vectores base de la red cristalina, estos puntos están definidos por los vectores

$$r_1 = \rho_1 b_1, \quad r_2 = \rho_2 b_2$$

y

$$r_3 = \rho_3 b_3.$$

Para el plano más cercano al origen, los segmentos interceptados  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $\rho_3$  no tendrán un factor inherente común. De estos vectores obtenemos los dos siguientes

$$A = r_1 - r_2 = \rho_1 b_1 - \rho_2 b_2$$

y

$$B = r_1 - r_3 = \rho_1 b_1 - \rho_3 b_3,$$

que están en el plano de los puntos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ . El vector

$$\begin{aligned} A \times B &= b_1 \cdot b_2 \times b_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ \rho_1 & -\rho_2 & 0 \\ \rho_1 & 0 & -\rho_3 \end{vmatrix} \\ &= \rho_1 \rho_2 \rho_3 b_1 \cdot b_2 \times b_3 \left( \frac{1}{\rho_1} b_1 + \frac{1}{\rho_2} b_2 + \frac{1}{\rho_3} b_3 \right) \end{aligned}$$

o el vector

$$C = \frac{1}{\rho_1} b_1 + \frac{1}{\rho_2} b_2 + \frac{1}{\rho_3} b_3$$

es, por tanto, normal al conjunto de planos. Si  $1/\rho_1$ ,  $1/\rho_2$  y  $1/\rho_3$  no son números enteros, entonces es usual multiplicarlos por su mínimo común denominador (m.c.d.) y utilizar el vector

$$n = hb_1 + kb_2 + lb_3$$

donde

$$h = \frac{\text{mcd}}{\rho_1}, \text{ etc.,}$$

para especificar la dirección u orientación del plano. Los enteros  $h$ ,  $k$  y  $l$  se llaman *índices de Miller* del plano cristalográfico.

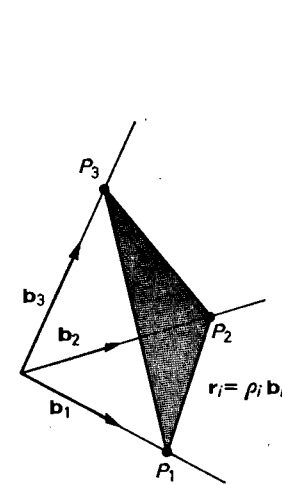


FIG. 1-17. Plano cristalográfico.

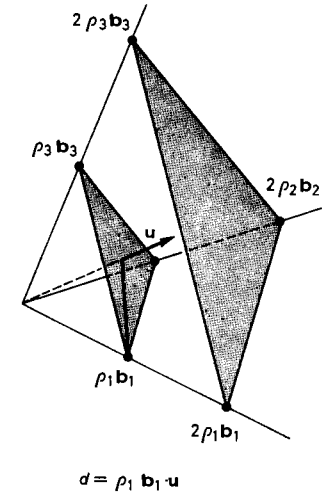


FIG. 1-18. Determinación del espacio entre planos cristalográficos.

Entonces, el vector unidad normal es

$$u = \frac{n}{n}$$

Como podemos ver en la figura 1-18, la distancia entre los planos es

$$\begin{aligned} d &= u \cdot \rho_1 b_1 = u \cdot \rho_2 b_2 = u \cdot \rho_3 b_3 \\ &= \frac{h\rho_1}{n} = \frac{\text{mcd}}{n}. \end{aligned}$$

Partiendo de la ubicación de los diferentes conjuntos de planos y la distancia entre ellos, puede determinarse la estructura del cristal.

### 1-6 Representación matricial de los vectores

En la última sección encontramos que un vector  $A$  está determinado si sus productos escalares por tres vectores no coplares son conocidos. Es

decir, los tres productos escalares  $\alpha_1^*$ ,  $\alpha_2^*$  y  $\alpha_3^*$  del vector  $\mathbf{A}$  y los vectores  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  y  $\mathbf{b}_3$  son suficientes para especificar el vector, pues entonces

$$\mathbf{A}^* = \alpha_1^* \mathbf{b}_1 + \alpha_2^* \mathbf{b}_2 + \alpha_3^* \mathbf{b}_3,$$

donde  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  y  $\mathbf{b}_3$  son los vectores recíprocos a los  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  y  $\mathbf{b}_3$ . Una manera muy conveniente de expresarlos, notacionalmente, es colocar los tres  $\alpha_i^*$  en una formación matricial.

Las matrices

$$[\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*] \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \\ \alpha_3^* \end{bmatrix}$$

se llaman, respectivamente, representaciones en matriz fila y matriz columna del vector  $\mathbf{A}^* = \alpha_1^* \mathbf{b}_1 + \alpha_2^* \mathbf{b}_2 + \alpha_3^* \mathbf{b}_3$ . Análogamente, las matrices

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

son las representaciones en matriz fila y matriz columna del vector

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \alpha_3 \mathbf{b}_3.$$

Como ambas representaciones de un vector son útiles, emplearemos una notación adicional por medio de la cual podemos, con referencia al vector  $\mathbf{A}$ , indicar específicamente en qué representación matricial está siendo expresado. Así, si el vector  $\mathbf{A}$  ha de ser representado por una matriz columna, este hecho será indicado poniendo la  $\mathbf{A}$  entre los paréntesis  $|$ ). Si ha de ser representado por una matriz fila se pondrá entre los paréntesis  $(|$ . Esto es

$$|\mathbf{A}| \leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad (1-51)$$

$$(\mathbf{A}| \leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3],$$

y similarmente

$$|\mathbf{A}^*| \leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \\ \alpha_3^* \end{bmatrix},$$

y

$$(\mathbf{A}^*| \leftrightarrow [\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*]. \quad (1-52)$$

Con esta notación a base de paréntesis, el producto escalar de dos vectores se expresa muy simplemente por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{A}^* | \mathbf{B}) = [\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \\ &= \alpha_1^* \beta_1 + \alpha_2^* \beta_2 + \alpha_3^* \beta_3. \end{aligned} \quad (1-53)$$

La ecuación (1-53) define la multiplicación de una matriz columna por otra fila. En esta multiplicación la matriz fila aparece a la izquierda de la matriz columna. También encontraremos frecuentemente la multiplicación en que la matriz columna aparece a la izquierda; lo cual da lo que se define como producto directo de una matriz columna y una matriz fila (ver Capítulo 10).

Observaremos que nuestra capacidad para representar un vector por una ordenación numérica y considerar a dicha ordenación como una matriz (no todas las ordenaciones son matrices), se debe al hecho de que las reglas de la igualdad y combinación de matrices son satisfechas por las ordenaciones que utilizamos para la representación de vectores. Estas reglas están expuestas en el Capítulo 10.

El hecho de que las representaciones matriciales de  $|\mathbf{A}|$  y  $(\mathbf{A}|$  tengan los mismos elementos se expresa diciendo que  $(\mathbf{A}|$  es la matriz transpuesta de  $|\mathbf{A}|$ ,

$$(\mathbf{A}| = \widetilde{|\mathbf{A}|}, \quad (1-54)$$

y similarmente

$$|\mathbf{A}^*| = \widetilde{(\mathbf{A}^*|},$$

donde la tilde sobre  $|\mathbf{A}|$ , o cualquier otra matriz, indica la transpuesta del vector o matriz en cuestión. Por tanto

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \quad \text{y} \quad \widetilde{[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}. \quad (1-55)$$

### 1-7 Derivada de un vector con respecto a un escalar

Se dice que el vector  $\mathbf{A}$  es una función univalente del escalar  $q$ , si para cada valor de  $q$  sólo existe un valor del vector  $\mathbf{A}$ . Similarmente, si para cada serie de valores de los escalares  $q_1, q_2, \dots$  sólo hay un valor del vector  $\mathbf{A}$ , entonces se dice que  $\mathbf{A}$  es una función univalente de los escalares  $q_1, q_2, \dots$ . Designaremos tal vector por

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(q_1, q_2, \dots).$$

Nos limitaremos a vectores continuos en los que

$$|\mathbf{A}(q + \Delta q) - \mathbf{A}(q)| < \varepsilon$$

para todo  $|\Delta q| < \delta$ , y

$$\delta \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Por ejemplo, el vector de posición

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

es una función continua de los escalares  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y, por tanto, será designado, siempre que sea conveniente, por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z).$$

En general, nos interesará el vector de posición como una función del tiempo. En tales casos, si  $t$  representa al tiempo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[x(t), y(t), z(t), t] = \mathbf{r}(t).$$

Un vector de campo eléctrico es otro ejemplo de uno que es función de los escalares  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $t$ ,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t).$$

De la definición de la derivada de una función escalar, definiremos la derivada de una función vectorial

$$\mathbf{A}(t) = A_x(t)\mathbf{i} + A_y(t)\mathbf{j} + A_z(t)\mathbf{k}$$

( $t$  no representa necesariamente al tiempo, en este caso) por

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} \right]. \quad (1-56)$$

De la regla para la suma o resta de vectores obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta A_x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta A_y}{\Delta t} \mathbf{j} + \frac{\Delta A_z}{\Delta t} \mathbf{k} \right] \\ &= \frac{dA_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1-57)$$

Las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de la derivada de un vector son, respectivamente, las derivadas de las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  del vector.

De la misma regla se deduce también que

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}. \quad (1-58)$$

El lector no tendrá dificultad, utilizando la regla para la derivada de un producto de dos funciones escalares, en demostrar que

$$\frac{d}{dt} (c\mathbf{A}) = \frac{dc}{dt} \mathbf{A} + c \frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad (1-59)$$

donde  $c$  es una función escalar de  $t$ ,

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (1-60)$$

y

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}. \quad (1-61)$$

Debemos observar que en la última ecuación el orden de los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  debe ser conservado.

Es evidente que la deducción de la ecuación (1-57) revela que al manejar la representación matricial de un vector  $\mathbf{A}$  cuyos elementos son los productos escalares de  $\mathbf{A}$  por un conjunto de tres vectores base constantes ( $t$  es independiente), la matriz cuyos elementos son las derivadas de los elementos de la representación matricial del vector  $\mathbf{A}$  representa la derivada de  $\mathbf{A}$ . La derivada de una matriz está definida por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\alpha_1}{dt} \\ \frac{d\alpha_2}{dt} \\ \frac{d\alpha_3}{dt} \end{bmatrix}. \quad (1-62)$$

Notemos que, en general, la derivada de la representación matricial de un vector no da la representación matricial de la derivada del vector. Este hecho se pondrá en claro en secciones posteriores.

### 1-8 Rotación de un vector

La ecuación (1-57) representa la derivada de un vector en función de las derivadas de sus componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Es interesante e instructivo considerar la derivada de un vector expresada en función del producto de su magnitud y del vector unidad que designa su dirección,

$$\mathbf{A} = A\mathbf{e}_A.$$

Por la ecuación (1-59) obtenemos

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt} (A\mathbf{e}_A) = \frac{dA}{dt} \mathbf{e}_A + A \frac{d\mathbf{e}_A}{dt}. \quad (1-63)$$

Procederemos a demostrar que el primer término del segundo miembro de la ecuación (1-63) da razón del cambio de magnitud del vector  $\mathbf{A}$ , mientras que su segundo término lo da del cambio de su dirección. El cambio en la magnitud de un vector está, dentro de los infinitesimales de primer orden, dado por

$$\Delta A = \frac{dA}{dt} \Delta t.$$

Pero

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2A} \frac{dA^2}{dt} = \frac{1}{2A} \frac{d}{dt} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}.$$

De ahí que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\mathbf{A}}{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{e}_A \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}. \quad (1-64)$$

Esta última relación nos dice que el cambio de la magnitud de un vector  $\mathbf{A}$  se debe a la componente de  $d\mathbf{A}/dt$  a lo largo de  $\mathbf{A}$ . Aplicando este resultado en la ecuación (1-63) obtenemos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dt} \mathbf{e}_A \cdot \mathbf{e}_A + A \mathbf{e}_A \cdot \frac{d\mathbf{e}_A}{dt} = \frac{dA}{dt} + A \mathbf{e}_A \cdot \frac{d\mathbf{e}_A}{dt} \quad (1-65)$$

o sea, que

$$\mathbf{e}_A \cdot \frac{d\mathbf{e}_A}{dt} = 0. \quad (1-66)$$

Por tanto, hemos comprobado que sólo el primer término del segundo miembro de la ecuación (1-63) contribuye al cambio de la magnitud de un vector  $\mathbf{A}$ .

La derivada del cuadrado de la magnitud de  $\mathbf{e}_A$  es

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{e}_A|^2 = 2\mathbf{e}_A \cdot \frac{d\mathbf{e}_A}{dt}.$$

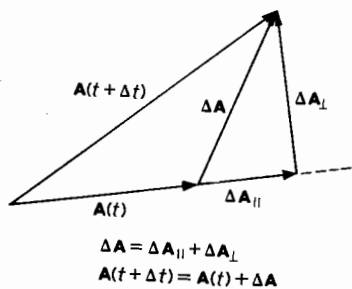


FIG. 1-19. Variación de  $\mathbf{A}(t)$  a  $\mathbf{A}(t + \Delta t)$ .

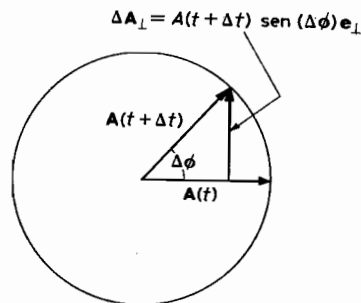


FIG. 1-20. Rotación de un vector alrededor de un eje perpendicular.

Por tanto, la ecuación (1-66) expresa el hecho de que la magnitud de  $\mathbf{e}_A$  no cambia, y como  $\mathbf{e}_A$  es un vector de magnitud unidad,  $d\mathbf{e}_A/dt$ , o bien se anula, o bien es perpendicular a  $\mathbf{e}_A$ . Si  $d\mathbf{e}_A/dt$  no se anula, entonces  $A d\mathbf{e}_A/dt$  es igualmente perpendicular a  $\mathbf{A}$ . Se ha demostrado, por consiguiente, que la componente de  $d\mathbf{A}/dt$  perpendicular a  $\mathbf{A}$  no afecta la magnitud del vector  $\mathbf{A}$ .

Podríamos haber llegado a la misma conclusión por medio de una consideración geométrica del cambio del vector  $\mathbf{A}(t)$  en el vector  $\mathbf{A}(t + \Delta t)$  al incrementarse  $t$  en la cantidad  $\Delta t$ .

Consideremos el plano en que están los vectores  $\mathbf{A}(t)$  y  $\mathbf{A}(t + \Delta t)$  (fig. 1-19). De esta figura y con el teorema de Pitágoras, tendremos

$$A(t + \Delta t) = \sqrt{(A + \Delta A_{||})^2 + (\Delta A_{\perp})^2};$$

donde  $\Delta A_{\perp}$  y  $\Delta A_{||}$  son las magnitudes de  $\Delta \mathbf{A}_{\perp}$  y  $\Delta \mathbf{A}_{||}$ ; siendo éstos los dos vectores, perpendicular y paralelo a  $\mathbf{A}$ , respectivamente, en que  $\Delta \mathbf{A}$  puede descomponerse.

Dentro de los infinitesimales de primer orden encontramos

$$A(t + \Delta t) = A + \Delta A_{||}.$$

Esto verifica nuestra conclusión sobre el cambio infinitesimal en la magnitud de un vector, que se debe únicamente al cambio infinitesimal paralelo al vector.

El otro cambio posible en un vector, una variación de su orientación, se logra por una rotación del vector. Haremos una digresión para demostrar que el cambio de un vector producido por una rotación infinitesimal puede expresarse en función del producto vectorial de un vector de rotación, que definiremos, y el vector que se gira.

Para simplificar, consideremos primero una rotación en un ángulo  $\Delta\phi$  del vector  $\mathbf{A}$  alrededor de un eje perpendicular a éste. Por tanto, este eje es también perpendicular al plano de las direcciones inicial y final de  $\mathbf{A}$ . Como se indica en la figura 1-20, la punta de la cabeza del vector  $\mathbf{A}$  se mueve sobre una circunferencia de radio  $A$ , puesto que  $\mathbf{A}$  permanece constante en magnitud.

Para los infinitesimales de primer orden, vemos en la misma figura que

$$\Delta \mathbf{A}_{\perp} = A(t + \Delta t) \text{ sen } \Delta\phi \mathbf{e}_{\perp} = A \Delta\phi \mathbf{e}_{\perp}, \quad (1-67)$$

donde  $\mathbf{e}_{\perp}$  es vector unidad perpendicular a  $\mathbf{A}$  en la dirección y sentido del cambio perpendicular.

Ahora, definiremos el vector de rotación (fig. 1-21),

$$\Delta\phi = \Delta\phi \mathbf{n}, \quad (1-68)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unidad perpendicular al plano de  $\mathbf{A}(t)$  y  $\mathbf{A}(t + \Delta t)$  que apunta en la dirección y sentido de  $\mathbf{e}_A \times \mathbf{e}_\perp$ . De hecho,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{e}_A$  y  $\mathbf{e}_\perp$  son tres vectores mutuamente ortogonales para los que

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_A \times \mathbf{e}_\perp \quad \mathbf{n} \times \mathbf{e}_A = \mathbf{e}_\perp, \quad (1-69)$$

y

$$\mathbf{e}_\perp \times \mathbf{n} = \mathbf{e}_A.$$

En función de  $\Delta\phi$ , podemos, en consecuencia, establecer que

$$\Delta\mathbf{A}_\perp = \Delta\phi \times \mathbf{A} = \Delta\phi A \mathbf{e}_\perp. \quad (1-70)$$

Por lo tanto, hemos demostrado que el cambio perpendicular infinitesimal de un vector  $\mathbf{A}$  puede ser considerado como que es producido por una rotación infinitesimal del vector  $\mathbf{A}$ , y como tal, se puede expresar por el producto vectorial de un vector de rotación  $\Delta\phi$  y el vector  $\mathbf{A}$ .

Considerando que la ecuación (1-70) sólo es correcta dentro de infinitesimales de primer orden, la ecuación de la componente de la derivada de  $\mathbf{A}$  a lo largo de  $\mathbf{e}_\perp$  multiplicada por  $\mathbf{e}_\perp$ ,

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{e}_\perp\right) \mathbf{e}_\perp = \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{A}, \quad (1-71)$$

es una ecuación exacta.

El vector de rotación que produce  $\Delta\mathbf{A}_\perp$  no es único, pues

$$\Delta\phi' = \Delta\phi + c\mathbf{e}_A,$$

cuando  $c$  es una constante, es otro vector de rotación que dará el mismo resultado que  $\Delta\phi$  de la ecuación (1-68), puesto que  $\mathbf{e}_A \times \mathbf{A} = 0$ .

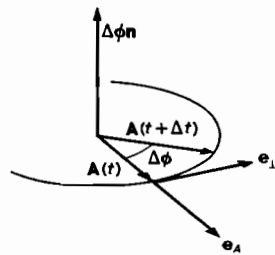


FIG. 1-21. El vector de rotación.

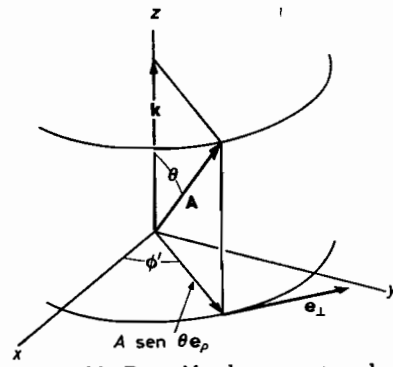


FIG. 1-22. Rotación de un vector alrededor del eje z.

En la figura 1-22 demostramos que esto es realmente así. En ella presentamos gráficamente un vector  $\mathbf{A}$  que forma un ángulo  $\theta$  con el eje

alrededor del cual se le gira. Hemos elegido como eje de rotación el eje  $z$ , y su sentido positivo será el de avance de un tornillo de rosca a la derecha que gira alrededor de dicho eje en el mismo sentido que  $\mathbf{A}$ .

Una rotación del vector  $\mathbf{A}$  alrededor del eje  $z$  hace que la cabeza de la flecha que representa a  $\mathbf{A}$  se mueva en una circunferencia de radio  $A \sin \theta$  alrededor del eje de rotación.

El cambio en el vector  $\mathbf{A}$  es, por tanto, idéntico al cambio del vector  $(A \sin \theta) \mathbf{e}_p$ , donde  $\mathbf{e}_p$  es el vector unidad en el plano  $xy$  dirigido en el sentido positivo de la proyección de  $\mathbf{A}$  sobre el plano  $xy$ . El cambio infinitesimal del último vector y, por ello, el cambio infinitesimal de  $\mathbf{A}$  están dados por la ecuación (1-70), con  $\Delta\phi$  sustituido por  $\Delta\phi'$ ,

$$\Delta\mathbf{A}_\perp = A \sin \theta \Delta\phi' \mathbf{k} \times \mathbf{e}_p = \Delta\phi' \times \mathbf{A}, \quad (1-72)$$

donde

$$\Delta\phi' = \Delta\phi' \mathbf{k}.$$

Concluimos nuestra explicación de la rotación infinitesimal de vectores verificando que el vector de la rotación infinitesimal  $\Delta\phi$ , dentro de infinitesimales de primer orden, satisface, también, la ley del paralelogramo de la suma. Por otra parte, se habrá demostrado que el vector

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t},$$

es un vector para infinitesimales de cualquier orden.\*

Considerando dos rotaciones infinitesimales sucesivas  $\Delta\phi_1$  y  $\Delta\phi_2$ , al realizarse la primera rotación tenemos el nuevo vector:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} = \mathbf{A} + \Delta\phi_1 \times \mathbf{A}. \quad (1-73)$$

La siguiente rotación,  $\Delta\phi_2$ , transforma al vector  $\mathbf{A}'$  en el

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'' &= \mathbf{A}' + \Delta\phi_2 \times \mathbf{A}' \\ &= \mathbf{A} + \Delta\phi_1 \times \mathbf{A} + \Delta\phi_2 \times \mathbf{A} + \Delta\phi_2 \times (\Delta\phi_1 \times \mathbf{A}). \end{aligned} \quad (1-74)$$

Si invertimos el orden de las dos rotaciones, obtenemos primero el vector

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \Delta\phi_2 \times \mathbf{A}, \quad (1-75)$$

y posteriormente el vector

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \mathbf{A} + \Delta\phi_2 \times \mathbf{A} + \Delta\phi_1 \times \mathbf{A} + \Delta\phi_1 \times (\Delta\phi_2 \times \mathbf{A}). \quad (1-76)$$

Puesto que, en general,

$$\Delta\phi_1 \times (\Delta\phi_2 \times \mathbf{A}) \neq \Delta\phi_2 \times (\Delta\phi_1 \times \mathbf{A}),$$

\* Si  $t$  representa al tiempo, entonces  $\omega = d\phi/dt$  es la velocidad angular de  $\mathbf{A}$ .

vemos que, de ordinario, las rotaciones finitas no son conmutativas. Si las rotaciones son infinitesimales, los términos  $\Delta\phi_1 \times (\Delta\phi_2 \times \mathbf{A})$  y  $\Delta\phi_2 \times (\Delta\phi_1 \times \mathbf{A})$  son proporcionales al producto  $\Delta\phi_1 \Delta\phi_2$  de las magnitudes de los dos vectores de rotación, el cual es un infinitesimal de segundo orden. Por tanto, considerando sólo infinitesimales de primer orden podemos establecer

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}''.$$

Como se hallará este mismo resultado girando el vector  $\mathbf{A}$  la rotación especificada por el vector  $(\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2)$ , hemos demostrado que, dentro de los infinitesimales de primer orden, las rotaciones infinitesimales son conmutativas y que, dentro de esta aproximación, pueden ser representadas por vectores de rotación.

Por otra parte, las cantidades

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t}, \quad (1-77)$$

como vimos anteriormente, son vectores para infinitesimales de cualquier orden.

### 1-9 Representación de vectores planos por medio de números complejos

Geométricamente, un número complejo se puede representar por un vector bidimensional, cuyas componentes  $x$  y  $y$  representan, respectivamente, las partes real e imaginaria del mismo. Por tanto, el número complejo

$$a + ib, \quad (1-78)$$

donde  $a$  y  $b$  son números reales, siendo  $i$  la unidad imaginaria,

$$i = \sqrt{-1}, \quad (1-79)$$

puede ser representado por el vector bidimensional

$$\mathbf{A} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y, \quad (1-80)$$

donde  $\mathbf{e}_x$  y  $\mathbf{e}_y$  son los vectores unidad dirigidos en el sentido positivo de los ejes coordenados (fig. 1-23).

En tales casos, el  $x$  se llama eje real y el  $y$  es el eje imaginario. La razón de que tal representación sea posible es que con cada número complejo están relacionadas una magnitud y una fase, siendo la última el ángulo que forma su representación vectorial con el eje real.

La magnitud del número complejo  $a + ib$  está definida por

$$|a + ib| = \sqrt{(a + ib)(a - ib)} = \sqrt{a^2 + b^2} = A, \quad (1-81)$$

y su fase, por

$$\phi = \text{tg}^{-1} \frac{b}{a}. * \quad (1-82)$$

El ángulo  $\phi$  es el ángulo que forma  $\mathbf{A}$  con el eje  $x$ .

Además, los números complejos satisfacen la regla de suma de vectores:

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2). \quad (1-83)$$

Hay, por lo tanto, una correspondencia biunívoca entre la totalidad de vectores en el plano  $xy$  y los números complejos que representan.

A veces, encontraremos conveniente invertir este proceso y considerar los números complejos  $A_x + iA_y$  como la representación del vector bidi-

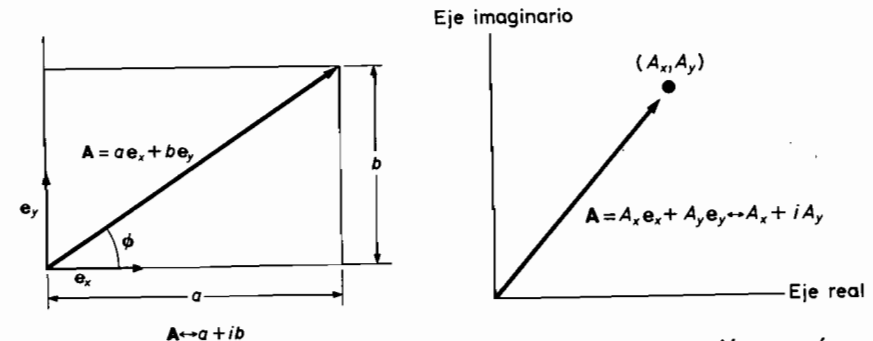


FIG. 1-23. Representación gráfica de un número complejo.

FIG. 1-24. Representación por número complejo de un vector del plano  $xy$ .

dimensional  $[A_x, A_y, 0]$ . En tales circunstancias, expresaremos este hecho escribiendo:

$$\mathbf{A} = A_x + iA_y. \quad (1-84)$$

En función del ángulo  $\phi$  que forma  $\mathbf{A}$  con el eje  $x$  \*\* (fig. 1-24)

$$\mathbf{A} = A (\cos \phi + i \sin \phi) = A e^{i\phi}. \quad (1-85)$$

\* Admitimos en este texto la notación  $\text{tg}^{-1}$  en lugar de  $\text{arctg}$ , porque en las matemáticas modernas se va extendiendo ya mucho el empleo del exponente  $-1$  como indicación de funciones, elementos, matrices, etc., inversos, sin que signifique un producto igual a la unidad. (N. del R.)

\*\* Podemos ver que  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$  como sigue: Consideremos  $y = \cos \phi + i \sin \phi$  de lo que derivando, obtenemos

$$\frac{dy}{d\phi} = -\sin \phi + i \cos \phi = iy.$$

La solución de esta ecuación es  $y = e^{i\phi}$ , que comprueba la ecuación (1-85).

Como  $\mathbf{A}$  es un vector de magnitud  $A$ , resulta que  $e^{i\phi}$  representa un vector unidad que indica la dirección y sentido de  $\mathbf{A}$ . Tenemos realmente

$$\mathbf{e}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} = e^{i\phi}. \quad (1-86)$$

Para completar la correspondencia entre el número complejo  $A_x + iA_y$  y el vector  $\mathbf{A}$ , tendremos que multiplicar dos números complejos y poder deducir de su producto los productos escalar y vectorial de los vectores que aquéllos representan. Veremos que, si multiplicamos el número complejo  $Ae^{i\phi_A}$  por el complejo conjugado  $Be^{i\phi_B}$ , obtenemos

$$(A_x + iA_y)(B_x - iB_y) = (A_xB_x + A_yB_y) + i(A_yB_x - A_xB_y). \quad (1-87)$$

Reconoceremos la parte real de la ecuación (1-87) como el producto escalar de los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , y la parte imaginaria como la magnitud del producto vectorial  $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ . Es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \text{Re}(\mathbf{B}^* \mathbf{A}) = \text{Re}(\mathbf{A}^* \mathbf{B}) \\ &= \text{Re}(ABe^{i(\phi_A - \phi_B)}) = AB \cos(\phi_A - \phi_B) \end{aligned} \quad (1-88)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{B} \times \mathbf{A}| &= |\text{Im}(\mathbf{B}^* \mathbf{A})| = |\text{Im}(ABe^{i(\phi_A - \phi_B)})| \\ &= |AB \sin(\phi_A - \phi_B)|. \end{aligned} \quad (1-89)$$

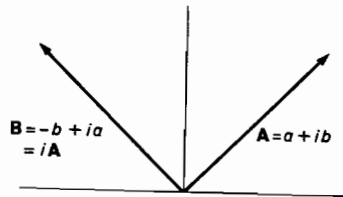


FIG. 1-25. Dos vectores perpendiculares en notación de complejos.

La rotación de un ángulo  $\theta$  del vector  $\mathbf{A} = Ae^{i\phi}$  alrededor del eje  $z$  se halla multiplicando el vector  $\mathbf{A}$  por  $e^{i\theta}$ . La multiplicación por

$$e^{i\pi/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

gira  $90^\circ$  al vector  $\mathbf{A}$  (fig. 1-25).

Notemos que la derivada del vector unidad  $\mathbf{e} = e^{i\phi}$  nos da

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = i \frac{d\phi}{dt} e^{i\phi} = i\omega e^{i\phi}.$$

Esto demuestra que  $d\mathbf{e}/dt$  es realmente un vector de magnitud  $\omega$  perpendicular al vector unidad  $\mathbf{e}$ . Esto está de acuerdo con lo expuesto en la última sección.

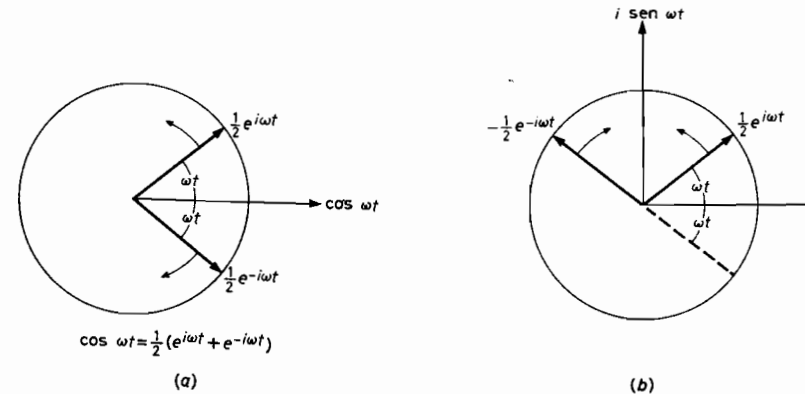


FIG. 1-26. Vector unidireccional que varía sinusoidalmente expresado por la suma lineal de dos vectores giratorios.

Un ejemplo muy interesante e importante es aquel en que  $\omega$  es constante. Entonces

$$\phi = \omega t, \quad (1-90)$$

y  $e^{i\omega t}$  es un vector unidad que gira linealmente con  $t$  en una rotación de sentido contrario al reloj. Por otro lado, el vector  $e^{-i\omega t}$  es un vector unidad que gira linealmente con  $t$  en sentido del reloj. La combinación de estos dos vectores, que giran linealmente, puede conducirnos (fig. 1-26a) ya sea al vector

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = \cos \omega t \quad (1-91)$$

o bien, al vector (fig. 1-26b)

$$\mathbf{r}_2 = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = i \sin \omega t. \quad (1-92)$$

El primer vector, siendo real, siempre está sobre el eje  $x$ , mientras que el segundo está dirigido a lo largo del eje  $y$ . Ambos vectores varían con  $t$  de una manera armónica simple. Esto nos confirma el importantísimo principio de que un vector unidireccional que varía sinusoidalmente con  $t$  se puede expresar por la suma de un vector que gira en el sentido del reloj y otro vector que gira en sentido contrario al reloj.

Por otro lado, como

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad \text{y} \quad e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t,$$

tenemos, también, el caso contrario de que un vector que gira uniforme-



mente se puede expresar por la suma de dos vectores mutuamente ortogonales que son funciones armónicas simples de  $t$ .

En nuestras explicaciones sobre la polarización de ondas transversales armónicas, del Capítulo 12, y sobre el efecto de un campo magnético sobre un oscilador isotrópico y su uso en la clásica explicación del *efecto de Faraday*, en el Capítulo 6, encontraremos de mucha utilidad representar vectores giratorios en forma de complejos conjugados.

### Problemas

1-1. Dados los tres vectores

$$\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k},$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k},$$

$$\mathbf{C} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Hállense: *a*) la suma de los vectores  $\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C}$ ; *b*) las magnitudes y los cosenos directores de los tres vectores; *c*) los vectores unidad en la dirección de los tres vectores; *d*) los productos escalares  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$  y  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$  y el ángulo entre cada par de vectores; *e*) los productos vectoriales  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$  y, a partir de la magnitud de cada uno, el ángulo entre cada par de vectores; *f*) el triple producto escalar  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  (¿son coplanares los vectores?); *g*)  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}$  y  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}$ .

1-2. Demostrar que los tres vectores de posición

$$\mathbf{r}_1 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_2 = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_3 = c(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}),$$

son coplanares. ¿Cuál debe ser la magnitud de  $c$  para que los tres vectores sean los lados de un triángulo?

1-3. ¿Cuál debe ser el valor de  $c$ , la componente  $z$  del vector

$$\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + c\mathbf{k},$$

para que el vector  $\mathbf{A}$  sea perpendicular al

$$\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}?$$

1-4. Los vectores de posición de los puntos  $P_1$  y  $P_2$  con respecto al origen  $O$  son

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

Hállense los vectores que determinan los puntos de la recta que une los dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ .

1-5. Comprobar la ecuación (1-31) desarrollando ambos miembros en función de las componentes cartesianas de los vectores. Hállense el triple producto vectorial  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  de los tres vectores del problema 1-1.

1-6. Encontrar el vector de posición de los puntos que están sobre la recta que pasa por el punto  $(2, 0, 1)$  y es perpendicular al plano de los vectores

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

1-7. Demostrar que

$$a) \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) - \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}),$$

$$b) (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) = 0,$$

$$c) (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D} \\ = (\mathbf{A} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{D})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{D})\mathbf{A}.$$

1-8. Deducir las ecuaciones (1-59) a la (1-61).

1-9. Comprobar las siguientes desigualdades:

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|,$$

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|,$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|.$$

1-10. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son no coplanares?

$$a) \mathbf{b}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k} \quad b) \mathbf{b}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{i} + 3\mathbf{k} \quad \mathbf{b}_2 = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b}_3 = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k} \quad \mathbf{b}_3 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

1-11. Hállese el conjunto recíproco de vectores del conjunto de vectores no coplanares del problema 1-10.

1-12. *a*) Expresar los vectores

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

en función de una suma lineal de los vectores no coplanares del problema 1-10 y en función de una suma lineal de sus vectores recíprocos.

*b*) Evaluar  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  y  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ , utilizando los productos escalares  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\alpha_i^*$  y  $\beta_i^*$  de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  con el conjunto de vectores no coplanares del problema 1-10 y sus vectores recíprocos. Compárese la respuesta con los productos escalar y vectorial de estos tres vectores evaluados en función de las componentes cartesianas de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ .

1-13. Hállense los vectores de posición de los puntos que están en el plano de los puntos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  cuyos vectores de posición son:

$$\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_2 = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_3 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

1-14. Encontrar la distancia del origen al plano determinado por los tres puntos del problema anterior.

1-15. Demostrar que los tres vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}, \\ \mathbf{b}_2 &= -\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j} - \mathbf{k}, \\ \mathbf{b}_3 &= -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{k}, \end{aligned}$$

son mutuamente ortogonales.

1-16. La derivada del vector  $\mathbf{A}(t)$  de magnitud constante se demostró que puede ser expresada como un producto vectorial,

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}(t).$$

Sin embargo,  $\boldsymbol{\omega}$  no es única, ya que la suma del término  $c\mathbf{A}$  a  $\boldsymbol{\omega}$  producirá el mismo resultado. Por otro lado, la derivada de dos vectores de magnitud constante puede determinar una  $\boldsymbol{\omega}$  única, en función de la cual sus derivadas son expresables en la forma:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} \mathbf{B}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}.$$

Considerando los vectores unidad

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \sin \alpha t \cos \beta t \mathbf{i} + \sin \alpha t \sin \beta t \mathbf{j} + \cos \alpha t \mathbf{k}, \\ \mathbf{e}_2 &= \cos \alpha t \cos \beta t \mathbf{i} + \cos \alpha t \sin \beta t \mathbf{j} - \sin \alpha t \mathbf{k}, \\ \mathbf{e}_3 &= -\sin \beta t \mathbf{i} + \cos \beta t \mathbf{j}, \end{aligned}$$

hállese el vector de la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  que satisface las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} \mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2.$$

Demostrar que la misma  $\boldsymbol{\omega}$  también nos da

$$\frac{d\mathbf{e}_3}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3.$$

1-17. Para la descripción cinemática del movimiento de un cuerpo rígido, se necesitan las relaciones que existen entre un sistema de ejes coordenados en el espacio, designado por los vectores unidad  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ , y los ejes de un sistema de coordenadas que gira con el cuerpo rígido designado por  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  y  $\mathbf{k}'$ .

a) Dadas las expresiones de los tres vectores no coplanares

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \sin \theta \sin \psi \mathbf{i}' + \sin \theta \cos \psi \mathbf{j}' + \cos \theta \mathbf{k}', \\ \mathbf{k}' &= \sin \theta \sin \phi \mathbf{i} - \sin \theta \cos \phi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}, \\ \mathbf{e}_\phi &= \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j} = \cos \psi \mathbf{i}' - \sin \psi \mathbf{j}' = \mathbf{e}'_\phi, \end{aligned}$$

hállese sus vectores recíprocos  $\bar{\mathbf{k}}$ ,  $\bar{\mathbf{k}}'$  y  $\mathbf{e}'_\phi$ , expresados en función de los vectores base  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  y  $\mathbf{k}'$  del sistema de coordenadas del cuerpo.

b) Expresar los vectores  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  como una suma lineal de los vectores  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  y  $\mathbf{e}'_\phi$ , y de ahí obtener las relaciones de  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  con los vectores base del sistema de coordenadas del cuerpo. [Los ángulos  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\psi$  son conocidos como *ángulos de Euler* (ver Capítulo 9)].

1-18. a) Demostrar que los productos escalares  $\alpha_i$  y  $\alpha_i^*$  del vector  $\mathbf{A}$  por los vectores base  $\mathbf{b}_i$  y sus vectores recíprocos  $\mathbf{b}_i$ , están relacionados linealmente como se indica por

$$\alpha_i^* = \sum_j g_{ij}^* \alpha_j \quad \text{y} \quad \alpha_i = \sum_j g_{ij} \alpha_j^*.$$

Expresense los escalares  $g_{ij}$  y  $g_{ij}^*$  en función de los vectores base  $\mathbf{b}_i$  y los vectores recíprocos  $\mathbf{b}_i$ . (Obsérvese que los  $g_{ij}$  son las componentes covariantes del tensor métrico y las  $g_{ij}^*$  las componentes contravariantes del mismo.)

b) Demostrar que el producto escalar de dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  se puede expresar por

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{ij} g_{ij}^* \alpha_i \beta_j = \sum_{ij} g_{ij} \alpha_i^* \beta_j^*.$$

1-19. a) Demostrar que el vector de posición dependiente del tiempo

$$\mathbf{r}(t) = A \cos \omega t \mathbf{i} + B \sin \omega t \mathbf{j}$$

se mueve sobre los puntos de la elipse que tiene como semieje mayor  $A$  ( $A > B$ ) y semieje menor  $B$ , girando en un sentido contrario al reloj.

b) Demostrar que la suma de los vectores complejos

$$\mathbf{r}_1 = A e^{i\omega t} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2 = B e^{-i\omega t}, \quad A \neq B,$$

representa un vector de posición que se mueve sobre los puntos de una elipse. Determinar el sentido de rotación del vector en función de las magnitudes de  $A$  y  $B$ .

1-20. Comprobar en la ecuación (1-43) que los vectores  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  y  $\mathbf{b}_3$  son recíprocos de los vectores  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  y  $\mathbf{b}_3$ .

1-21. a) Encontrar el vector de posición de los puntos que están en el plano perpendicular al vector

$$\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

que contiene el punto (1, 2, 3).

b) Hállese el vector de posición de los puntos que están en el plano determinado por los tres puntos (2, 1, 1), (-1, 2, 2) y (3, 2, 1).

1-22. a) Una rotación es una transformación de coordenadas que implica un cambio de vectores base. Considerando los dos conjuntos de vectores base unidad ortogonales  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  y  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  que están relacionados por

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^3 t_{ij} \mathbf{e}_j.$$

Demostrar que

$$\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^3 t_{ij} \mathbf{e}'_i.$$

b) Partiendo de los valores de los productos escalares entre los vectores de uno u otro conjunto, demuéstrese que

$$\sum_{i=1}^3 t_{ij} t_{ik} = \delta_{jk}.$$

Tal transformación se denomina transformación ortogonal de coordenadas.

## Cinemática de la partícula

En este capítulo desarrollaremos el formalismo necesario para analizar el movimiento de una partícula. Se entiende por partícula un cuerpo puntiforme; tal tipo de cuerpo, por supuesto, no existe en realidad. La idea de cuerpo puntiforme es una idealización matemática de un objeto cuyas dimensiones y orientación en el espacio son despreciables para la descripción particular de su movimiento que interesa. Por ejemplo, en el movimiento de los planetas alrededor del Sol, éstos se pueden considerar, en una primera aproximación, como cuerpos sin dimensiones, o sea, como cuerpos puntiformes. Por el contrario, un electrón que se mueva muy cerca de otro cuerpo cargado eléctricamente no puede ser tratado como partícula. Volveremos sobre el tema en un capítulo posterior, cuando estemos en mejores condiciones para entender y reconocer los casos en que se pueda considerar o no a un cuerpo como partícula.

Las cantidades físicas necesarias para describir el movimiento de una partícula son: su posición, su velocidad y su aceleración. La forma que toman estas cantidades vectoriales depende de las coordenadas en función de las cuales, y del sistema de coordenadas con respecto al cual, medimos el movimiento de la partícula. En el capítulo anterior hemos visto que la selección de un sistema de coordenadas es completamente arbitrario, teniendo como única condición el que los tres vectores base no sean coplanares. La selección más sencilla será la de tres vectores unidad mutuamente ortogonales, y aun con estos vectores hay una gran flexibilidad. Por ejemplo, en las coordenadas cilíndricas y esféricas, usamos tres vectores base unidad mutuamente ortogonales cuya orientación en el espacio depende de la posición de la partícula (fig. 2-1). Estos vectores base girarán a medida que la partícula cambie de posición. Los vectores base de coordenadas que se empleen en un problema particular se determinarán, como veremos más adelante, por las coordenadas en función de las cuales decidamos describir el movimiento.

A continuación definiremos la velocidad y la aceleración de una partícula y haremos una descripción de las mismas en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, para concluir con un estudio de ellas en coordenadas generalizadas. Recomendamos al lector que ponga todo su interés para entender y dominar perfectamente esta última parte.

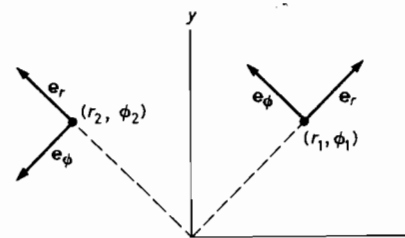


FIG. 2-1. Vectores base unidad del plano  $xy$  para coordenadas polares  $r$  y  $\phi$ .

### 2-1 Velocidad y aceleración

El vector de posición de una partícula queda determinado por el radio vector  $\mathbf{r}$  que va desde el origen de un sistema de coordenadas cartesianas al punto en que está situada la partícula. Si la partícula se mueve, su vector de posición será función del tiempo  $t$ , y se designará por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (2-1)$$

La sucesión de puntos ocupados por la partícula trazará una curva en el espacio, que se puede representar en forma paramétrica por las ecuaciones que indiquen la dependencia, con respecto al tiempo, de los valores de las tres coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$  del vector de posición:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{y} \quad z = z(t). \quad (2-2)$$

La velocidad instantánea de una partícula en el instante  $t$ , se define por la derivada respecto al tiempo de su vector de posición:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \right]. \quad (2-3)$$

O sea, que la velocidad instantánea, es el límite de la velocidad media  $\langle \mathbf{v} \rangle$  en el intervalo de tiempo  $(t_2 - t_1)$ ,

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)}{t_2 - t_1}, \quad (2-4)$$

cuando este intervalo tiende a cero.

Expresando la velocidad en función de las componentes cartesianas del vector de posición, tendremos

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \quad (2-5)$$

donde el punto sobre las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , del vector de posición, representa sus respectivas derivadas con respecto al tiempo. Por ejemplo

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}.$$

La aceleración de una partícula se define por la derivada, con respecto al tiempo, de su velocidad

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}. \quad (2-6)$$

Los dos puntos sobre el vector de posición  $\mathbf{r}$ , indican su segunda derivada con respecto al tiempo

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Derivando la ecuación (2-5) encontramos la expresión de la aceleración en coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}. \quad (2-7)$$

► Como ejemplo, hallaremos la velocidad y la aceleración de una partícula cuyo vector de posición es

$$\mathbf{r}(t) = A \cos \omega t \mathbf{i} + A \sin \omega t \mathbf{j} \quad (2-8)$$

o sea,

$$x = A \cos \omega t, \quad y = A \sin \omega t. \quad (2-9)$$

Las ecuaciones (2-9) son las paramétricas de una circunferencia de radio  $A$ . Para una partícula que se mueve en dicha circunferencia, la velocidad estará dada por

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = -A\omega \sin \omega t \mathbf{i} + A\omega \cos \omega t \mathbf{j}.$$

La distancia al origen es fija, ya que la partícula se está moviendo en una circunferencia, o sea  $r^2 = A^2$ , y, por lo tanto,  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  será perpendicular a  $\mathbf{r}$ , como se deduce también de lo que se expuso en la sección 1-8. Se halla que realmente se verifica  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$ .

En el caso especial que estamos considerando, la magnitud del vector de velocidad,  $v^2 = \omega^2 A^2$ , es constante. Luego, también deberemos encontrar que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$ . Derivando la velocidad obtenemos

$$\mathbf{a} = -A\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - A\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j} = -\omega^2 \mathbf{r},$$

por lo que se ve que  $\mathbf{a}$  es perpendicular a  $\mathbf{v}$ . ◀

## 2-2 Velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas  $\rho$ ,  $\phi$  y  $z$  se definen por sus relaciones con las coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  y  $z$ , que son:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \circ \left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2 \\ \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) &= \phi. * \end{aligned} \right. \quad (2-10)$$

Se ve que  $\rho$  es la proyección del radio vector  $\mathbf{r}$  en el plano  $xy$  (fig. 2-2), y que  $\phi$  es el ángulo que forma  $\rho$  con el eje  $x$ . Estas coordenadas reciben el nombre de cilíndricas porque las superficies en las que  $\rho$  es constante son cilindros circulares paralelos al eje  $z$ .

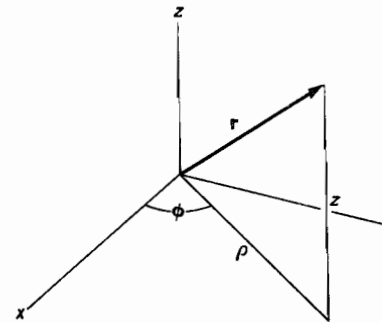


FIG. 2-2. Coordenadas polares cilíndricas.

Como conocemos la relación entre las coordenadas cartesianas y las cilíndricas, el vector de posición se puede expresar en función de las últimas, lo que da

$$\mathbf{r} = \rho \cos \phi \mathbf{i} + \rho \sin \phi \mathbf{j} + z \mathbf{k}. \quad (2-11)$$

Y derivando sucesivamente esta expresión del vector de posición, obtenemos los vectores de velocidad y aceleración

$$\mathbf{v} = (\dot{\rho} \cos \phi - \rho \dot{\phi} \sin \phi) \mathbf{i} + (\dot{\rho} \sin \phi + \rho \dot{\phi} \cos \phi) \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k}, \quad (2-12)$$

y para el vector de aceleración,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & (\ddot{\rho} \cos \phi - 2\dot{\rho}\dot{\phi} \sin \phi - \rho \dot{\phi}^2 \cos \phi - \rho \ddot{\phi} \sin \phi) \mathbf{i} \\ & + (\ddot{\rho} \sin \phi + 2\dot{\rho}\dot{\phi} \cos \phi - \rho \dot{\phi}^2 \sin \phi + \rho \ddot{\phi} \cos \phi) \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2-13)$$

\* Repetimos que  $\operatorname{tg}^{-1}$  equivale a  $\operatorname{arc} \operatorname{tg}$  (arco cuya tangente es...), sin que  $\operatorname{tg}^{-1}$  sea igual a  $1/\operatorname{tg}$ , sino que simplemente significa que es la función inversa de  $\operatorname{tg}$ .

Estas expresiones son bastante complicadas. Se simplificarán algo si las expresamos en función de un nuevo conjunto de vectores base que sean más naturales para las coordenadas cilíndricas.

Los vectores unidad que tomaremos como base siempre que empleemos coordenadas cilíndricas para el estudio cinemático del movimiento de una partícula son  $\mathbf{e}_\rho$ ,  $\mathbf{e}_\phi$  y  $\mathbf{k}$ , que, para un punto dado, estarán dirigidos respectivamente en el sentido en que el vector de posición  $\mathbf{r}$  cambia, cuando  $\rho$ ,  $\phi$  o  $z$  sufren un incremento infinitesimal. Estos vectores unidad se definen por\*

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{\Delta \mathbf{r}_\rho}{|\Delta \mathbf{r}_\rho|} = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial \rho}{|\partial \mathbf{r} / \partial \rho|} = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}, \quad (2-14)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{\Delta \mathbf{r}_\phi}{|\Delta \mathbf{r}_\phi|} = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial \phi}{|\partial \mathbf{r} / \partial \phi|} = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}, \quad (2-15)$$

siendo  $\mathbf{k}$  el vector unidad en el sentido positivo del eje  $z$ . En las ecuaciones (2-14) y (2-15),  $\Delta \mathbf{r}_\rho$  y  $\Delta \mathbf{r}_\phi$  representan los cambios en el vector de posición producidos al variar  $\rho$  y  $\phi$ , respectivamente (fig. 2-3):

$$\Delta \mathbf{r}_\rho = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \Delta \rho, \quad \Delta \mathbf{r}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \Delta \phi.$$

Se verifica fácilmente que en un punto, los tres vectores unidad  $\mathbf{e}_\rho$ ,  $\mathbf{e}_\phi$  y  $\mathbf{k}$ , son mutuamente ortogonales, formando en dicho punto un sistema de coordenadas a la derecha, o sea dextrógiro. Dejamos al lector la demostración de

$$\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{k} = \mathbf{e}_\rho, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\phi. \quad (2-16)$$

La figura 2-4 muestra los sentidos y direcciones de los vectores unidad tomados como base  $\mathbf{e}_\rho$ ,  $\mathbf{e}_\phi$  y  $\mathbf{k}$ . El vector unidad  $\mathbf{e}_\rho$  está en el plano  $xy$  formando un ángulo  $\phi$  con el eje  $x$ , y situado a lo largo de la proyección del vector de posición sobre el plano  $xy$ . El vector  $\mathbf{e}_\phi$  también está en el plano  $xy$ , es perpendicular a  $\mathbf{e}_\rho$  y forma un ángulo  $\phi$  con el sentido positivo del eje  $y$ .

De todo lo anterior se desprende que el vector de posición queda determinado, en función del conjunto ortogonal de vectores unidad base  $\mathbf{e}_\rho$ ,  $\mathbf{e}_\phi$  y  $\mathbf{k}$ , por la relación  $\mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_\rho) \mathbf{e}_\rho + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_\phi) \mathbf{e}_\phi + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}$ , y, por lo tanto, de la ecuación (2-11), obtenemos

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{k}. \quad (2-17)$$

\*  $\partial \mathbf{r} / \partial \rho$  y  $\partial \mathbf{r} / \partial \phi$  son las derivadas parciales de  $\mathbf{r}$  con respecto a  $\rho$  y  $\phi$ . La derivada parcial se define por

$$\frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left[ \frac{\mathbf{r}(u + \Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta u} \right].$$

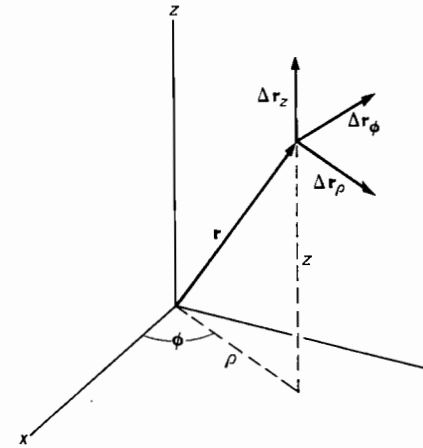


Fig. 2-3. Cambios infinitesimales del vector de posición producidos por cambios infinitesimales en las coordenadas cilíndricas  $\rho$ ,  $\phi$ ,  $z$ .

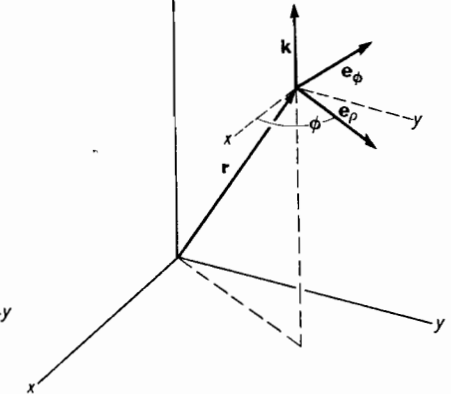


Fig. 2-4. Vectores base unitarios ortogonales,  $\mathbf{e}_\rho$ ,  $\mathbf{e}_\phi$ ,  $\mathbf{k}$ , en un punto en coordenadas  $\rho$ ,  $\phi$ ,  $z$ .

Similarmente, utilizando las ecuaciones (2-12) y (2-13), hallamos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\rho) \mathbf{e}_\rho + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\phi) \mathbf{e}_\phi + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} \\ &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \dot{z} \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (2-18)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\rho) \mathbf{e}_\rho + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\phi) \mathbf{e}_\phi + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi + \ddot{z} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2-19)$$

Las ecuaciones (2-18) y (2-19) se pudieran obtener algo más fácilmente por derivaciones sucesivas de la ecuación (2-17). La primera derivada nos dará la expresión de la velocidad

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \dot{z} \mathbf{k}.$$

Derivando la ecuación (2-14) encontramos

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\phi} (-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}) = \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi. \quad (2-20)$$

Cuando este resultado se sustituye en las ecuaciones anteriores, resulta la ecuación (2-18) para el vector velocidad.

Similarmente, de la ecuación (2-15), hallamos

$$\dot{\mathbf{e}}_\phi = (-\cos \phi \mathbf{i} - \sin \phi \mathbf{j}) \dot{\phi} = -\dot{\phi} \mathbf{e}_\rho, \quad (2-21)$$

relación que necesitaremos para obtener la expresión de la aceleración. Notemos que, como era de esperar,  $\mathbf{e}_\rho \cdot \dot{\mathbf{e}}_\rho = \mathbf{e}_\phi \cdot \dot{\mathbf{e}}_\phi = 0$ , y como expusimos en la sección 1-8, podemos ahora definir un vector de velocidad angular

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{k}, \quad (2-22)$$

en función del cual podemos expresar la razón de variación con respecto al tiempo de los vectores  $\mathbf{e}_\rho$  y  $\mathbf{e}_\phi$  en forma de productos vectoriales

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\rho \quad (2-23)$$

y

$$\dot{\mathbf{e}}_\phi = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\phi. \quad (2-24)$$

La velocidad, en función del vector de velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ , queda expresada por

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\rho + \dot{z}\mathbf{k} \\ &= \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2-25)$$

De una forma semejante obtendremos para el vector de aceleración,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\rho}\mathbf{e}_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \rho\ddot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \rho\dot{\phi}\dot{\mathbf{e}}_\phi + \ddot{z}\mathbf{k} \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (2-26)$$

que coincide con la ecuación (2-19).

► Como ejemplo ilustrativo, repetiremos el problema de la sección anterior, pero ahora determinaremos en coordenadas cilíndricas la velocidad y la aceleración de una partícula que se mueve con velocidad constante en una trayectoria circular. En este sistema, el vector de posición de la partícula,  $\mathbf{r} = A \cos \omega t \mathbf{i} + A \sin \omega t \mathbf{j}$ , estará dado por

$$\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho, \quad (2-27)$$

donde  $\phi$ , ángulo que forma  $\mathbf{e}_\rho$  con el eje  $x$ , varía linealmente con el tiempo,

$$\phi = \omega t,$$

y  $\rho = A$  permanece constante en magnitud.

Entonces, tenemos

$$\mathbf{v} = A\dot{\mathbf{e}}_\rho = A\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \quad (2-28)$$

y

$$\mathbf{a} = A\omega\dot{\mathbf{e}}_\phi = -A\omega^2\mathbf{e}_\rho = -\omega^2\mathbf{r}. \quad (2-29)$$

El lector recordará de un primer curso de mecánica que en una partícula que se mueve sobre una circunferencia,  $\rho\dot{\phi}$  es la magnitud de su velocidad tangencial,  $\rho\dot{\phi}^2$  su aceleración centrípeta y  $\rho\ddot{\phi}$  la magnitud de su aceleración tangencial. Cuando el movimiento de la partícula no es circular, aparecen además otros términos en las expresiones de la velocidad y la aceleración, como se ve en las ecuaciones (2-25) y (2-26). Estos nuevos términos son: la componente radial de la velocidad  $\dot{\rho}$ , la aceleración radial  $\ddot{\rho}$  y un término  $2\dot{\rho}\dot{\phi}$ , que aparece en la componente tangencial de la acelera-

ción y se debe a la rotación del sistema coordenado de vectores base cuando cambia el vector de posición. Se denomina este último término *aceleración de Coriolis*. ◀

### 2-3 Velocidad y aceleración en coordenadas esféricas

Para obtener las expresiones de la velocidad y la aceleración en coordenadas esféricas, seguiremos un camino semejante al empleado para las coordenadas cilíndricas.

Las coordenadas esféricas  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$ , quedan definidas por las ecuaciones

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (2-30)$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right), \quad (2-31)$$

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left( \frac{y}{x} \right); \quad (2-32)$$

o, equivalentemente,

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad (2-33)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi, \quad (2-34)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (2-35)$$

Se ve claramente que  $r$  es la magnitud del vector de posición,  $\theta$  el ángulo formado por el vector de posición con el eje  $z$ , y  $\phi$  el ángulo formado por el eje  $x$  y la proyección del vector de posición en el plano  $xy$  (fig. 2-5).

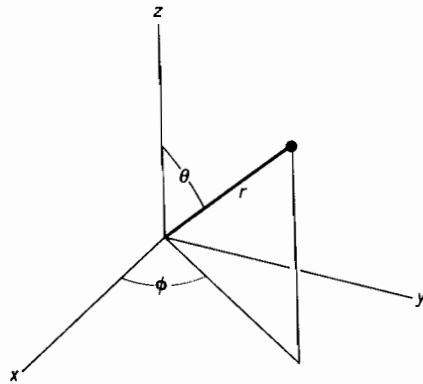
Los vectores unidad que tomaremos como base de las coordenadas esféricas se definen por las ecuaciones

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial r}{|\partial \mathbf{r} / \partial r|}, \quad (2-36)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial \theta}{|\partial \mathbf{r} / \partial \theta|}, \quad (2-37)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial \phi}{|\partial \mathbf{r} / \partial \phi|}, \quad (2-38)$$

y son, respectivamente, los vectores unidad que apuntan en los sentidos en que cambia el vector de posición cuando las coordenadas  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  sufren un cambio infinitesimal (fig. 2-6). Partiendo de

FIG. 2-5. Coordenadas esféricas  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ &= r \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + r \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + r \cos \theta \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (2-39)$$

y utilizando las ecuaciones que definen los vectores unidad base del sistema, encontramos las expresiones

$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}, \quad (2-40)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \phi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}, \quad (2-41)$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j} \quad (2-42)$$

que determinan los vectores base unidad en un punto específico por medio de un conjunto dado de  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$ . Se verifica fácilmente que estos tres vectores son mutuamente ortogonales y definen un sistema de coordenadas a la derecha, o sea de sentido dextrógiro, y que satisfacen las relaciones:

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta. \quad (2-43)$$

Observaremos, por las ecuaciones (2-40), (2-41) y (2-42), que, como en el caso de las coordenadas cilíndricas, los vectores unidad base del sistema de coordenadas esféricas son igualmente funciones de posición que cambian su orientación al variar  $\theta$  y  $\phi$ . Por lo tanto, necesitaremos utilizar también sus derivadas con respecto al tiempo, que son:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= (-\sin \theta \sin \phi \dot{\phi} + \cos \theta \cos \phi \dot{\theta}) \mathbf{i} + (\sin \theta \cos \phi \dot{\phi} + \cos \theta \sin \phi \dot{\theta}) \mathbf{j} - \sin \theta \dot{\theta} \mathbf{k} \\ &= \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi, \end{aligned} \quad (2-44)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_\theta &= (-\cos \theta \sin \phi \dot{\phi} - \sin \theta \cos \phi \dot{\theta}) \mathbf{i} + (\cos \theta \cos \phi \dot{\phi} - \sin \theta \sin \phi \dot{\theta}) \mathbf{j} - \cos \theta \dot{\theta} \mathbf{k} \\ &= -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \cos \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi, \end{aligned} \quad (2-45)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\phi = -\cos \phi \dot{\phi} \mathbf{i} - \sin \phi \dot{\phi} \mathbf{j} = -\sin \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_r - \cos \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\theta. \quad (2-46)$$

El hecho de que los tres vectores unidad base mantengan su ortogonalidad, hace sospechar la existencia de un único vector de velocidad angular  $\omega$ , en función del cual se exprese la derivada o razón de variación con respecto al tiempo de los vectores unidad  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  y  $\mathbf{e}_\phi$ . Los vectores base cambian su orientación al variar los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ . Un cambio en  $\phi$  implica una rotación del vector de posición alrededor del eje  $z$ , mientras que un cambio en  $\theta$  implica la rotación del vector de posición alrededor de la dirección  $\mathbf{e}_\phi$ . Con base en esto, podemos definir el vector de velocidad angular por

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\phi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{e}_\phi \\ &= \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{e}_r - \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\theta + \dot{\theta} \mathbf{e}_\phi \\ &= \dot{\phi} \mathbf{k} - \sin \theta \dot{\phi} \mathbf{i} + \cos \theta \dot{\phi} \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (2-47)$$

en que, para obtener las dos últimas igualdades, hemos utilizado las relaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_\theta) \mathbf{e}_\theta + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_\phi) \mathbf{e}_\phi \\ &= \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

y

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}.$$

Ahora podemos indicar las derivadas con respecto al tiempo de los vectores base en función del vector de velocidad angular  $\omega$ :

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \omega \times \mathbf{e}_r, \quad (2-48)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = \omega \times \mathbf{e}_\theta, \quad (2-49)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\phi = \omega \times \mathbf{e}_\phi. \quad (2-50)$$

Con lo anterior, estamos en condiciones de encontrar la velocidad y la aceleración en coordenadas esféricas. Puesto que  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ , obtendremos la siguiente expresión para la velocidad:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r \\ &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi, \end{aligned} \quad (2-51)$$

y luego, para la aceleración:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= (\dot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\mathbf{e}}_r) + (\dot{r} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\mathbf{e}}_\theta) \\ &\quad + (r \sin \theta \dot{\phi} \dot{\mathbf{e}}_\phi + \dot{r} \sin \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + r \sin \theta \ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi) \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + (r \sin \theta \ddot{\phi} + 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi. \end{aligned} \quad (2-52)$$

## 2-4 Vectores base para coordenadas generalizadas

Las coordenadas cilíndricas y esféricas no son sino casos particulares de las coordenadas generalizadas,  $q_1, q_2, q_3$ , en función de las cuales se puede analizar el movimiento de una partícula. Por ejemplo, en el sistema de coordenadas esféricas tenemos

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad \text{y} \quad q_3 = \phi.$$

Los pasos seguidos para obtener las expresiones de la velocidad y la aceleración en coordenadas cilíndricas o esféricas son, en general, aplicables a cualquier conjunto de coordenadas. Así, si

$$x = x(q_1, q_2, q_3) \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3) \quad (2-53)$$

son las ecuaciones que relacionan las coordenadas cartesianas con las generalizadas,  $q_1, q_2, q_3$ , el radio vector podrá expresarse por

$$\mathbf{r} = x(q_1, q_2, q_3)\mathbf{i} + y(q_1, q_2, q_3)\mathbf{j} + z(q_1, q_2, q_3)\mathbf{k}. \quad (2-54)$$

Definiremos los vectores base de las coordenadas generalizadas en una forma semejante a la de las ecuaciones (2-14) y (2-15) para las coordenadas cilíndricas y de las ecuaciones correspondientes para las coordenadas esféricas. Sin embargo, estos vectores base no serán normalizados para que sean vectores unidad.

Los vectores base de las coordenadas generalizadas,  $q_1, q_2, q_3$  y se definen por

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = h_1 \mathbf{e}_1, \quad h_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right|, \quad (2-55)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = h_2 \mathbf{e}_2, \quad h_2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \right|, \quad (2-56)$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} = h_3 \mathbf{e}_3, \quad h_3 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \right|. \quad (2-57)$$

Notemos que estos vectores base,  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  y  $\mathbf{b}_3$ , no son vectores unidad. La razón para escogerlos en lugar de los vectores unidad definidos por

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial q_i}{\left| \partial \mathbf{r} / \partial q_i \right|}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2-58)$$

se hará evidente en el transcurso del libro. En general, obtendremos resultados más concisamente expresables usando los vectores base  $\mathbf{b}_i$ . Cuando esto no suceda, preferiremos usar los vectores unidad  $\mathbf{e}_i$ , que tienen otras ventajas.

Los vectores base que acabamos de definir se especifican, en función de sus componentes cartesianas, por

$$\mathbf{b}_i = \frac{\partial x}{\partial q_i} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \mathbf{k}. \quad (2-59)$$

y sus magnitudes son

$$h_i = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}. \quad (2-60)$$

Por ejemplo, en el sistema de coordenadas esféricas, tenemos

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{b}_2 = r \mathbf{e}_\theta \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_3 = r \sin \theta \mathbf{e}_\phi.$$

Es decir, los vectores base tienen las magnitudes

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r \quad \text{y} \quad h_3 = r \sin \theta.$$

El vector  $\mathbf{b}_i$  tiene el mismo sentido que el cambio en el vector de posición producido por un incremento infinitesimal de la coordenada generalizada  $q_i$ , como se deduce de la ecuación:

$$\Delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \Delta q_i.$$

Generalmente, los vectores  $\mathbf{b}_i$  definidos por la ecuación (2-59) no son perpendiculares entre sí. Por nuestro estudio de los vectores base no ortogonales nos damos cuenta de que esto es absolutamente correcto siempre que los vectores base no sean coplanares. La condición para que no sean coplanares es que su triple producto escalar no se anule. O sea:

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2-61)$$

El determinante anterior es el *jacobiano* de las coordenadas cartesianas  $x, y, z$  con respecto a las coordenadas generalizadas  $q_1, q_2, q_3$ . El determinante jacobiano se suele indicar por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix}. \quad (2-62)$$



Por tanto, la ecuación (2-61) quedará expresada por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \neq 0.$$

Esta es, también, la condición necesaria y suficiente para que de las ecuaciones (2-53) se puedan hallar las coordenadas generalizadas,  $q_i$ , expresadas como funciones de las coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  y  $z$ ; en otras palabras, habrá una correspondencia biunívoca entre los valores de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y los de  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ .

Como se indicó en la sección 1-5, siempre que se trate con un conjunto de vectores base no ortogonales o no normalizados, habrá también un conjunto de vectores base recíprocos que será necesario tomar en cuenta. Cuando los vectores base  $\mathbf{b}_i$  sean ortogonales, es decir, cuando empleamos un sistema de coordenadas generalizadas curvilíneas ortogonales, la obtención del sistema recíproco es inmediata. Por la ecuación (1-36), que define los vectores base recíprocos, sabemos que éstos, en un sistema ortogonal, son paralelos a los vectores base, y, en consecuencia, de la ecuación (1-37) deducimos que, si para un conjunto ortogonal de vectores base se tiene:

$$\mathbf{b}_i = h_i \mathbf{e}_i, \quad (2-63)$$

donde los  $\mathbf{e}_i$  son vectores unidad, los vectores recíprocos serán

$$\mathbf{b}_i = \frac{1}{h_i} \mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i^2} \mathbf{b}_i. \quad (2-64)$$

Cuando los vectores base no son ortogonales, la situación es algo más compleja. Sin embargo, veremos que nunca podremos evitar el empleo de las ecuaciones (1-36) que definen los vectores base recíprocos. Las ecuaciones (1-36) son las soluciones de las (1-37). Es evidente que éstas soluciones son únicas y que, por lo tanto, cualquier conjunto de vectores cuyos productos escalares por  $\mathbf{b}_i$  satisfagan las ecuaciones (1-37) serán, necesariamente, los vectores recíprocos.

Ahora bien, las coordenadas generalizadas  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  son coordenadas independientes, de donde

$$\frac{\partial q_1}{\partial q_1} = \frac{\partial q_2}{\partial q_2} = \frac{\partial q_3}{\partial q_3} = 1$$

y

$$\frac{\partial q_1}{\partial q_2} = \frac{\partial q_1}{\partial q_3} = \frac{\partial q_2}{\partial q_1} = \frac{\partial q_2}{\partial q_3} = \frac{\partial q_3}{\partial q_1} = \frac{\partial q_3}{\partial q_2} = 0,$$

o sea,

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases} \quad (2-65)$$

Pero considerando que las  $q_i$  son funciones de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y que, a su vez, éstas son funciones de las  $q_j$ , resulta que

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial q_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial q_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial q_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_j} = \delta_{ij}. \quad (2-66)$$

Comparando las ecuaciones (2-66) con las (1-38), encontramos que los vectores recíprocos vendrán dados por

$$\mathbf{b}_i = \frac{\partial q_i}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial q_i}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial q_i}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (2-67)$$

El segundo miembro de esta ecuación se denomina *gradiente* de  $q_i$ , y se designa por  $\nabla q_i$ , o sea,

$$\text{grad } q_i = \nabla q_i.$$

En la sección 2-6 llegaremos al mismo resultado

$$\mathbf{b}_i = \nabla q_i \quad (2-68)$$

basándonos en consideraciones geométricas de carácter más fundamental.

► Como ejemplo ilustrativo, consideremos las coordenadas parabólicas definidas por las ecuaciones

$$x = \eta\xi \cos \phi, \quad y = \eta\xi \sin \phi \quad y \quad z = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2),$$

o

$$\xi^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z, \quad \eta^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z \quad y \quad \phi = \text{tg}^{-1} \frac{y}{x}.$$

Utilizando la ecuación (2-59), determinamos los vectores base

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = \eta \cos \phi \mathbf{i} + \eta \sin \phi \mathbf{j} + \xi \mathbf{k},$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} = \xi \cos \phi \mathbf{i} + \xi \sin \phi \mathbf{j} - \eta \mathbf{k},$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\eta\xi \sin \phi \mathbf{i} + \eta\xi \cos \phi \mathbf{j}.$$

Estos vectores son mutuamente ortogonales y tienen las magnitudes  $h_1 = h_2 = \sqrt{\eta^2 + \xi^2}$  y  $h_3 = \eta\xi$ . La ecuación (2-64) nos da los vectores base recíprocos

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\eta \cos \phi}{\eta^2 + \xi^2} \mathbf{i} + \frac{\eta \sin \phi}{\eta^2 + \xi^2} \mathbf{j} + \frac{\xi}{\eta^2 + \xi^2} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\xi \cos \phi}{\eta^2 + \xi^2} \mathbf{i} + \frac{\xi \sin \phi}{\eta^2 + \xi^2} \mathbf{j} - \frac{\eta}{\eta^2 + \xi^2} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{b}_3 = -\frac{\sin \phi}{\eta\xi} \mathbf{i} + \frac{\cos \phi}{\eta\xi} \mathbf{j}.$$

Estos mismos resultados se pueden obtener con la ecuación (2-67). Por ejemplo, para

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \mathbf{k},$$

llegamos a la misma solución, ya que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{1}{2\xi} \frac{\partial \xi^2}{\partial x} = \frac{x}{2\xi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\eta \cos \phi}{\xi^2 + \eta^2}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{1}{2\xi} \frac{\partial \xi^2}{\partial y} = \frac{y}{2\xi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\eta \operatorname{sen} \phi}{\xi^2 + \eta^2}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} &= \frac{1}{2\xi} \frac{\partial \xi^2}{\partial z} = \frac{z}{2\xi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 1 = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}. \end{aligned}$$

## 2-5 Velocidad y aceleración en coordenadas generalizadas

La velocidad de una partícula se puede expresar en función de sus vectores base,  $\mathbf{b}_i$ , y de sus recíprocos  $\mathbf{b}_i^*$ , bien por:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i) \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^3 v_i^* \mathbf{b}_i \quad (2-69)$$

o bien por

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i^*) \mathbf{b}_i^* = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{b}_i, \quad (2-70)$$

donde

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i \quad \text{y} \quad v_i^* = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i^*.$$

En función de las expresiones de los vectores  $\mathbf{b}_i$ , obtenemos las de  $v_i$ , llamadas componentes *covariantes* de la velocidad, por la fórmula

$$v_i = \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \dot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i}. \quad (2-71)$$

Conociendo la dependencia funcional de las coordenadas cartesianas con respecto a las generalizadas, podemos expresar fácilmente las componentes cartesianas de la velocidad (que aparecen en esta última ecuación) en función de las coordenadas generalizadas y sus derivadas con respecto al tiempo. Tendremos

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad \dot{y} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial y}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad \dot{z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (2-72)$$

Obsérvese que en estas ecuaciones  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  y  $\dot{z}$  son funciones explícitas de las coordenadas generalizadas y sus derivadas con respecto al tiempo. Luego, de ellas, obtenemos los resultados

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial y}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial z}{\partial q_i}. \quad (2-73)$$

Y, sustituyendo las derivadas parciales de la ecuación (2-71) por sus equivalentes dadas por la ecuación (2-73), hallaremos que (2-71) queda expresado muy concisamente por

$$v_i = \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \dot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} v^2 \right), \quad (2-74)$$

donde  $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ . La ecuación (2-74) nos indica que las componentes covariantes de la velocidad son iguales a las derivadas parciales, con respecto a las  $\dot{q}_i$ , de la mitad del cuadrado de la velocidad. Antes de derivar, tendremos que expresar  $\frac{1}{2} v^2$  en función de las coordenadas generalizadas,  $q_i$ , y de sus derivadas respecto al tiempo  $\dot{q}_i$ .

► Por ejemplo, consideremos las coordenadas esféricas con las que

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\phi}^2),$$

y para las que, con la ecuación (2-74) obtendremos las siguientes componentes covariantes de la velocidad:

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \dot{r}, \quad v_2 = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = r^2 \dot{\theta}, \quad v_3 = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\phi}. \blacktriangleleft$$

A la  $v_i^*$  se llaman *componentes contravariantes de la velocidad*. Empleando la ecuación (2-67) se llega al resultado

$$v_i^* = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i^* = \frac{\partial q_i}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial q_i}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial q_i}{\partial z} \dot{z} = \dot{q}_i. \quad (2-75)$$

Las componentes contravariantes de la velocidad se llaman también *velocidades generalizadas*. Por otra parte, en contraposición a lo anterior, llamaremos cantidades de movimiento generalizadas de la partícula (ver sección 5-2) a los productos de las componentes covariantes de la velocidad multiplicadas por la masa de la partícula (Sección 4-2),

$$p_i = m v_i.$$

Análogamente, hallaremos la aceleración, la cual, sin embargo, sólo requerirá su expresión por

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_i) \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{b}_i, \quad (2-76)$$

donde las *componentes covariantes de la aceleración* quedan expresadas por

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_i = \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i}.$$

El producto escalar de  $\mathbf{a}$  por el vector base  $\mathbf{b}_i$ , indicado en la última ecuación, se puede poner en una forma mucho más útil con ayuda de la ecuación (2-73).

Por ejemplo, poniendo

$$\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} \right) \left( - \dot{x} \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} \right) - \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} \right),$$

y sabiendo que

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i},$$

obtenemos

$$\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right). \quad (2-77)$$

Con expresiones semejantes de  $\ddot{y}(\partial y/\partial q_i)$  y  $\ddot{z}(\partial z/\partial q_i)$  podemos establecer

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{1}{2} v^2 \right). \end{aligned} \quad (2-78)$$

► Como una ilustración del empleo de la ecuación (2-78), obtendremos, una vez más, las componentes de la aceleración en coordenadas cilíndricas. De la ecuación (2-12) o (2-18) se tiene

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2,$$

y, en consecuencia,

$$a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\rho = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\rho}} \left( \frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}{2} \right)$$

$$= \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2,$$

$$a_2 = \mathbf{a} \cdot (\rho \mathbf{e}_\phi) = \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\phi}) = \rho^2 \ddot{\phi} + 2\rho \dot{\rho} \dot{\phi},$$

$$a_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = \frac{d}{dt} \dot{z} = \ddot{z},$$

que concuerda con los resultados hallados antes para

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\rho = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{\rho} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_2, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_3. \quad \blacktriangleleft$$

El contenido de las dos últimas secciones es de tal importancia que haremos un resumen de los pasos seguidos para hallar los vectores base, la velocidad y la aceleración de una partícula en coordenadas generalizadas.

Dadas las relaciones entre las coordenadas cartesianas y las generalizadas, los vectores base se obtienen empleando las ecuaciones (2-59):

$$\mathbf{b}_i = \frac{\partial x}{\partial q_i} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \mathbf{k},$$

y, para transformaciones independientes del tiempo, los vectores base recíprocos se hallan, con la ecuación (2-67), que son

$$\mathbf{b}_i = \frac{\partial q_i}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial q_i}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial q_i}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Las velocidades contravariantes, que emplearemos en transformaciones independientes del tiempo, serán, simplemente las  $\dot{q}_i$ , es decir,

$$v_i^* = \dot{q}_i,$$

y las componentes covariantes de la velocidad serán

$$v_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} v^2 \right),$$

donde  $v^2$  deberá expresarse en función de las coordenadas generalizadas,  $q_i$ , y las velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$ . Esta relación de dependencia se halla con

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2.$$

Cuando se trata con coordenadas curvilíneas ortogonales,  $v^2$  se halla también de una manera sencilla partiendo del hecho de que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i h_i \mathbf{e}_i. \quad (2-79)$$

Esto es,

$$v^2 = \sum_{i=1}^3 h_i^2 (\dot{q}_i)^2. \quad (2-80)$$

Las componentes covariantes de la aceleración se obtienen por la relación

$$a_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{1}{2} v^2 \right).$$

2-6 Geometría diferencial de las coordenadas curvilíneas

Sea  $\phi(x, y, z)$  una función continua con valores únicos (univalente), que tiene derivadas parciales continuas. Entonces, la ecuación

$$\phi(x, y, z) = \text{const} \tag{2-81}$$

nos define una superficie en el espacio tridimensional. Similarmente, las tres ecuaciones

$$q_1(x, y, z) = c_1, \quad q_2(z, x, y) = c_2, \quad q_3(x, y, z) = c_3 \tag{2-82}$$

en las que  $q_i$  son las coordenadas generalizadas, definen tres superficies que pasan por el punto cuyas coordenadas cartesianas son

$$\begin{aligned} x_0 &= x(q_1 = c_1, q_2 = c_2, q_3 = c_3), \\ y_0 &= y(c_1, c_2, c_3), \\ z_0 &= z(c_1, c_2, c_3). \end{aligned} \tag{2-83}$$

La intersección de las superficies  $q_1$  y  $q_2$ ,

$$q_1(x, y, z) = c_1, \quad q_2(x, y, z) = c_2,$$

nos define una curva a lo largo de la cual varía  $q_3$ . Llamaremos a ésta, *curva*  $q_3$ . Igualmente, existirán otras dos curvas, la  $q_1$  que es intersección de las superficies  $q_2$  y  $q_3$ , y la  $q_2$ , intersección de las superficies  $q_1$  y  $q_3$  (fig. 2-7).

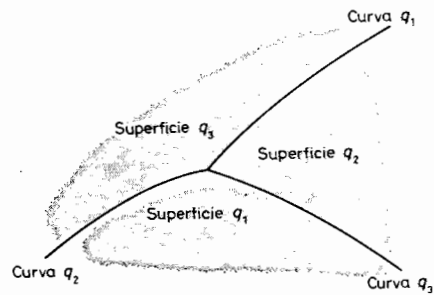


FIG. 2-7. Curvas y superficies coordenadas.

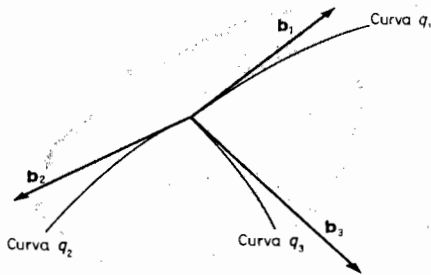


FIG. 2-8. Vectores base generalizados.

El vector base de coordenadas  $\mathbf{b}_i$ , definido por la ecuación (2-59), está orientado en el mismo sentido en que cambia el vector de posición cuando  $q_i$  sufre un cambio infinitesimal creciente. Luego, como la punta del vector de posición permanece en la curva  $q_i$  cuando  $q_i$  varía, el vector  $\mathbf{b}_i$  será *tangente* en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  a la curva  $q_i$  (fig. 2-8).

Se puede demostrar que los vectores  $\mathbf{b}_i$  recíprocos de los vectores base  $\mathbf{b}_i$ , son normales a las superficies  $q_i$  (fig. 2-9). Por ejemplo, sabemos que el vector

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3} \tag{2-84}$$

es perpendicular a los vectores  $\mathbf{b}_2$  y  $\mathbf{b}_3$ . Pero estos últimos son tangentes a la superficie  $q_1$ , puesto que, siendo  $\mathbf{b}_2$  tangente a la curva  $q_2$ , que es la intersección de las superficies  $q_1$  y  $q_3$ , será tangente a estas dos superficies; y, similarmente, el vector  $\mathbf{b}_3$  será tangente a las superficies  $q_1$  y  $q_2$ . Ahora bien,  $\mathbf{b}_1$  es un vector perpendicular al plano de los vectores  $\mathbf{b}_2$  y  $\mathbf{b}_3$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ . Pero este plano, al igual que los vectores que lo determinan, es tangente a la superficie  $q_1$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ . Entonces, el vector  $\mathbf{b}_1$  será normal a la superficie  $q_1$ .

Ahora podemos relacionar directamente con la normal a la superficie  $q_1$  al vector  $\mathbf{b}_1$ , definido por la ecuación (2-84). Para hallar esta normal, consideraremos el cambio de  $q_1$ , cuando  $x, y,$  y  $z$  varían en las cantidades infinitesimales  $\Delta x, \Delta y$  y  $\Delta z$ . El incremento infinitesimal que resulta entonces para  $q_1$  es

$$\Delta q_1 = \frac{\partial q_1}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial q_1}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial q_1}{\partial z} \Delta z, \tag{2-85}$$

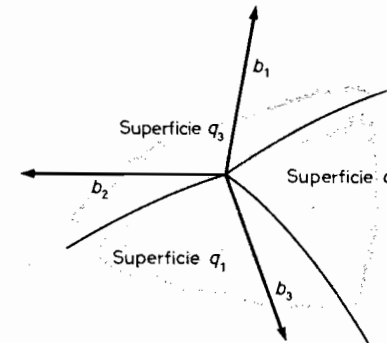


FIG. 2-9. Vectores base generalizados inversos o recíprocos.

que se puede considerar como el producto escalar del vector

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k} \tag{2-86}$$

y el vector

$$\nabla q_1 = \frac{\partial q_1}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial q_1}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial q_1}{\partial z} \mathbf{k}. \tag{2-87}$$

Esto es,

$$\Delta q_1 = \Delta \mathbf{r} \cdot \nabla q_1. \tag{2-88}$$

El gradiente  $\nabla q_1$  de  $q_1$  se definió ya anteriormente. El operador "del", en coordenadas cartesianas se define por

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2-89)$$

Si escogemos el nuevo punto  $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$  de tal forma que esté en la superficie  $q_1(x, y, z) = c_1$ , esto es, si

$$q_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = c_1,$$

entonces, obviamente

$$\Delta q_1 = 0.$$

De donde deducimos que, en el límite cuando  $|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow 0$  a lo largo de alguna curva de la superficie  $q_1$ , o cuando  $\Delta \mathbf{r}/|\Delta \mathbf{r}|$  se aproxima al vector tangente unidad a una curva de la superficie  $q_1$ :

$$\frac{\Delta q_1}{|\Delta \mathbf{r}|} \rightarrow \mathbf{e}_t \cdot \nabla q_1,$$

donde  $\mathbf{e}_t$  es dicho vector unidad. Luego, para todos los puntos de la superficie

$$\frac{\Delta q_1}{|\Delta \mathbf{r}|} = 0,$$

encontramos

$$\mathbf{e}_t \cdot \nabla q_1 = 0.$$

En consecuencia,  $\nabla q_1$  es normal a la superficie  $q_1$ .

También se ha demostrado que los vectores recíprocos se pueden expresar por

$$\mathbf{b}_i = \nabla q_i$$

cuando se trate de transformaciones de coordenadas independientes del tiempo.

Concluiremos esta exposición de las coordenadas curvilíneas determinando algunas expresiones de uso corriente en sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales.

a) *Longitud del arco.* La longitud del arco,  $\Delta s$ , está definida por

$$\Delta s = |\Delta \mathbf{r}| = |\Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k}|.$$

En un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales tenemos,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= \Delta q_1 \mathbf{b}_1 + \Delta q_2 \mathbf{b}_2 + \Delta q_3 \mathbf{b}_3 \\ &= h_1 \Delta q_1 \mathbf{e}_1 + h_2 \Delta q_2 \mathbf{e}_2 + h_3 \Delta q_3 \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (2-90)$$

de donde

$$(\Delta \mathbf{r})^2 = (h_1 \Delta q_1)^2 + (h_2 \Delta q_2)^2 + (h_3 \Delta q_3)^2$$

o sea,

$$(\Delta s)^2 = \sum_{i=1}^3 h_i^2 (\Delta q_i)^2 \quad (2-91)$$

donde  $h_1, h_2, h_3$  son los factores de escala.

b) *Area infinitesimal de una superficie.* En general, el área del paralelogramo definido por dos vectores  $d\mathbf{s}_1$  y  $d\mathbf{s}_2$ , está dada por

$$\text{Area} = |d\mathbf{s}_1 \times d\mathbf{s}_2|.$$

En muchas aplicaciones nos interesa, particularmente, un área infinitesimal de una de las superficies coordenadas, por ejemplo, la superficie  $q_k$ , definida por las longitudes de arco  $\Delta s_i, \Delta s_j$ , tomadas a lo largo de las tangentes a las curvas  $q_i$  y  $q_j$ , donde  $i \neq j \neq k$  (fig. 2-10). Los vectores  $\Delta \mathbf{s}_i$  y  $\Delta \mathbf{s}_j$  son, respectivamente, los cambios  $\Delta q_i \mathbf{b}_i$  y  $\Delta q_j \mathbf{b}_j$  del vector de posición. El área del paralelogramo formado por estos vectores será

$$|\Delta \mathbf{S}_k| = |\Delta q_i \mathbf{b}_i \times \Delta q_j \mathbf{b}_j| = h_i h_j \Delta q_i \Delta q_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j \neq k. \quad (2-92)$$

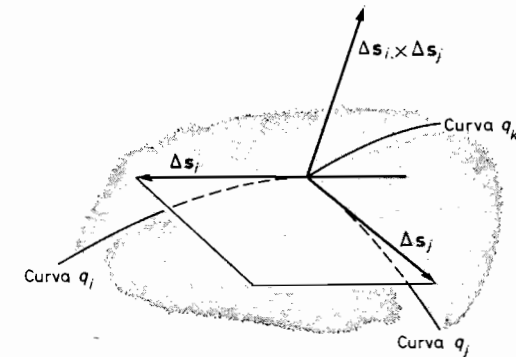


FIG. 2-10. Área de una superficie infinitesimal.

c) *Volumen infinitesimal.* En muchas ocasiones se puede simplificar la integración de un volumen escogiendo un sistema de coordenadas apropiado. En un sistema de coordenadas curvilíneas, el elemento infinitesimal de volumen está dado por el triple producto escalar de los vectores  $\Delta \mathbf{s}_i$ . Es decir,

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta q_1 \mathbf{b}_1 \cdot \Delta q_2 \mathbf{b}_2 \times \Delta q_3 \mathbf{b}_3 \\ &= \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)}. \end{aligned} \quad (2-93)$$

Que en un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales, se reduce a

$$\Delta V = h_1 h_2 h_3 \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3. \quad (2-94)$$

Por ejemplo, el elemento infinitesimal de volumen en coordenadas esféricas es

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

d) *Gradiente en coordenadas curvilíneas ortogonales.* El gradiente de una función escalar en coordenadas cartesianas se definió por la ecuación (2-87). Si usamos coordenadas curvilíneas ortogonales, se deberá expresar en función de los vectores unidad base  $\mathbf{e}_i$ . Esto es,

$$\nabla \phi = (\mathbf{e}_1 \cdot \nabla \phi) \mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_2 \cdot \nabla \phi) \mathbf{e}_2 + (\mathbf{e}_3 \cdot \nabla \phi) \mathbf{e}_3.$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \nabla \phi &= \frac{1}{h_i} \mathbf{b}_i \cdot \nabla \phi \\ &= \frac{1}{h_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

tendremos, en coordenadas curvilíneas ortogonales,

$$\nabla \phi = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \mathbf{e}_i. \quad (2-95)$$

Por ejemplo, en coordenadas esféricas, el gradiente de la función escalar  $\Psi$  está dado por

$$\nabla \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi.$$

## 2-7 Movimiento sobre una curva determinada

El movimiento de una partícula sobre una curva determinada es un caso especial de lo que llamaremos movimiento restringido, del cual hablaremos más adelante. Por el momento, nos limitaremos a analizar el movimiento sobre una curva en función del parámetro  $s$ , que definiremos por la distancia tomada a lo largo de la curva, desde un punto de la misma escogido como origen, hasta el punto en que se encuentra la partícula en un momento dado. En forma paramétrica, una curva queda determinada por las tres ecuaciones

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad \text{y} \quad z = z(s),$$

o sea,

$$\mathbf{r}(s) = x(s) \mathbf{i} + y(s) \mathbf{j} + z(s) \mathbf{k}. \quad (2-96)$$

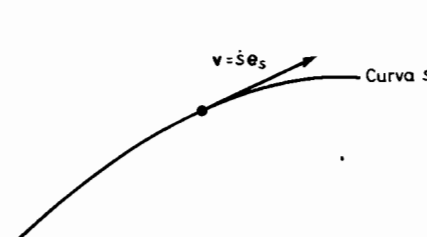
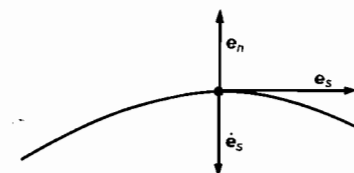


FIG. 2-11. Movimiento sobre una curva determinada.



$\mathbf{e}_n \equiv$  Normal principal a la curva

FIG. 2-12. Vector unidad tangente y vector unidad normal principal de una curva en el espacio (no plana).

Por lo que, la velocidad, en función de  $s$  y su derivada respecto al tiempo, será

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \dot{s} = \dot{s} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial s} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial s} \mathbf{k} \right). \quad (2-97)$$

El vector

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial s} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial s} \mathbf{k} = \mathbf{e}_s$$

es el vector unidad tangente a la curva en el punto  $[x(s), y(s), z(s)]$  (fig. 2-11), y está orientado en el sentido en que crece  $s$ . Se deduce que  $\mathbf{e}_s$  es un vector unidad de

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

Derivando la velocidad expresada en la forma  $\mathbf{v} = \dot{s} \mathbf{e}_s$ , encontramos la aceleración

$$\mathbf{a} = \ddot{s} \mathbf{e}_s + \dot{s} \dot{\mathbf{e}}_s. \quad (2-98)$$

Como  $\mathbf{e}_s$  es un vector unidad que indica la dirección y sentido de  $\mathbf{v}$ , se deduce, de nuestra explicación en la sección 1-8, que  $\dot{\mathbf{e}}_s$  es un vector perpendicular a  $\mathbf{e}_s$ . Eligiendo  $\mathbf{e}_n$  como vector unidad en la dirección y sentido de  $-\dot{\mathbf{e}}_s$  (fig. 2-12), podremos establecer:

$$\dot{\mathbf{e}}_s = -\frac{\dot{s}}{\rho} \mathbf{e}_n, \quad (2-99)$$

donde  $\rho$ , todavía indeterminado, se verá que es el radio de curvatura de la curva en el punto  $[x(s), y(s), z(s)]$ . Con esta expresión de  $\dot{\mathbf{e}}_s$ , la aceleración de la partícula está dada por

$$\mathbf{a} = \ddot{s} \mathbf{e}_s - \frac{\dot{s}^2}{\rho} \mathbf{e}_n. \quad (2-100)$$

que nos indica que la aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de una curva determinada se puede descomponer en una componente tangencial a la curva,  $\dot{s}$ , y una componente normal,  $-\dot{s}^2/\rho$  (fig. 2-13).

Para aclarar el significado de  $\rho$ , consideremos el movimiento de la partícula en el instante  $t$ , cuando está situada en el punto  $P$  especificado por  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , y con una velocidad  $\mathbf{v}(t)$  y una aceleración  $\mathbf{a}(t)$ . La posición del punto  $Q$  en que la partícula se sitúa un tiempo  $\Delta t$  después, se puede representar, aproximadamente, por el punto  $P'$ , determinado por

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t) \Delta t, \quad (2-101)$$

y la velocidad de la partícula en  $Q$  será, aproximadamente,

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}(t) \Delta t. \quad (2-102)$$

Los puntos  $P$  y  $P'$  y el vector dado por la ecuación (2-102), se encuentran en el plano de los vectores  $\mathbf{v}(t)$  y  $\mathbf{a}(t)$ . La figura 2-14 muestra los puntos  $P$  y  $P'$ , y la trayectoria real seguida por la partícula, así como el punto  $Q$  indica la posición real de la partícula en el tiempo  $t + \Delta t$ .

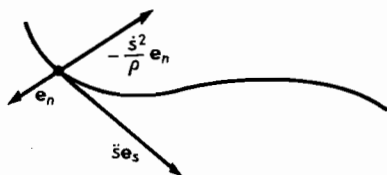


FIG. 2-13. Componentes tangencial y normal de la aceleración.

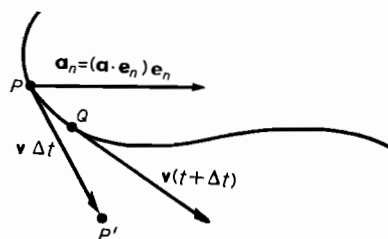


FIG. 2-14. Movimiento aproximado en el plano osculador.

En el plano de  $Q$  y el vector de velocidad  $\mathbf{v}(t)$ , podemos trazar una circunferencia que pase por  $Q$  y sea tangente al vector  $\mathbf{v}(t)$  en el punto  $P$ , la cual en el límite, cuando se haga que  $\Delta t$  tienda a cero, será una circunferencia límite. A su vez, los puntos  $Q$  y  $P'$  se irán aproximando a medida que  $\Delta t$  se vaya acercando a cero. También la velocidad real en el tiempo  $t + \Delta t$  se aproximará al valor dado por la ecuación (2-102), que es un vector que está en el plano de  $\mathbf{v}(t)$  y  $\mathbf{a}(t)$ . Se deduce, por tanto, que la circunferencia límite estará en el plano de  $\mathbf{v}(t)$  y  $\mathbf{a}(t)$ .

El plano de  $\mathbf{v}(t)$  y  $\mathbf{a}(t)$  se conoce como *plano osculador*, y el radio de la circunferencia límite, como *radio de curvatura* de la curva en el punto  $P$ .

Para comprobar que  $\rho$ , que se introdujo antes, es el radio de la circunferencia límite u osculatriz, tomaremos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el centro del círculo osculador. Por tanto, el origen se encuentra en la normal principal a la curva, que es la normal a la curva

en el plano osculador. Si empleamos coordenadas cilíndricas, haciendo que el eje  $z$  sea perpendicular al plano osculador,  $P$  quedará determinado por

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho, \quad (2-103)$$

donde  $\rho$  representa el radio del círculo osculador o límite (fig. 2-15) y

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_n.$$

La velocidad, que es tangente a la curva, está evidentemente en el plano osculador, y siendo tangente a la circunferencia osculatriz, se expresa por

$$\mathbf{v} = \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi = \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi = \dot{s} \mathbf{e}_s, \quad (2-104)$$

donde  $\rho \dot{\phi} = \dot{s}$  y

$$\mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_s. \quad (2-105)$$

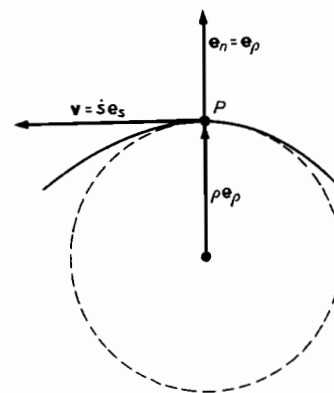


FIG. 2-15. Movimiento instantáneo en el plano osculador.

Similarmente, como la aceleración sólo tiene componentes a lo largo de  $\mathbf{e}_s$  y  $\mathbf{e}_n$ , tendremos

$$\mathbf{a} = \ddot{s} \mathbf{e}_s + \dot{s} \dot{\mathbf{e}}_s = \ddot{s} \mathbf{e}_s - \dot{s} \dot{\phi} \mathbf{e}_\rho = \ddot{s} \mathbf{e}_s - \frac{\dot{s}^2}{\rho} \mathbf{e}_n. \quad (2-106)$$

La selección del radio del círculo osculador o límite como la distancia del punto  $P$  al origen del sistema de coordenadas, tomada a lo largo de la normal principal a la curva, nos dará la seguridad de que  $\rho$  se anule. Podemos, entonces, tomar la ecuación (2-100) como la expresión de la aceleración de una partícula que, en un momento dado, se mueve sobre una circunferencia de radio  $\rho$ .

## Problemas

2-1. Encontrar las componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración de la partícula cuyo vector de posición está dado por

$$a) \mathbf{r} = A \cos n\omega t \mathbf{i} + B \sin m\omega t \mathbf{j}, \quad n, m \text{ enteros}$$

$$b) \mathbf{r} = 3t \mathbf{i} - 4t \mathbf{j} + (t^2 + 3) \mathbf{k}$$

$$c) \mathbf{r} = a(t - \sin \omega t) \mathbf{i} + a(1 - \cos \omega t) \mathbf{j}$$

$$d) \mathbf{r} = (a_1 + b_1 t + c_1 t^2) \mathbf{i} + (a_2 + d_2 e^{-kt}) \mathbf{j}$$

2-2. Obtener las expresiones de las componentes polares de la velocidad y la aceleración de las partículas cuyo vector bidimensional de posición sea:

$$a) \mathbf{r} = \frac{5}{2 - \cos \phi}, \quad \phi = \omega t$$

$$b) \mathbf{r} = A \cos \omega_1 t, \quad \phi = \omega_2 t$$

$$c) \mathbf{r} = a/t, \quad \phi = bt$$

2-3. Hállense la velocidad y la aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de una hélice circular definida por las coordenadas cilíndricas:

$$\rho = a, \quad \phi = bt \quad \text{y} \quad z = -ct.$$

2-4. Hallar las componentes esféricas de la velocidad y la aceleración de la partícula cuyo vector de posición se especifica por

$$\mathbf{r} = b, \quad \theta = \theta_0 \cos \omega t \quad \text{y} \quad \phi = \omega t.$$

2-5. Hállense los vectores base  $\mathbf{b}_i$  y sus recíprocos  $b_i$ , para las coordenadas cilíndricas elípticas definidas por

$$x = \frac{1}{2} a \cosh q_1 \cos q_2,$$

$$y = \frac{1}{2} a \sinh q_1 \sin q_2,$$

$$z = z$$

o

y

$$\frac{1}{2} a (\cosh q_1 + \cos q_2) = \sqrt{(x + \frac{1}{2} a)^2 + y^2}$$

$$\frac{1}{2} a (\cosh q_1 - \cos q_2) = \sqrt{(x - \frac{1}{2} a)^2 + y^2}.$$

2-6. Determinar las componentes covariantes de la velocidad y la aceleración en: a) coordenadas parabólicas, y b) coordenadas cilíndricas elípticas.

2-7. Si el cuadrado de la velocidad de una partícula se expresa en función de las coordenadas generalizadas,  $q_1 = x$ ,  $q_2 = \phi$ , por

$$v^2 = ax^2 + bx\dot{x}\dot{\phi} \sin \phi + cx^2\dot{\phi}^2,$$

obténense las componentes covariantes generalizadas de la velocidad y la aceleración de la partícula.

2-8. Repítase el problema 2-7 para  $q_1 = \theta$ ,  $q_2 = \phi$ , dado que

$$v^2 = a\theta^2 + b\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + c\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + d\dot{\theta}\dot{\phi}.$$

2-9. Utilizando la ecuación (2-78), hállense las expresiones de la aceleración de una partícula en coordenadas esféricas.

2-10. Determinar el gradiente de la función escalar  $\Psi$  en: a) coordenadas cilíndricas, b) coordenadas esféricas, c) coordenadas parabólicas y d) coordenadas elípticas.

2-11. Expresar el radio de curvatura de una curva plana en: a) coordenadas rectangulares y b) coordenadas polares.

2-12. Obtener las componentes tangencial y normal de las velocidades y las aceleraciones de las partículas de los problemas 2-1 b) y c).

2-13. Determinar el radio de curvatura de las curvas de los problemas 2-1 b) y c) para el punto en que está situada la partícula en el instante  $t$ .

2-14. En el punto (2, 1, 1), hallar el vector unidad normal a la superficie

$$\phi(x, y, z) = x^2 + 2xy - y^2 + yz + z^2 = 9$$

2-15. En el punto (2, 1, 1), obtener el vector unidad tangente a la intersección de la superficie del problema 2-14 y la superficie:

$$\phi_2(x, y, z) = 3x^2 - xy + y^2 = 11$$

2-16. Una partícula se mueve a lo largo de la intersección de las dos superficies indicadas en los problemas 2-14 y 2-15 con la velocidad constante  $v_0$ . Hallar las componentes cartesianas de su velocidad y su aceleración en el punto (2, 1, 1).

2-17. a) Demostrar que:

$$\frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial q_i}$$

y

$$\mathbf{b}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_i) - \mathbf{b}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_j} (g_{ki}) - \mathbf{b}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{b}_k}{\partial q_j},$$

donde  $g_{kj} = \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_j$ . Continuando este procedimiento, demuéstrese también que:

$$\mathbf{b}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial q_k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_i} \right] = \Gamma_{ij,k},$$

donde  $\Gamma_{ij,k}$  es el símbolo de Christoffel de primera especie. b) El símbolo de Christoffel de segunda especie se define por la ecuación

$$\Gamma_{ij}^l = \sum_k g_{lk}^* \Gamma_{ij,k},$$

donde  $g_{ij}^* = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j$ . Demostrar que

$$\frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial q_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{b}_k.$$

2-18. a) Si llamamos a los elementos

$$A_{i,j} = \mathbf{b}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_j}$$

derivadas covariantes del vector covariante  $\mathbf{A}$ , demuéstrese que

$$\mathbf{b}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_j} = \frac{\partial A_i}{\partial q_j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k A_k,$$

donde  $A_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_i$ .



b) La divergencia de un vector se define por

$$\text{Div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \sum_{ij} g_{ij}^* A_{i,j}.$$

Demostrar que, en coordenadas curvilíneas ortogonales, la divergencia se expresa por

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3 A_1}{h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1 h_3 A_2}{h_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2 A_3}{h_3} \right) \right].$$

3

## *Sistemas de coordenadas en movimiento*

Frecuentemente conviene, desde un punto de vista matemático, emplear la descripción cinemática del movimiento de una partícula con respecto a un sistema de coordenadas en movimiento. El movimiento de un sistema de coordenadas puede ser de traslación, de rotación o una combinación de ambos. Al tratar el movimiento limitado de una partícula cargada eléctricamente, bajo la acción combinada de un campo eléctrico central y otro magnético de poca intensidad, por ejemplo, veremos que la descripción cinemática del movimiento con respecto a un sistema de coordenadas giratorio apropiado será, aproximadamente, la misma que la descripción cinemática del movimiento de la partícula cargada con respecto a un sistema de coordenadas estacionario, bajo la acción del campo eléctrico únicamente, lo cual es un problema mucho más simple. Además, la descripción del movimiento de una partícula con respecto a un sistema de coordenadas fijo sobre la superficie de la Tierra implica, naturalmente, un sistema de coordenadas que se traslada y gira al mismo tiempo en el espacio. Como postularemos las leyes fundamentales de la mecánica con respecto a un sistema inercial, el cual es un sistema de coordenadas sin aceleración ni rotación, necesitaremos para poder aplicarlas a problemas específicos un conocimiento de las relaciones entre las descripciones cinemáticas del movimiento de una partícula con respecto a sistemas de coordenadas en que unos se mueven con respecto a los otros.

### 3-1 Movimiento de traslación

Consideremos dos sistemas de coordenadas cuyas orientaciones en el espacio se observa que permanecen fijas. Para simplificar, supongamos ade-

más, que sus respectivos vectores base coordenados son paralelos entre sí. En caso de que no fuera así, sólo se necesitaría la transformación de uno de ellos a un sistema de coordenadas paralelo al otro. Consideraremos tales transformaciones en la sección 3-4. El único movimiento que puede observarse que realizan entre sí estos dos sistemas de coordenadas es el movimiento de traslación de uno con respecto al otro.

Un solo observador que vea estos dos sistemas de coordenadas podría describir el movimiento de una partícula con respecto a uno u otro de ellos y relacionar las dos descripciones diferentes así obtenidas. Procedemos a encontrar esta relación.

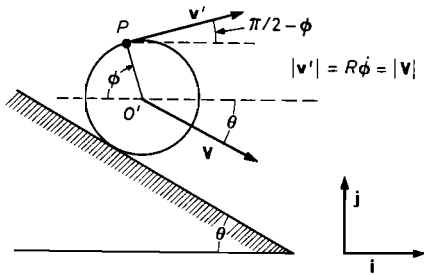
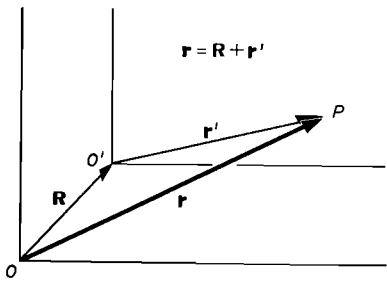


FIG. 3-1. Posición relativa de un punto \$P\$ con respecto a dos sistemas de coordenadas.

FIG. 3-2. Rueda que desciende rodando sobre un plano inclinado fijo.

Designando los orígenes de los dos sistemas coordenados por \$O\$ y \$O'\$, y suponiendo que el sistema coordenado sin prima permanece fijo con respecto al observador, conocerá éste la posición de un punto \$P\$, con respecto a \$O'\$, si le son conocidas su posición con respecto a \$O\$ y la posición de \$O'\$ con respecto a \$O\$. Los respectivos vectores de posición \$\mathbf{r}'(t)\$, \$\mathbf{r}(t)\$ y \$\mathbf{R}(t)\$, como se puede ver en la figura 3-1, están relacionados de la siguiente manera:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'(t). \tag{3-1}$$

Mediante derivaciones sucesivas de la ecuación (3-1) hallamos las relaciones entre las velocidades y las aceleraciones del punto \$P\$ con respecto a los dos puntos \$O\$ y \$O'\$. Para las velocidades, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= \dot{\mathbf{R}}(t) + \dot{\mathbf{r}}'(t) \\ \mathbf{v}(t) &= \mathbf{V}(t) + \mathbf{v}'(t), \end{aligned} \tag{3-2}$$

donde \$\mathbf{v}(t)\$ es la velocidad de \$P\$ con respecto a \$O\$, \$\mathbf{V}(t)\$ la velocidad de \$O'\$ con respecto a \$O\$, y \$\mathbf{v}'(t)\$ la velocidad de \$P\$ con respecto a \$O'\$. Para las aceleraciones tenemos

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{A}(t) + \mathbf{a}'(t), \tag{3-3}$$

donde \$\mathbf{a}(t)\$, \$\mathbf{A}(t)\$ y \$\mathbf{a}'(t)\$ son, respectivamente, las aceleraciones del punto \$P\$ con respecto al punto \$O\$, del punto \$O'\$ con respecto a \$O\$, y del punto \$P\$ con respecto a \$O'\$.

► Consideremos, como ejemplo, el problema de hallar la velocidad y la aceleración de un punto \$P\$ en la circunferencia exterior de una rueda de radio \$R\$ que desciende rodando sobre un plano inclinado que forma un ángulo \$\theta\$ con la horizontal (fig. 3-2).

La velocidad \$\mathbf{v}\$ del punto \$P\$ con respecto al plano inclinado está relacionada a la velocidad \$\mathbf{v}'\$ del punto \$P\$, con respecto al centro geométrico de la rueda y a la velocidad \$\mathbf{V}\$ de dicho centro con respecto al plano inclinado, como se ve en la ecuación (3-2). De la figura 3-2 encontramos que en función de sus componentes

$$\mathbf{v}' = R\dot{\phi} \sin \phi \mathbf{i} + R\dot{\phi} \cos \phi \mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{V} = R\dot{\phi} \cos \theta \mathbf{i} - R\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{j},$$

por lo que

$$\mathbf{v} = R\dot{\phi}(\cos \theta + \sin \phi) \mathbf{i} + R\dot{\phi}(\cos \phi - \sin \theta) \mathbf{j}.$$

Si el plano inclinado no permanece en reposo y deseamos hallar la velocidad del punto \$P\$ con respecto al terreno o suelo, tendríamos que añadir, subsecuentemente, la velocidad del plano inclinado con respecto al suelo a la velocidad del punto \$P\$ con respecto al plano inclinado.

Para el punto de contacto entre la rueda y el plano inclinado en el cual

$$\phi = \theta - \frac{\pi}{2},$$

vemos que su velocidad con respecto al plano inclinado es nula,

$$\mathbf{v} = 0.$$

Esta ecuación expresa la condición de rodadura. Si un cuerpo rueda sobre otro, entonces la velocidad relativa de cada uno de los dos puntos de contacto respecto al otro es nula.

La aceleración del punto \$P\$ con respecto al plano inclinado está dada por la ecuación (3-3). Con la figura 3-3 hallamos que la aceleración \$\mathbf{a}'\$ del punto \$P\$ con respecto al centro de la rueda alrededor del cual se mueve en una circunferencia de radio \$R\$ está dada por

$$\mathbf{a}' = (R\ddot{\phi}^2 \cos \phi + R\ddot{\phi} \sin \phi) \mathbf{i} + (R\ddot{\phi} \cos \phi - R\dot{\phi}^2 \sin \phi) \mathbf{j}.$$

Con el mismo esquema también obtenemos, para la aceleración del centro de la rueda con respecto al plano inclinado, el resultado

$$\mathbf{A} = R\ddot{\phi} \cos \theta \mathbf{i} - R\ddot{\phi} \sin \theta \mathbf{j}.$$

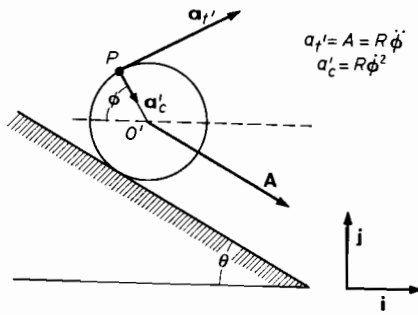


FIG. 3-3. Rueda que desciende rodando sobre un plano inclinado fijo.

Por tanto, por la ecuación (3-3) vemos que la aceleración del punto  $P$  con respecto al plano inclinado está dada por

$$\mathbf{a} = [R\dot{\phi}^2 \cos \phi + R\ddot{\phi}(\sin \phi + \cos \theta)]\mathbf{i} + [R\ddot{\phi}(\cos \phi - \sin \theta) - R\dot{\phi}^2 \sin \phi]\mathbf{j}.$$

Queremos resaltar nuevamente que en nuestra explicación sólo consideramos un observador único, el cual describe la posición, velocidad y aceleración de los puntos  $P$  y  $O'$  con respecto al origen de su sistema de coordenadas. La posición, velocidad y aceleración relativas del punto  $P$  con respecto al  $O'$  representa meramente una especie de diferente sistema de registro contable cinemático para dicho observador. Las ecuaciones (3-1), (3-2) y (3-3) relacionan sus asientos de las diferentes descripciones cinemáticas del punto  $P$  para las posición, velocidad y aceleración relativas observadas de  $O'$  con respecto a  $O$ . Desde este punto de vista, vemos que las ecuaciones de transformación que hemos deducido son, también, completa y generalmente aplicables a la descripción relativista del movimiento de cuerpos puntiformes por un único observador.

La mecánica relativista, de la que hablaremos en el Capítulo 13, difiere de la mecánica clásica en la descripción cinemática del movimiento de una partícula cuando un segundo observador entra en escena. Sólo difiere la mecánica clásica de la relativista cuando  $O$  y  $O'$  representan los orígenes de los sistemas de coordenadas de dos distintos observadores que se mueven respectivamente con estos puntos y cuando  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{v}'$  y  $\mathbf{a}'$  son las descripciones cinemáticas del movimiento del punto  $P$  con

respecto a los dos observadores inerciales. La mecánica clásica supone que las ecuaciones que hemos hallado anteriormente son las de transformación correctas para relacionar las diferentes descripciones cinemáticas del movimiento del punto  $P$  por los dos observadores. Encontramos que para velocidades relativas de  $O'$  con respecto a  $O$  cuyas magnitudes sean pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, las ecuaciones de transformación que obtuvimos son buenas aproximaciones a las relaciones relativistas correctas que existen entre las diferentes descripciones cinemáticas del movimiento de un punto  $P$  con respecto a dos observadores que se mueven respectivamente con los puntos  $O$  y  $O'$ .

Una interesante aplicación de las ecuaciones (3-1) y (3-2) es la descripción de la propagación de una onda armónica plana con respecto a un sistema de coordenadas en movimiento.

Consideremos la onda plana definida por

$$\Psi = A \text{sen}(kx - \omega t) = A \text{sen} k(x - vt).$$

Es decir, una onda plana de frecuencia  $f = \omega/2\pi$  y velocidad  $v = \omega/k$  que se mueve en el sentido en que  $x$  aumenta, donde  $k$  es el llamado número de onda, igual a  $2\pi$  veces el recíproco de la longitud de onda,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

donde  $\lambda$  representa la longitud de onda.

Supongamos que ésta sea la descripción de la onda con respecto al medio de propagación, es decir, la descripción de la onda con respecto a un observador al cual el medio de transmisión le parece que está en reposo. A un segundo observador que vea el medio de transmisión moviéndose en la dirección y sentido de la propagación de la onda con una velocidad  $v_M$ , le parecerá que la onda está moviéndose con una velocidad  $v + v_M$ . El segundo observador, por tanto, definirá la onda plana por la ecuación

$$\Psi = A \text{sen} k(x' - v't) = A \text{sen}(kx' - \omega't),$$

donde  $v'$  está definida por

$$v' = v + v_M = \frac{\omega'}{k}.$$

Esta última descripción de la onda por el segundo observador puede ser obtenida a partir de la descripción del primero sustituyendo  $x$  por  $x' - v_M t$ , donde  $x$  y  $x'$  son respectivamente las posiciones de un frente de onda en un instante o tiempo  $t$  con respecto a los dos observadores (fig. 3-4).

La frecuencia  $f'$  atribuida a la onda por el segundo observador difiere de la  $f$  que le asigna a ella el primer observador. La relación entre las dos frecuencias es

$$f' = (v + v_M) \frac{k}{2\pi} = f \frac{v + v_M}{v}.$$

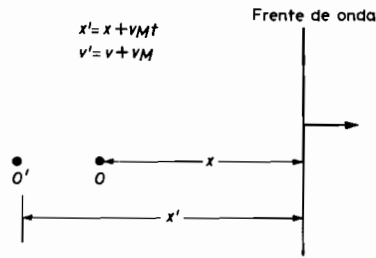


FIG. 3-4

Esta fórmula es el clásico *efecto Doppler* para el cambio o variación de frecuencia que se produce por el movimiento de un observador, del medio transmisor o de ambos.

### 3-2 Movimiento de rotación

Para tratar el caso de dos sistemas de coordenadas que giran uno con respecto al otro, tomaremos los orígenes de los dos sistemas de manera que coincidan. Para simplificar, consideramos además que los vectores base respectivos de los dos sistemas sean paralelos a sus correspondientes en el instante  $t$ . En ese caso, la posición de un punto  $P$  en dicho tiempo  $t$  se representará idénticamente en los dos sistemas de coordenadas. Si

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

representan los vectores de posición del punto  $P$  con respecto a los dos sistemas de coordenadas, encontramos que en el tiempo  $t$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ , puesto que  $O$  y  $O'$  coinciden. En notación matricial este hecho está expresado claramente por la ecuación

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Para hallar la relación entre las diferentes descripciones de la velocidad y la aceleración del punto  $P$  con respecto a los dos sistemas, recordemos nuestra explicación de la sección 1-8. En ésta, descompusimos la derivada con respecto al tiempo de un vector  $\mathbf{A}(t)$  en dos partes. La primera parte  $(d\mathbf{A}/dt) \cdot \mathbf{e}_A$ , se halló tomando en cuenta el cambio en la magnitud de  $\mathbf{A}(t)$ , mientras que la segunda parte

$$A \frac{d\mathbf{e}_A}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{A}, \quad (3-4)$$

representaba un cambio en la orientación del vector  $\mathbf{A}$ . La cantidad  $d\phi/dt = \omega_A$  es la velocidad angular instantánea de  $\mathbf{A}$ .

Con respecto a uno u otro de los dos sistemas de coordenadas, la derivada con respecto al tiempo de un vector  $\mathbf{A}$  estaría expresada por una ecuación de la forma

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA}{dt} \mathbf{e}_A + \omega_A \times \mathbf{A}. \quad (3-5)$$

Si la ecuación (3-5) representa la razón de cambio de  $\mathbf{A}$  con respecto al tiempo (o sea la derivada) en el sistema sin prima, entonces, una ecuación similar,

$$\frac{d\mathbf{A}'}{dt} = \frac{dA'}{dt} \mathbf{e}_A + \omega'_A \times \mathbf{A}' \quad (3-6)$$

es la ecuación que representa la razón de cambio de  $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$  con respecto al tiempo en el sistema de coordenadas con prima. En ésta,  $\omega'_A$  es la velocidad angular que el vector  $\mathbf{A}$  tiene con respecto al sistema con prima. Obviamente,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \neq \frac{d\mathbf{A}'}{dt}.$$

La diferencia de las descripciones de la derivada de  $\mathbf{A}$  con respecto al tiempo en los dos sistemas de coordenadas se debe a las distintas velocidades angulares relativas que  $\mathbf{A}$  tiene con respecto a los dos sistemas. El que estas

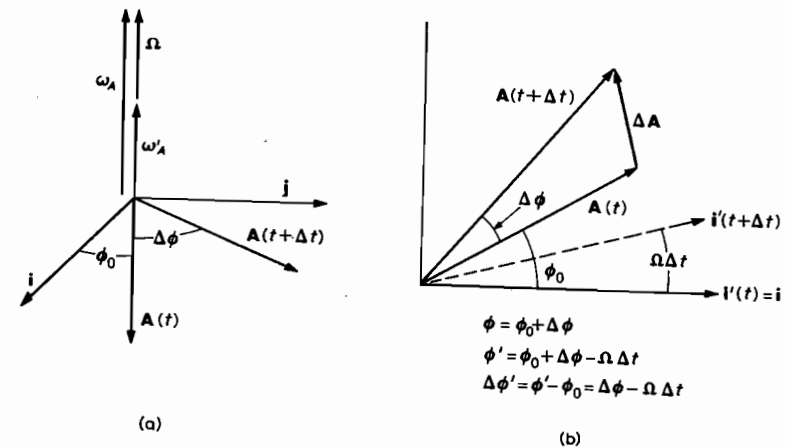


FIG. 3-5

velocidades angulares sean distintas se debe a la rotación del sistema de coordenadas con prima con respecto al sin prima. Si representamos por  $\Omega$  la velocidad angular de rotación de los vectores base del sistema con prima con respecto al sistema sin prima, entonces, como las velocidades angulares se suman como vectores, encontraremos que la velocidad angular que el vector  $\mathbf{A}$  tiene con respecto al sin prima es igual a la suma de la velocidad angular de  $\mathbf{A}$  con respecto al con prima, más  $\Omega$ ,

$$\omega_A = \Omega + \omega'_A. \quad (3-7)$$

Esto, por ejemplo, está ilustrado en la figura 3-5 para el caso en que los tres vectores de velocidad angular sean paralelos entre sí, estando todos dirigidos a lo largo del eje  $z$  positivo.

Introduciendo este resultado en la ecuación (3-5) nos da

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \left( \frac{dA}{dt} \mathbf{e}_A + \omega'_A \times \mathbf{A} \right) + \Omega \times \mathbf{A}' \\ &= \frac{d\mathbf{A}'}{dt} + \Omega \times \mathbf{A}'. \end{aligned} \quad (3-8)$$

La ecuación (3-8) relaciona las descripciones de la razón de cambio del vector  $\mathbf{A}$  con respecto al tiempo en los dos sistemas de coordenadas. Esta ecuación se aplica en general a cualquier vector  $\mathbf{A}$ . Nos dice que la descripción de la razón de cambio (o derivada) de un vector  $\mathbf{A}$  con respecto al tiempo en un sistema de coordenadas (sin prima) es igual a la suma de la razón de cambio del mismo vector en un segundo sistema coordinado (con prima) que está girando con una velocidad angular  $\Omega$  con respecto al primero, más el término  $\Omega \times \mathbf{A}$  que toma en cuenta los diferentes cambios de rotación que el vector  $\mathbf{A}$  tiene con respecto a los dos sistemas.

Aplicando este resultado al vector de posición del punto  $P$  obtenemos

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \Omega \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}' + \Omega \times \mathbf{r}', \quad (3-9)$$

donde  $\mathbf{v}'$  es la descripción de la velocidad del punto  $P$  respecto al sistema de coordenadas con prima.

La ecuación (3-9) es una identidad, el primer miembro de la cual representa, obviamente, la descripción de la velocidad del punto  $P$  con respecto al sistema de coordenadas sin prima. Por otro lado, el último miembro representa la descripción de este mismo vector de velocidad,  $\mathbf{v}$ , en función de la velocidad  $\mathbf{v}'$  del punto  $P$  con respecto al sistema con prima y su vector de posición  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ . Este hecho puede ser entendido más fácilmente si representamos la ecuación (3-9) usando notación matricial:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_x + \Omega_y z' - \Omega_z y' \\ v'_y + \Omega_z x' - \Omega_x z' \\ v'_z + \Omega_x y' - \Omega_y x' \end{bmatrix}.$$

Para hallar la relación entre las dos descripciones de las aceleraciones, aplicaremos la ecuación (3-8) al vector de velocidad,  $\mathbf{v}$ , de la ecuación (3-9). Poniendo

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}' = \mathbf{v}' + \Omega' \times \mathbf{r}',$$

donde  $\Omega' = \Omega$  es la descripción de  $\Omega$  en el sistema con prima, encontramos que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{v}' + \Omega' \times \mathbf{r}') + \Omega' \times (\mathbf{v}' + \Omega' \times \mathbf{r}') \\ &= \frac{d}{dt} \mathbf{v}' + \left( \frac{d\Omega'}{dt} \right) \times \mathbf{r}' + \Omega' \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \Omega' \times (\mathbf{v}' + \Omega' \times \mathbf{r}') \\ &= \mathbf{a}' + \alpha \times \mathbf{r}' + 2\Omega \times \mathbf{v}' + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (3-10)$$

en donde

$$\alpha = \frac{d\Omega'}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} - \Omega \times \Omega = \frac{d\Omega}{dt} \quad (3-11)$$

es la aceleración angular del sistema de coordenadas con prima con respecto al sistema sin prima.

La ecuación (3-10) relaciona la aceleración  $\mathbf{a}$  del punto  $P$  con respecto al sistema sin prima con su aceleración  $\mathbf{a}'$  con respecto al sistema con prima. Los términos adicionales aparecen a causa de la rotación de los dos sistemas entre sí. El término  $2\Omega \times \mathbf{v}'$  se llama *aceleración de Coriolis*, debido a G. Coriolis, quien lo descubrió. El término  $\alpha \times \mathbf{r}'$  es la aceleración producida por la aceleración angular del sistema de coordenadas con prima con respecto al sin prima. Y, finalmente,  $\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}')$  es la *aceleración centrípeta*.

Podríamos haber obtenido este mismo resultado partiendo de los resultados del capítulo precedente, considerando que la transformación de las coordenadas  $x, y, z$  en las  $x', y', z'$  es una transformación de coordenadas dependiente del tiempo, expresada generalmente por

$$x = x(q_1, q_2, q_3, t), \quad y = y(q_1, q_2, q_3, t), \quad z = z(q_1, q_2, q_3, t). \quad (3-12)$$

Para tales transformaciones podemos todavía tomar los vectores

$$\mathbf{b}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial q_i} \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial q_i} \mathbf{k} \quad (3-13)$$

como nuestros nuevos vectores base en el punto  $(q_1, q_2, q_3)$ . No obstante, para tales transformaciones dependientes del tiempo, los vectores base recíprocos  $b_i$  no son iguales al gradiente de las coordenadas generalizadas. Esto significa que, para transformaciones de coordenadas dependientes del tiempo,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i \neq \dot{q}_i,$$

a pesar de la cual, aún seguiremos llamando a  $\dot{q}_i$  velocidad generalizada.

Puesto que, en este caso, como en el de las transformaciones de coordenadas independientes del tiempo, tenemos todavía la relación

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \dot{q}_i},$$

los vectores base definidos por la ecuación (3-13) nos dan, para las velocidades covariantes, la relación

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i = \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \dot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} v^2 \right), \quad (3-14)$$

y para las aceleraciones covariantes la expresión

$$\begin{aligned} a_i &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_i = \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{1}{2} v^2 \right). \end{aligned} \quad (3-15)$$

Para el problema que estamos considerando utilizando la ecuación (3-9), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v^2 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{2} [v'^2 + 2\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')]. \end{aligned}$$

De ahí que, para la componente  $x'$  de la aceleración, como

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \dot{x}' + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')_{x'}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = (\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\Omega})_{x'} - [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')]_{x'},$$

la ecuación (3-15) nos da

$$a_{x'} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{l}' = \ddot{x}' + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')_{x'} + 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}')_{x'} + [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')]_{x'}. \quad (3-16)$$

Para el caso a que nos limitamos al principio de esta sección, la coincidencia instantánea de los vectores base cartesianos de los dos sistemas de coordenadas,

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}', \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}' \quad \text{y} \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}',$$

nos permite poner

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'), \quad (3-17)$$

que está de acuerdo con la ecuación (3-10).

► Como ejemplo, consideremos el movimiento en un plano de una partícula que se observa que en un sistema de coordenadas se mueve en línea recta. En este sistema, eligiendo el eje  $x$  como el eje sobre el cual tiene lugar el movimiento, hallamos que éste quedará definido por

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = \dot{x}(t)\mathbf{i}, \quad \mathbf{a} = \ddot{x}(t)\mathbf{i}.$$

El movimiento de una partícula en el plano ecuatorial de la Tierra, que cae hacia el centro de ésta con respecto a un sistema de coordenadas fijo en el centro de la Tierra, puede ser un ejemplo de esto.

De cualquier modo, con respecto a un sistema de coordenadas que el mismo observador viera girando con una velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega(t)\mathbf{k}$ , la descripción o definición del movimiento en función de las coordenadas cilíndricas  $r$  y  $\theta$  está dada por

$$r(t) = x(t)$$

y

$$\theta(t) = - \int_{t_0}^t \Omega(t) dt.$$

Para el ejemplo especial mencionado, el sistema de coordenadas que gira representaría un sistema de coordenadas fijo en el centro de la Tierra, el cual será siempre paralelo al sistema de coordenadas de un observador fijo

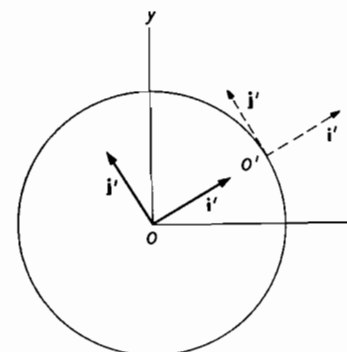


FIG. 3-6

en la superficie de la Tierra rotativa (fig. 3-6). En este caso, la velocidad angular de rotación de la Tierra  $\boldsymbol{\Omega}$ , es constante. Una trayectoria típica que,

generalmente, puede seguir tal partícula con respecto al sistema de coordenadas que gira, se muestra en la figura 3-7.

En función de las componentes cartesianas sobre los vectores base,  $i'$  y  $j'$ , del sistema de coordenadas que giran, tenemos

$$r'(t) = x(t) \cos \theta i' + x(t) \sin \theta j',$$

del cual, por derivaciones sucesivas, obtenemos

$$v'(t) = \frac{dr'}{dt} = \dot{x}(t) \cos \theta i' + \dot{x}(t) \sin \theta j' + \Omega(t)[x(t) \sin \theta i' - x(t) \cos \theta j'],$$

y

$$a'(t) = \frac{dv'}{dt} = [\ddot{x}(t) \cos \theta + 2\Omega \dot{x} \sin \theta - \Omega^2 x \cos \theta + \alpha x \sin \theta] i' + [\ddot{x} \sin \theta - 2\Omega \dot{x} \cos \theta + \Omega^2 x \sin \theta - \alpha x \cos \theta] j'.$$

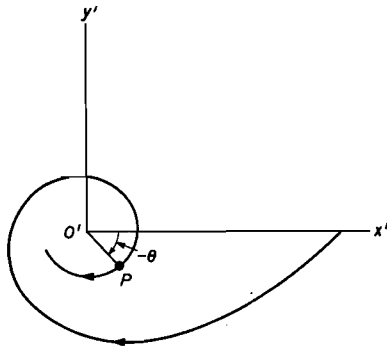


FIG. 3-7. Posible representación del movimiento rectilíneo de una partícula con respecto a un sistema de coordenadas giratorio.

En un tiempo  $t = t_0$  en el que coinciden los vectores base cartesianos de los dos sistemas de coordenadas,

$$i' = i \quad y \quad j' = j \quad o \quad \theta = 0,$$

encontramos que realmente

$$v'_x = v_x \quad y \quad v'_y = -\Omega x$$

o sea,

$$v' = v - \Omega \times r.$$

Similarmente, en el tiempo  $t = t_0$

$$a'_x = \ddot{x} - \Omega^2 x, \quad a'_y = -2\Omega \dot{x} - \alpha x,$$

o

$$a' = a - 2\Omega \times \dot{r} - \alpha \times r + \Omega \times (\Omega \times r),$$

que coincide con la ecuación (3-10) después de sustituir  $\dot{r}$  por  $(v' + \Omega \times r)$ .

El tiempo o instante  $t_0$  en que los vectores base cartesianos de los dos sistemas coinciden puede ser elegido por el observador. Por tanto, se deduce que las ecuaciones (3-9) y (3-10) son correctas para cualquier tiempo o instante.

Los resultados de esta sección juegan un papel importante en la descripción del movimiento de un proyectil o, en general, cualquier partícula, con respecto a un observador sobre la Tierra rotativa. Con respecto a tal observador, la descripción de la aceleración y, por consecuencia, el movimiento de un proyectil, es mucho más complicada que la de su movimiento con respecto a un sistema de coordenadas cuya orientación permanezca fija en el espacio. Despreciando el movimiento de traslación de la Tierra por el espacio, la aceleración de un proyectil con respecto a un sistema de coordenadas en el centro de ella, que sea paralelo al sistema de un observador sobre la Tierra y que gira con ella, está dada por

$$a' = a + \Omega \times (\Omega \times r) - 2\Omega \times v,$$

donde  $a$  es la aceleración del proyectil dirigida radialmente hacia el centro de la Tierra y  $v$  su velocidad, ambas con respecto al sistema de coordenadas fijo. El vector  $\Omega$  representa la velocidad angular de precesión de la Tierra y, por consecuencia, del sistema de coordenadas que gira con ella.

Como resultado de esta complicación, la aceleración resultante de una partícula con respecto a un observador sobre la Tierra no está dirigida hacia el centro de ésta.

Otros ejemplos de la importancia de estas relaciones serán dados en los problemas y en los siguientes capítulos.

### 3-3 Movimiento de traslación y rotación

Si los orígenes de los dos sistemas de coordenadas no quedan coincidentes, entonces, la relación entre las dos descripciones cinemáticas está dada por la suma de los resultados de las dos últimas secciones. Esto puede justificarse considerando tres sistemas de coordenadas cuyos orígenes estén representados por los tres puntos  $O$ ,  $O'$  y  $O''$ . Si los puntos  $O'$  y  $O''$  se mueven juntos, entonces las relaciones entre la velocidad y aceleración de un punto  $P$  con respecto a los sistemas con prima y con biprima están dadas en la última sección:

$$v'' = v' + \Omega \times r' \quad \text{con} \quad r' = r'', \quad (3-18)$$

y

$$a'' = a' + 2\Omega \times v' + \alpha \times r' + \Omega \times (\Omega \times r'), \quad (3-19)$$

donde  $\Omega$  y  $\alpha$  son la velocidad angular y la aceleración angular del sistema coordenado con prima con respecto al sistema con biprima. Si la orientación del sistema con biprima no cambia con respecto al sin prima, entonces, las relaciones entre las velocidades y las aceleraciones del punto  $P$  con respecto a los sistemas con biprima y sin prima están dadas en la sección 3-1. Específicamente tenemos

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}'' + \mathbf{V} = \mathbf{V} + \mathbf{v}' + \Omega \times \mathbf{r}' \quad (3-20)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}'' + \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A} + \mathbf{a}' + 2\Omega \times \mathbf{v}' + \alpha \times \mathbf{r}' + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (3-21)$$

Aquí  $\mathbf{V}$  es la velocidad relativa de  $O''$  (u  $O'$ ) con respecto a  $O$ , y  $\mathbf{A}$  es la aceleración de  $O''$  (u  $O'$ ) con respecto a  $O$ . Como el sistema con biprima no cambia su orientación con respecto al sin prima,  $\Omega$  y  $\alpha$  son también la velocidad angular y la aceleración angular del sistema coordenado con prima con respecto al sin prima.

### 3-4 Transformación de coordenadas

En esta sección consideraremos la transformación de la descripción cartesiana de un vector en un sistema de coordenadas en su descripción cartesiana con respecto a otro cuyo origen coincide con el del primero, pero cuyos vectores base ortonormales no sean paralelos a los del primero. Tal transformación tiene que realizarse en el caso de que los vectores base de los sistemas con prima y sin prima no coincidan y si deseamos, por ejemplo, relacionar las respectivas descripciones cartesianas representadas en cada miembro de la ecuación (3-20) o (3-21).

Con referencia, una vez más, a los dos sistemas de coordenadas, con prima y sin prima (fig. 3-8), el problema consiste en relacionar las componentes cartesianas ( $A_x, A_y, A_z$ ) de un vector  $\mathbf{A}$ , en el sistema sin prima, con las componentes cartesianas ( $A'_x, A'_y, A'_z$ ) del mismo vector  $\mathbf{A}$  con respecto al sistema con prima. La relación entre los dos conjuntos de componentes cartesianas se puede hallar fácilmente si se conocen los productos escalares entre los vectores base de los dos sistemas.

Poniendo

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}' &= t_{11}, & \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}' &= t_{21}, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}' &= t_{31}, \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}' &= t_{12}, & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' &= t_{22}, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}' &= t_{32}, \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{k}' &= t_{13}, & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}' &= t_{23}, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' &= t_{33}, \end{aligned} \quad (3-22)$$

tenemos

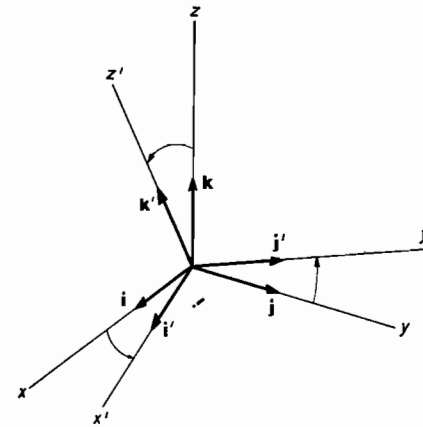


FIG. 3-8. Transformación general de coordenadas.

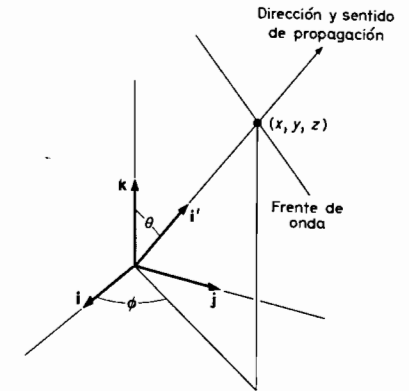


FIG. 3-9. Frente de onda propagándose en la dirección y sentido determinados por los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}')\mathbf{i} + (\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}')\mathbf{j} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}')\mathbf{k} \\ &= t_{11}\mathbf{i} + t_{21}\mathbf{j} + t_{31}\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (3-23)$$

y similarmente

$$\mathbf{j}' = t_{12}\mathbf{i} + t_{22}\mathbf{j} + t_{32}\mathbf{k} \quad (3-24)$$

y

$$\mathbf{k}' = t_{13}\mathbf{i} + t_{23}\mathbf{j} + t_{33}\mathbf{k}. \quad (3-25)$$

Los productos escalares  $t_{mn}$  de los dos conjuntos de vectores base son los *cosenos directores* de los vectores base del sistema con prima con respecto al sistema sin prima. También son los cosenos directores de los vectores base del sistema sin prima con respecto al sistema con prima, pues semejantemente hallamos

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= t_{11}\mathbf{i}' + t_{12}\mathbf{j}' + t_{13}\mathbf{k}', \\ \mathbf{j} &= t_{21}\mathbf{i}' + t_{22}\mathbf{j}' + t_{23}\mathbf{k}', \\ \mathbf{k} &= t_{31}\mathbf{i}' + t_{32}\mathbf{j}' + t_{33}\mathbf{k}'. \end{aligned} \quad (3-26)$$

Con la ayuda de las ecuaciones (3-26) podemos obtener las relaciones que estamos buscando. Por ejemplo, vemos que

$$\begin{aligned} A_x &= \mathbf{i} \cdot \mathbf{A} = (t_{11}\mathbf{i}' + t_{12}\mathbf{j}' + t_{13}\mathbf{k}') \cdot \mathbf{A} \\ &= t_{11}A'_x + t_{12}A'_y + t_{13}A'_z, \end{aligned} \quad (3-27)$$

donde  $A'_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}'$ , etc.

La ecuación (3-21) se simplifica notacionalmente poniendo

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_x \\ A_2 &= A_y \\ A_3 &= A_z \end{aligned} \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{aligned} A'_1 &= A'_x \\ A'_2 &= A'_y \\ A'_3 &= A'_z \end{aligned} \right.$$



Con este cambio de notación, la ecuación (3-27) está expresada por

$$A_1 = \sum_{m=1}^3 t_{1m} A'_m. \quad (3-28)$$

De la misma manera, obtenemos

$$A_2 = \sum_{m=1}^3 t_{2m} A'_m \quad \text{y} \quad A_3 = \sum_{m=1}^3 t_{3m} A'_m,$$

o, en general,

$$A_n = \sum_{m=1}^3 t_{nm} A'_m, \quad n = 1, 2, 3. \quad (3-29)$$

Análogamente también hallamos que

$$\begin{aligned} A'_1 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}' = \mathbf{A} \cdot (t_{11}\mathbf{i} + t_{21}\mathbf{j} + t_{31}\mathbf{k}) \\ &= t_{11}A_1 + t_{21}A_2 + t_{31}A_3, \end{aligned}$$

con expresiones similares para  $A'_2$  y  $A'_3$ . Todas estas expresiones están contenidas en la ecuación

$$A'_m = \sum_{n=1}^3 t_{nm} A_n, \quad m = 1, 2, 3. \quad (3-30)$$

Las ecuaciones (3-29) y (3-30) relacionan las componentes cartesianas del vector  $\mathbf{A}$  con respecto a los dos sistemas de coordenadas en función de los nueve cosenos directores,  $t_{nm}$ .

► Como ejemplo del empleo de las ecuaciones de transformación, obtendremos la descripción de una onda armónica plana cuya dirección de propagación está dada por  $\theta$  y  $\phi$ , que son, respectivamente, el ángulo entre la dirección y sentido de propagación y el eje  $z$ , y el ángulo que forma la proyección de la dirección de propagación de la onda sobre el plano  $xy$  con el eje  $x$  (fig. 3-9).

Con respecto a un sistema de coordenadas con prima, para el que la dirección de propagación es el eje  $x'$ , la descripción de la onda está dada por

$$\Psi = A \sin(kx' - \omega t).$$

Por la ecuación (3-30) puede reexpresarse la situación  $x'$  de un frente de onda sobre el eje  $x'$  en función de las proyecciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de  $x'\mathbf{i}'$  sobre los ejes  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ . Esta relación es

$$x' = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i}' = x \sin \theta \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi + z \cos \theta,$$

donde  $\sin \theta \cos \phi$ ,  $\sin \theta \sin \phi$  y  $\cos \theta$  son, respectivamente, los cosenos directores del eje  $\mathbf{i}'$  con respecto a los ejes  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  (fig. 3-9). Introduciendo este

resultado en la descripción de la onda en el sistema de coordenadas con prima, nos la da en el sin prima

$$\Psi = A \sin(kx \sin \theta \cos \phi + ky \sin \theta \sin \phi + kz \cos \theta - \omega t).$$

Definiendo el vector de propagación  $\mathbf{k}$  como uno de magnitud  $k$  y que está dirigido sobre la trayectoria de propagación, expresado por

$$\mathbf{k} = k\mathbf{i}',$$

hallamos que sus componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  están dadas por

$$k_x = k \sin \theta \cos \phi, \quad k_y = k \sin \theta \sin \phi, \quad k_z = k \cos \theta.$$

Usando este vector de propagación  $\mathbf{k}$ , la descripción de una onda armónica plana estará expresada muy eficientemente por

$$\Psi = A \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t). \blacktriangleleft$$

Volviendo a los vectores base, observemos que cada conjunto consta de vectores unidad mutuamente ortogonales. Concluimos, por lo tanto, que los nueve cosenos directores  $t_{mn}$  no son independientes. Del producto escalar de los vectores base de uno u otro sistema obtenemos seis relaciones entre estos nueve cosenos directores que nos dicen que sería posible expresar las ecuaciones de transformación en función de sólo tres parámetros. Volveremos a estudiar sobre tales tres parámetros independientes en el Capítulo 9, donde expondremos la cinemática del movimiento de un cuerpo rígido.

Las seis relaciones entre los nueve cosenos directores se obtienen de los seis productos escalares entre los vectores base de uno u otro conjunto. Empleando la ecuación (3-26) se tiene de los productos escalares entre los vectores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$

$$\sum_{n=1}^3 t_{mn} t_{ln} = \delta_{ml}, \quad (3-31)$$

donde la delta de Kronecker  $\delta_{ml}$  está definida como sigue:

$$\delta_{ml} = \begin{cases} 0 & m \neq l, \\ 1 & m = l. \end{cases} \quad (3-32)$$

Por otro lado, las ecuaciones (3-23), (3-24) y (3-25) nos dan las relaciones equivalentes

$$\sum_{m=1}^3 t_{mn} t_{ml} = \delta_{nl}. \quad (3-33)$$

### 3-5 Representación matricial de transformaciones de coordenadas ortogonales

Las transformaciones de coordenadas son transformaciones lineales extremadamente importantes, que encontramos frecuentemente en la física. Las hallaremos, por ejemplo, en nuestros estudios del movimiento de un cuerpo rígido, en la teoría de pequeñas vibraciones y en la teoría especial o restringida de la relatividad. Son, también, fundamentales en el análisis de los fenómenos físicos en mecánica cuántica. En el Capítulo 10 estudiaremos a fondo las propiedades de estas transformaciones. Ahora nos limitaremos a una breve exposición de la representación matricial de una transformación de coordenadas, para dar al lector una ligera idea sobre el modo matemático más conveniente de manipular las transformaciones lineales.

Vimos ya, en la Sección 1-5, la representación del producto escalar de dos vectores en notación matricial y definimos el producto matricial de una matriz fila y una matriz columna por

$$[B_1, B_2, B_3] \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = B_1 A_1 + B_2 A_2 + B_3 A_3. \quad (3-34)$$

Las matrices

$$[B_1, B_2, B_3] \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

pueden ser, por ejemplo, las representaciones en matriz fila y matriz columna de los vectores

$$\mathbf{B} = B_1 \mathbf{i} + B_2 \mathbf{j} + B_3 \mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}.$$

En función de la representación en matriz fila  $[t_{11}, t_{12}, t_{13}]$  del vector

$$\mathbf{i} = t_{11} \mathbf{i}' + t_{12} \mathbf{j}' + t_{13} \mathbf{k}',$$

y de la representación en matriz columna

$$(\mathbf{A}') = \begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{bmatrix}$$

del vector

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' = A'_1 \mathbf{i}' + A'_2 \mathbf{j}' + A'_3 \mathbf{k}',$$

obtenemos

$$A_1 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{A} = [t_{11}, t_{12}, t_{13}] \begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{bmatrix}. \quad (3-35)$$

Similarmenete, hallamos

$$A_2 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} = [t_{21}, t_{22}, t_{23}] \begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{bmatrix}, \quad (3-36)$$

y

$$A_3 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = [t_{31}, t_{32}, t_{33}] \begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{bmatrix}. \quad (3-37)$$

Las tres últimas ecuaciones pueden ser expresadas por una sola ecuación matricial, combinando los nueve elementos de las tres representaciones de matrices fila de los vectores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ ,

$$\mathbf{i} \leftrightarrow [t_{11}, t_{12}, t_{13}], \quad \mathbf{j} \leftrightarrow [t_{21}, t_{22}, t_{23}], \quad \mathbf{k} \leftrightarrow [t_{31}, t_{32}, t_{33}],$$

dentro de la matriz cuadrada simple de  $3 \times 3$

$$(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}, \quad (3-38)$$

llamada *matriz de transformación*.

Las ecuaciones (3-35), (3-36) y (3-37) se pueden expresar, por tanto, por la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} t_{11}A'_1 + t_{12}A'_2 + t_{13}A'_3 \\ t_{21}A'_1 + t_{22}A'_2 + t_{23}A'_3 \\ t_{31}A'_1 + t_{32}A'_2 + t_{33}A'_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^3 t_{1m}A'_m \\ \sum_{m=1}^3 t_{2m}A'_m \\ \sum_{m=1}^3 t_{3m}A'_m \end{bmatrix}, \quad (3-39)
 \end{aligned}$$

o simplemente

$$(\mathbf{A}) = (\mathbf{T})(\mathbf{A}').$$

La ecuación (3-39) define la multiplicación matricial de una matriz cuadrada  $(\mathbf{T})$  y una matriz columna  $(\mathbf{A})$ . De una manera semejante, podemos expresar la ecuación (3-30) por la matricial

$$\begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

o sea,

$$(\mathbf{A}') = (\mathbf{S})(\mathbf{A}),$$

donde

$$(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix}. \quad (3-41)$$

Observaremos que el elemento  $s_{mn}$  de la matriz de transformación  $(\mathbf{S})$  de la ecuación (3-41) es igual al elemento  $t_{nm}$  de la matriz de transformación  $(\mathbf{T})$  de la ecuación (3-38).

Si los elementos de dos matrices  $(\mathbf{S})$  y  $(\mathbf{T})$  satisfacen la condición

$$s_{mn} = t_{nm}, \quad (3-42)$$

entonces se dice que cada matriz es la *transpuesta* de la otra. La transpuesta de una matriz  $(\mathbf{T})$  se indica por un tilde sobre la matriz. Así pues, tenemos

$$(\mathbf{S}) = (\tilde{\mathbf{T}}) \quad \text{o} \quad (\mathbf{T}) = (\tilde{\mathbf{S}}). \quad (3-43)$$

Podemos extender la utilidad de la notación matricial para representar otras ecuaciones. Supóngase que tuviéramos dos vectores adicionales, los vectores  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ , cuyas componentes en los dos sistemas de coordenadas estuvieran relacionadas entre sí de la misma manera que las de  $\mathbf{A}$ ; es decir, expresadas por las ecuaciones matriciales

$$(\mathbf{B}) = (\mathbf{T})(\mathbf{B}') \quad \text{y} \quad (\mathbf{C}) = (\mathbf{T})(\mathbf{C}'), \quad (3-44)$$

donde  $(\mathbf{B})$  y  $(\mathbf{C})$  son las matrices columna que representan a los vectores  $|\mathbf{B}|$  y  $|\mathbf{C}|$ ,

$$|\mathbf{B}| \leftrightarrow (\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \quad (3-45)$$

y

$$|\mathbf{C}| \leftrightarrow (\mathbf{C}) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix},$$

con representación matricial similar para los vectores  $|\mathbf{B}'|$  y  $|\mathbf{C}'|$ . La igualdad de dos matrices significa que los elementos de una matriz son iguales a los correspondientes de la otra. Así, podemos combinar las ecuaciones (3-39) y (3-44) en una sola ecuación matricial, definiendo primero la matriz cuadrada

$$(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}. \quad (3-46)$$

En función de la matriz  $(\mathbf{M})$  y la matriz similar  $(\mathbf{M}')$ , las ecuaciones (3-39) y (3-44) están expresadas por

$$(\mathbf{M}) = (\mathbf{T})(\mathbf{M}'), \quad (3-47)$$

que establece explícitamente que

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_1 & B'_1 & C'_1 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 \\ A'_3 & B'_3 & C'_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_1^3 t_{1m} A'_m & \sum_1^3 t_{1m} B'_m & \sum_1^3 t_{1m} C'_m \\ \sum_1^3 t_{2m} A'_m & \sum_1^3 t_{2m} B'_m & \sum_1^3 t_{2m} C'_m \\ \sum_1^3 t_{3m} A'_m & \sum_1^3 t_{3m} B'_m & \sum_1^3 t_{3m} C'_m \end{bmatrix}. \quad (3-48)$$

La ecuación (3-48) es la definición del producto de dos matrices cuadradas. Observemos que es igual a la regla de multiplicación de determinantes.

Una manera fácil de recordar la regla general de la multiplicación de dos matrices cualesquiera ( $\mathbf{T}$ ) y ( $\mathbf{M}$ ), consiste en tener en cuenta cómo construimos estas dos matrices. Es decir, considerar las filas de la primera matriz como la representación en matriz fila ( $\mathbf{t}_i$ ) de los vectores

$$(\mathbf{t}_i | \leftrightarrow [t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}],$$

y las columnas de la segunda matriz como la representación en matriz columna de los vectores ( $\mathbf{m}'_j$ )

$$|\mathbf{m}'_j \rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} m'_{1j} \\ m'_{2j} \\ m'_{3j} \end{bmatrix}.$$

El elemento  $m_{ij}$  de la matriz producto

$$(\mathbf{M}) = (\mathbf{T})(\mathbf{M}')$$

es, por tanto, el producto escalar del vector ( $\mathbf{t}_i |$  por el vector  $|\mathbf{m}'_j \rangle$ ,  $m_{ij} = (\mathbf{t}_i | \mathbf{m}'_j)$ .

Si multiplicamos la matriz de transformación ( $\mathbf{T}$ ) de la ecuación (3-38) por su transpuesta ( $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{S}$ ), utilizando la ecuación (3-31), obtenemos el resultado

$$(\mathbf{T})(\tilde{\mathbf{T}}) = \begin{bmatrix} \sum_1^3 t_{1m} t_{1m} & \sum_1^3 t_{1m} t_{2m} & \sum_1^3 t_{1m} t_{3m} \\ \sum_1^3 t_{2m} t_{1m} & \sum_1^3 t_{2m} t_{2m} & \sum_1^3 t_{2m} t_{3m} \\ \sum_1^3 t_{3m} t_{1m} & \sum_1^3 t_{3m} t_{2m} & \sum_1^3 t_{3m} t_{3m} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{1}), \quad (3-49)$$

donde ( $\mathbf{1}$ ) se llama *matriz unidad*. Esta tiene la propiedad de que su producto por cualquier matriz cuadrada ( $\mathbf{U}$ ) produce la misma matriz ( $\mathbf{U}$ ),

$$(\mathbf{U})(\mathbf{1}) = (\mathbf{1})(\mathbf{U}) = (\mathbf{U}). \quad (3-50)$$

Si se tienen dos matrices cuadradas cuyo producto es la matriz unidad se dice que una es la *inversa* de la otra.

La inversa de una matriz ( $\mathbf{T}$ ) se indica por ( $\mathbf{T}^{-1}$ ). Así

$$(\mathbf{T}^{-1})(\mathbf{T}) = (\mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1}) = (\mathbf{1}). \quad (3-51)$$

Para la matriz de transformación de esta sección, la inversa es, por tanto, igual a la transpuesta de la matriz:

$$(\mathbf{T}^{-1}) = (\tilde{\mathbf{T}}). \quad (3-52)$$

Una transformación de coordenadas cuya matriz de transformación satisfaga esta relación, se denomina *transformación de coordenadas ortogonales*. Explicaremos más ampliamente estas y otras propiedades de las matrices de transformación en el Capítulo 10.

Por el momento, consideremos como ejemplo una transformación de coordenadas bidimensionales. El lector no tendrá dificultad en deducir, de la figura 3-10, que

$$\mathbf{i}' = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{j}' = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}.$$

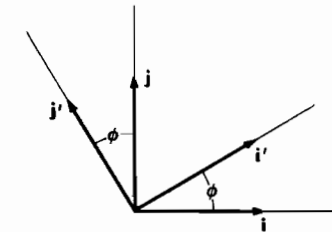


FIG. 3-10. Transformación de coordenadas bidimensionales.

Similarmente, de la misma figura o resolviendo las anteriores ecuaciones, obtenemos

$$\mathbf{i} = \cos \phi \mathbf{i}' - \sin \phi \mathbf{j}' \quad \text{y} \quad \mathbf{j} = \sin \phi \mathbf{i}' + \cos \phi \mathbf{j}'.$$

Hallamos que la matriz que transforma las componentes de un vector en el sistema con prima en las componentes del mismo vector en el sistema sin prima es,

$$(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ \text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix}.$$

Su transpuesta, que es también su inversa, es la matriz

$$(\tilde{\mathbf{T}}) = (\mathbf{T}^{-1}) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix}.$$

La matriz inversa relaciona las componentes de un vector en el sistema sin prima con sus componentes en el sistema con prima. Por tanto, para el vector de posición  $|\mathbf{r}|$  que en el sistema sin prima está representado por  $[x]$  y en el sistema con prima por  $[x']$ , tenemos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\mathbf{T}) \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = (\tilde{\mathbf{T}}) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Las últimas ecuaciones, desarrolladas en función de las componentes, nos dicen que

$$x = x' \cos \phi - y' \text{sen } \phi, \quad y = x' \text{sen } \phi + y' \cos \phi,$$

y

$$x' = x \cos \phi + y \text{sen } \phi, \quad y' = -x \text{sen } \phi + y \cos \phi.$$

Hallamos también que

$$\begin{aligned} (\mathbf{T})(\tilde{\mathbf{T}}) &= \begin{bmatrix} \cos^2 \phi + \text{sen}^2 \phi & \cos \phi \text{sen } \phi - \cos \phi \text{sen } \phi \\ \cos \phi \text{sen } \phi - \cos \phi \text{sen } \phi & \cos^2 \phi + \text{sen}^2 \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

comprobando que

$$(\tilde{\mathbf{T}}) = (\mathbf{T}^{-1}).$$

Para tener un ejemplo más de una transformación lineal y su representación matricial, consideremos la razón de cambio (o derivada) con respecto al tiempo de un vector  $\mathbf{A}$  de magnitud constante. Vimos que la derivada con respecto al tiempo de tal vector se podía expresar por el producto vectorial de un vector de velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  por el vector  $\mathbf{A}$  (Sección 1-8)

$$\dot{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}.$$

El vector  $\dot{\mathbf{A}}$  puede ser considerado como una función vectorial lineal del vector  $\mathbf{A}$ , como podemos ver expresando la última ecuación en función de sus componentes cartesianas,

$$\dot{A}_x = \omega_y A_z - \omega_z A_y, \quad \dot{A}_y = \omega_z A_x - \omega_x A_z, \quad \dot{A}_z = \omega_x A_y - \omega_y A_x.$$

Estas ecuaciones satisfacen las propiedades de las funciones vectoriales lineales (ver Capítulo 10) y, por tanto, pueden expresarse en notación matricial. Hallamos así que

$$(\dot{\mathbf{A}}) = \begin{bmatrix} \dot{A}_x \\ \dot{A}_y \\ \dot{A}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}. \quad (3-53)$$

En este sentido la matriz

$$(\boldsymbol{\Omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3-54)$$

de la ecuación (3-53) se considera que es la representación matricial del operador lineal  $\boldsymbol{\Omega}$ , que operando sobre el vector  $|\mathbf{A}|$ , como se expresa simbólicamente por  $\boldsymbol{\Omega}|\mathbf{A}|$ , produce el vector  $|\dot{\mathbf{A}}|$ . Notacionalmente, escribimos

$$|\dot{\mathbf{A}}| = \boldsymbol{\Omega}|\mathbf{A}|, \quad (3-55)$$

y consideramos que la ecuación (3-53) es la representación matricial de esta ecuación de operador. Desarrollaremos todas estas ideas más ampliamente en el Capítulo 10.

### Problemas

3-1. Un helicóptero aterriza con viento cruzado en un barco en movimiento, desde el cual se observa que desciende verticalmente a 10 nudos.\* Si el barco tiene una velocidad de avance de 20 nudos y el viento cruzado está soplando perpendicularmente al curso del barco a 20 nudos, encontrar la velocidad del helicóptero a través del aire.

3-2. Un niño monta un "caballito" que sube y baja sinusoidalmente ( $h = h_0 \text{sen } \omega t$ ) con relación a un tiotivo que gira alrededor de la vertical con una velocidad (tangencial) constante  $\Omega$ . Si el niño está a una distancia  $c$  del eje de rotación, hállese una expresión de su aceleración relativa al suelo en función de  $\Omega$ ,  $c$ ,  $h_0$ ,  $\omega$  y  $t$ .

3-3. Un semicilindro se balancea sinusoidalmente sin deslizamiento, como se muestra en la figura 3-11, de tal forma que  $\theta = \text{sen } 2t$ . a) Cuando pasa por la posición neutra  $\theta = 0$ , ¿cuál es la aceleración del punto de contacto con la superficie fija? b) Cuando el semicilindro está al ángulo máximo de 1 radián ¿cuál es la aceleración del punto de contacto con la superficie fija?

\* El nudo (*knot*) es una unidad de velocidad, usada generalmente en la marina, que es igual a una milla náutica (inglesa) por hora.

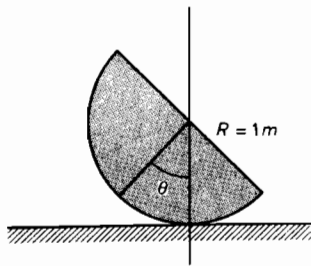


FIG. 3-11

3-4. Un cilindro de radio  $r$  rueda exteriormente sobre la superficie de un cilindro mayor de radio  $R$  que puede rodar libremente sobre un plano horizontal, como se ve en la figura 3-12. *a)* Hállense la velocidad y la aceleración del punto  $P$  con respecto al  $O$ . *b)* Encontrar la velocidad y la aceleración del punto  $P$  con respecto al plano horizontal.

3-5. De un cilindro de radio  $R$  se está desenrollando una cuerda arrollada a su alrededor. La cuerda pasa sobre una polea y está unida a un cuerpo  $B$  (fig. 3-13). Relacionar la velocidad y la aceleración observadas del centro geométrico del cilindro a su velocidad y aceleración angulares y a la velocidad y aceleración del cuerpo  $B$ .

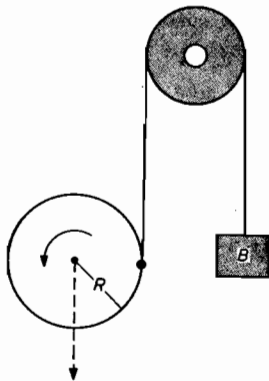


FIG. 3-13

3-6. Un cuerpo  $B$  está unido al extremo libre de una cuerda enrollada alrededor de un cilindro de radio  $R$ . El cilindro puede rodar libremente sobre una superficie horizontal y el cuerpo puede descender, como se indica en la figura 3-14. Relacionar la velocidad y la aceleración del centro geométrico del cilindro a la velocidad y la aceleración del cuerpo  $B$ .

3-7. Se observa que una partícula realiza un movimiento armónico simple a lo largo del eje  $x$ , siendo su posición dada por

$$x = A \sin \omega t.$$

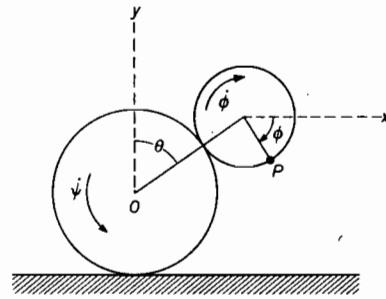


FIG. 3-12

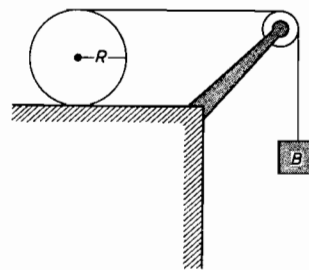


FIG. 3-14

Hállese la descripción o expresión de su posición, su velocidad y su aceleración con respecto a un sistema de coordenadas que gira con la velocidad angular constante  $\Omega = \Omega k$ .

3-8. Encontrar las expresiones de la velocidad y la aceleración de un satélite, que gira en 24 horas una órbita polar circular, como se ven desde la superficie de la Tierra. Tómese  $r = 6,400$  Km.

3-9. Un cuerpo se deja caer de una altura  $h$  por encima de la superficie de la Tierra. *a)* Calcular la aceleración de Coriolis en función del tiempo  $t$ , suponiendo que la distancia  $y$  del cuerpo a la superficie de la Tierra en función del tiempo está dada por

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

*b)* Calcúlese el desplazamiento neto,  $d$ , del punto de choque debido a la rotación de la Tierra (fig. 3-15). (Supóngase que la velocidad inicial del cuerpo ha sido cero con respecto al centro de la Tierra.)

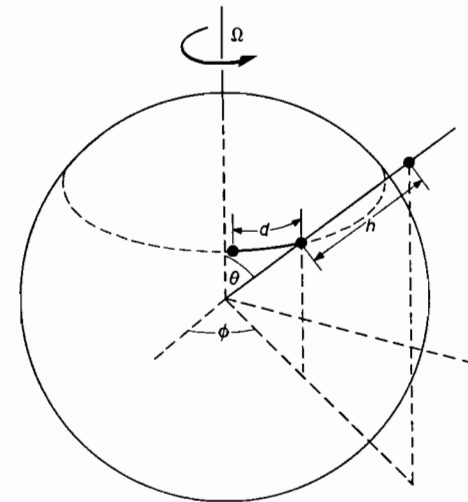


FIG. 3-15

3-10. El punto de soporte de un péndulo simple se mueve en una circunferencia vertical de radio  $a$  con una velocidad angular constante  $\omega$ , como se muestra en la figura 3-16. *a)* Hallar la expresión para las componentes cartesianas de la velocidad y la aceleración de la masa  $m$ . *b)* Obtener la aceleración generalizada para el ángulo variable  $\theta$ .

3-11. Encontrar las velocidades y las aceleraciones de las partículas  $p_1$  y  $p_2$  del péndulo doble representado en la figura 3-17: *a)* cuando el movimiento está confinado a un plano vertical (expresar  $v$  y  $a$  en función de  $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ , etc.); *b)* cuando el movimiento no está restringido.

3-12. Una cuenta de collar puede deslizar a lo largo de un alambre liso en forma de la parábola  $z = cr^2$ . Cuando la parábola está girando con una velocidad angular  $\omega$  alrededor de su eje de simetría vertical, se observa que la cuenta gira

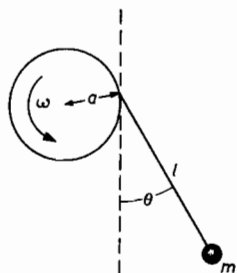


FIG. 3-16.

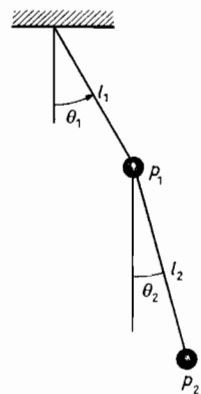


FIG. 3-17

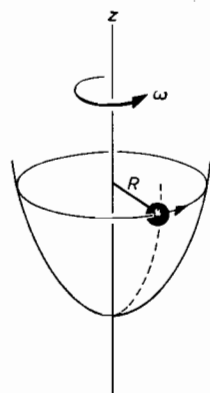


FIG. 3-18

en una circunferencia de radio  $R$  (fig. 3-18). Encontrar la magnitud de la aceleración de la gravedad  $g$  en función de  $R$ ,  $\omega$  y  $c$ .

3-13. Hallar el producto de las matrices

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3-14. Resolviendo las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \phi_z & -\phi_y \\ -\phi_z & 1 & \phi_x \\ \phi_y & -\phi_x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

hallar la inversa de la matriz

$$(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & \phi_z & -\phi_y \\ -\phi_z & 1 & \phi_x \\ \phi_y & -\phi_x & 1 \end{bmatrix}$$

demostrar que, dentro del primer orden en los términos  $\phi_x, \phi_y, \phi_z$ , ésta es

$$(\phi^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 1 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 1 \end{bmatrix}$$

3-15. Demostrar que el elemento  $a_{ij}^{-1}$  de la matriz  $(\alpha^{-1})$ , que es la inversa de la matriz  $(\alpha)$ , está dado por

$$a_{ij}^{-1} = \frac{\text{cofactor } a_{ji}}{\det a_{ij}}$$

3-16. a) Demostrar que las matrices de transformación para una rotación de un ángulo  $\theta$  alrededor de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  son, respectivamente,

$$(\mathbf{R}_x(\theta)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{R}_y(\theta)) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{R}_z(\theta)) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Demostrar que la matriz producto

$$(\mathbf{R}) = (\mathbf{R}_x(\theta))(\mathbf{R}_z(\phi))$$

representa la matriz de transformación para rotaciones sucesivas de dos ángulos  $\phi$  y  $\theta$  alrededor de los ejes  $z$  y  $x$ , respectivamente. c) Demostrar que para esta  $(\mathbf{R})$

$$(\mathbf{R}^{-1}) = (\mathbf{R}_z(\phi)^{-1})(\mathbf{R}_x(\theta)^{-1}) = (\mathbf{R}_z(-\phi))(\mathbf{R}_x(-\theta)).$$

## Dinámica de las partículas: movimiento unidimensional

Se llama dinámica al estudio del movimiento de los cuerpos y de las relaciones entre este movimiento y las fuerzas que lo producen. Hay diversos puntos de partida para el estudio de la dinámica de los cuerpos puntuales (o puntos materiales). En nuestro caso, lo haremos partiendo de las tres leyes del movimiento de Newton.

### 4-1 Primera ley del movimiento de Newton

Esta primera ley puede parecerse evidente por nuestra diaria experiencia. Establece que "un cuerpo continúa en estado de reposo o con un movimiento uniforme rectilíneo, a menos que sea impelido a cambiar dicho estado por fuerzas que actúen sobre él".

Se observará que esta ley está de acuerdo con nuestras observaciones diarias de que los cuerpos cambian su velocidad solamente por interacción con otros cuerpos. Describiremos esta interacción diciendo que los cuerpos ejercen fuerzas mutuas entre sí. Se puede concluir lógicamente que un cuerpo aislado que no interactúe con ningún otro cuerpo, no tendrá ninguna fuerza que actúe sobre él para cambiar su movimiento. Luego, se observará que la velocidad permanece constante y el movimiento se verificará en línea recta.

Habiendo estudiado sistemas de coordenadas en movimiento, nos daremos cuenta que la ley anterior no sería la descripción cinemática correcta del movimiento de un cuerpo aislado en todos los sistemas de coordenadas. Por ejemplo, un cuerpo que se observa en reposo en un sistema, en otro, que gire con respecto al primero, se verá que se mueve en una circun-

ferencia. Entonces, sólo en casos muy especiales de sistemas de coordenadas, el movimiento de un cuerpo aislado sin interacciones con otros se podrá describir cinemáticamente con corrección como lo establece dicha primera ley de Newton. Estos sistemas de coordenadas especiales se llaman *inerciales*. De esto, vemos que la primera ley define, pero no identifica, un sistema inercial, sistema de coordenadas en el cual se admitirá que se cumple también la segunda ley de Newton, de la que luego hablaremos.

Obsérvese que un sistema de coordenadas que se mueve con velocidad constante con respecto a otro que sabemos que es inercial, será también inercial. Esto se deduce de la ecuación (3-2), que nos dice que si la velocidad  $\mathbf{v}'$  de un punto en un sistema (con prima) es constante, la velocidad  $\mathbf{v}$  del mismo punto en otro (sin prima) que se mueva con respecto al primero con velocidad constante  $-\mathbf{V}$  será también constante, puesto que

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \quad (4-1)$$

El concepto de sistema de coordenadas inercial es muy importante en física, pues es con respecto a un sistema de este tipo que se establecen las leyes fundamentales de la física. Es, además, una de las suposiciones básicas de la teoría especial o restringida de la relatividad, la cual establece las relaciones entre los valores de las cantidades físicas medidas por distintos observadores inerciales, por la que las leyes fundamentales de la física pueden expresarse de tal manera que tomen la misma forma matemática en todos los sistemas inerciales. Es decir que, por ejemplo, si  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ , son tres cantidades físicas vectoriales en función de la posición y el tiempo, que están relacionadas en una forma relativamente invariante en un sistema inercial por la ecuación

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}, \quad (4-2)$$

entonces,  $\mathbf{A}'$ ,  $\mathbf{B}'$  y  $\mathbf{C}'$ , que indican las mismas cantidades en otro sistema inercial, estarán semejantemente relacionadas por

$$\mathbf{A}' \times \mathbf{B}' = \mathbf{C}'. \quad (4-3)$$

En otras palabras, las leyes fundamentales de la física se pueden poner en una forma matemática que sea invariante a una transformación de su descripción de un sistema de coordenadas inercial a otro.

A menos que indiquemos otra cosa, en todo lo que sigue consideraremos que el movimiento de la partícula estudiada se realiza en un sistema inercial. La segunda ley del movimiento que sigue se formula, y se supone que sólo se verifica, en un sistema inercial. Como veremos, al tratar la relatividad (Cap. 13), esta segunda ley, tal como se formula a continuación, no adopta una forma relativísticamente invariante.



#### 4-2 Segunda ley del movimiento de Newton: conceptos de masa y fuerza

La segunda ley del movimiento relaciona el cambio en el movimiento de un cuerpo con la interacción entre éste y otros cuerpos. Esta interacción se mide por una cantidad física denominada *fuerza*.

Antes de establecer esta ley, definiremos la cantidad física llamada *masa*. Entender este concepto es indispensable para comprender el significado físico de fuerza.

Para llegar al concepto de masa, consideremos un experimento hipotético en el que dos partículas interactúan, estando aisladas de todas las demás interacciones. Decimos que este experimento es hipotético porque en realidad no estamos en situación de realizarlo realmente, pues influiría en él la acción sobre las dos partículas de la gravedad de la Tierra. Podremos, sin embargo, imaginar las dos partículas sobre un plano horizontal sin rozamiento, cuyo plano hará que sea despreciable la acción de la gravedad sobre aquéllas. La interacción entre las partículas se puede deber, por ejemplo, al hecho de que tengan cargas eléctricas (y sabemos que los cuerpos cargados eléctricamente actúan mutuamente entre sí), o puede deberse también a estar, ambas, unidas a los extremos de un resorte cuyo efecto en el movimiento sea pequeño y, por lo tanto, despreciable.

De nuestra experiencia diaria sobre el movimiento de los cuerpos, sabemos que debido a su interacción recibirán aceleraciones directamente opuestas a lo largo de la recta que une las dos partículas (fig. 4-1). Además, independientemente de la intensidad de la interacción, la razón de las magnitudes de las aceleraciones de las dos partículas será constante.\* Esto es

$$a_1 = \lambda_{12} a_2. \quad (4-4)$$

Si se hace el mismo experimento con la partícula 1 y una tercera partícula, el resultado será similar:

$$a_1 = \lambda_{13} a_3, \quad (4-5)$$

una nueva repetición, ahora con las partículas 2 y 3, nos dará

$$a_2 = \lambda_{23} a_3. \quad (4-6)$$

\* Una de las suposiciones básicas de la mecánica clásica es que  $\lambda_{ij}$  de la ecuación (4-4) es una constante independiente de las velocidades de las partículas, lo cual representa una buena aproximación cuando éstas se mueven a velocidades pequeñas comparadas con la de la luz, como se comprueba por los resultados satisfactorios que se hallan en mecánica clásica para dichas partículas. Sin embargo, para velocidades próximas a la de la luz esto deja de ser válido.

Una vez más, la experiencia diaria nos indica que debe haber alguna relación entre  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{13}$  y  $\lambda_{23}$ . O sea, que debemos esperar encontrar como resultado de un experimento real

$$\lambda_{12} \lambda_{23} = \lambda_{13}. \quad (4-7)$$

Siendo cierto esto, es posible asignar a cada partícula un número  $m$ , tal que:

$$\lambda_{12} = \frac{m_2}{m_1}, \quad \lambda_{13} = \frac{m_3}{m_1} \quad \text{y} \quad \lambda_{23} = \frac{m_3}{m_2}. \quad (4-8)$$

Este número  $m$  es lo que denominamos *masa* de la partícula. Observemos que una vez fijada  $m_1$  como masa de la partícula 1, las demás masas de las

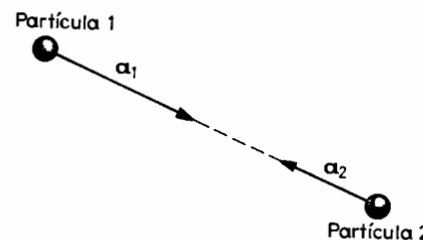


FIG. 4-1. Interacción entre dos partículas.

otras partículas quedan determinadas y se pueden hallar haciendo experimentos como los descritos, en que intervenga la partícula 1 y la estudiada. La selección de la unidad de masa es, por consiguiente, arbitraria. En este texto, usaremos el kilogramo-masa del sistema MKS como unidad.

Recordando que las aceleraciones son de sentidos opuestos, podemos volver a escribir la ecuación (4-4), en función de las masas asignadas a cada partícula, por

$$m_1 a_1 = -m_2 a_2. \quad (4-9)$$

La cantidad  $m_1 a_1$  se toma como la medida cuantitativa de la interacción, y la designaremos como la *fuerza F* que la partícula 2 ejerce sobre la 1. De acuerdo con esto, el concepto de fuerza queda definido por la ecuación:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (4-10)$$

La fuerza que actúa sobre una partícula es el producto de la masa de ésta por la aceleración producida por su interacción con otros cuerpos.

Esta es, en esencia, la segunda ley de Newton del movimiento, que podemos expresar más correctamente diciendo que "la razón al tiempo del cambio o variación de la cantidad de movimiento de una partícula es

proporcional a la fuerza aplicada a ella y se presenta en la dirección y el sentido de dicha fuerza”.

La cantidad de movimiento (*momentum* en inglés),\*  $\mathbf{p}$ , de una partícula se define por el producto de la masa de ésta por su velocidad,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (4-11)$$

En función de  $\mathbf{p}$  la ecuación (4-10) se expresará por

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (4-12)$$

que es la expresión matemática correcta de la segunda ley del movimiento.

La unidad de fuerza en el sistema MKS de unidades se determina con la ecuación (4-10) en función de las unidades de masa, longitud y tiempo. Definimos la unidad de fuerza, a la que se llama *newton*, por la fuerza que da a una partícula de un kilogramo de masa una aceleración de un metro por segundo, por segundo. Dimensionalmente,

$$1 \text{ n} = 1 \frac{\text{Kg-m}}{\text{seg}^2}.$$

### 4-3 Tercera ley de Newton sobre el movimiento

La tercera ley del movimiento está expresada por la ecuación (4-9) y establece que “A toda acción corresponde una reacción igual y de sentido contrario”.

Debemos aclarar que la tercera ley de Newton sólo se aplica a la interacción entre dos cuerpos. Las fuerzas que dos cuerpos ejercen entre sí son siempre iguales y de sentidos contrarios.

Los problemas en los que, debido a la interacción entre dos partículas, una o ambas radian energía o bien se crean otras partículas, no se pueden clasificar como problemas de interacción entre dos cuerpos, y en ellos falla la tercera ley de Newton. No obstante, en cualquier sistema cerrado de partículas (ver Cap. 8) admitiremos que la suma de fuerzas que las partículas ejercen entre sí se anula,

$$\sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i = 0, \quad (4-13)$$

\* Actualmente se está generalizando la palabra “ímpetu”. También suele llamarse *cantidad de movimiento lineal*, para distinguirla del momento de la misma que se llama *cantidad de movimiento angular*. (N. del T.)

donde  $\mathbf{F}_{ij}$  es la fuerza que la partícula  $j$  ejerce sobre la  $i$ . En el caso especial de la interacción de dos partículas, tendremos

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 = 0 \quad (4-14)$$

o

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0.$$

De la ecuación (4-13) podemos obtener el importante teorema de la conservación de la cantidad de movimiento lineal total de un sistema aislado de partículas:

$$\sum_i \mathbf{p}_i = \text{const.} \quad (4-15)$$

Este teorema se explicará en el Capítulo 8.

### 4-4 Problemas unidimensionales

En los problemas corrientes de mecánica se suelen especificar las fuerzas que actúan sobre una partícula junto con los valores iniciales de la posición y la velocidad de la misma, y se pide luego hallar la órbita recorrida por la partícula en función del tiempo. La órbita en función del tiempo se especifica por la dependencia del tiempo del vector de posición:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

y representa la solución de la ecuación de movimiento. La ecuación (4-10) proporciona tres ecuaciones diferenciales simultáneas de movimiento, al menos de segundo orden, cuyas soluciones explícitas no siempre pueden encontrarse, en cuyo caso se recurre a soluciones numéricas o aproximadas del problema. Nos limitaremos a los problemas más simples, en que podamos hallar soluciones exactas o en los que podamos encontrar soluciones aproximadas de importancia.

La descomposición de la ecuación (4-10) en sus tres ecuaciones componentes, podrá darnos una o más ecuaciones diferenciales, cada una de las cuales sólo contenga una de las coordenadas utilizadas en la descripción del movimiento de la partícula. La resolución de una de estas ecuaciones, que llamaremos ecuación unidimensional de movimiento, es independiente de las otras dos. Consideraremos fortuito si, con una elección adecuada de coordenadas, podemos obtener una o más de dichas ecuaciones componentes.

Generalmente, en los problemas en que no se puede hacer la separación de las ecuaciones de movimiento en una o más ecuaciones unidimensionales no se pueden hallar soluciones analíticas explícitas.

Por lo tanto, nos limitaremos a problemas que (con una elección apropiada de coordenadas) puedan separarse en una o más ecuaciones unidimensionales independientes de movimiento. La resolución de dichas ecuaciones nos permitirá, a su vez, resolver las restantes que no fueran originalmente unidimensionales.

En este capítulo consideraremos las resoluciones de varias ecuaciones diferenciales unidimensionales de movimiento, que se encuentran frecuentemente y cuyas soluciones explícitas son fácilmente obtenibles.

Por simplicidad, al llegar a dichas ecuaciones, nos limitaremos en este capítulo al movimiento de una partícula en línea recta. En estos problemas sólo existe una ecuación componente de movimiento no trivial. Si la componente de la fuerza a lo largo de esta recta es función del tiempo, de la posición y de la velocidad de la partícula, entonces, la ecuación de movimiento tendrá la forma

$$F(x, \dot{x}, t) = m\ddot{x}, \quad (4-16)$$

donde se ha elegido el eje  $x$  coincidente con la recta de movimiento. Resolveremos, a continuación, la ecuación (4-16) para varios casos de fuerzas.

#### 4-5 Fuerza en función únicamente del tiempo

Si la fuerza sólo es función del tiempo, la ecuación de movimiento es

$$F(t) = m\ddot{x}. \quad (4-17)$$

Esta ecuación se puede integrar para obtener la velocidad en función del tiempo. Luego, integrando (4-17) con respecto al tiempo desde el inicial,  $t_0$ , al final,  $t$ , tendremos

$$m(v - v_0) = \int_{t_0}^t F(\lambda) d\lambda, \quad (4-18)$$

puesto que

$$\int_{t_0}^t \ddot{x} dt = v(t) - v(t_0).$$

En la ecuación (4-18),  $\lambda$  es una variable auxiliar de integración (sin significado) y  $v_0 = v(t_0)$ . La integral de la fuerza con respecto al tiempo que aparece en el segundo miembro de la ecuación (4-18) se conoce como el *impulso* que la fuerza  $F$  imparte a la partícula. Luego, esta es la ecuación

del *teorema del impulso y la cantidad de movimiento* que establece que el impulso impartido a una partícula es igual al cambio o variación de su cantidad de movimiento lineal.

Una siguiente integración de la ecuación (4-18) nos lleva a la solución deseada

$$x(t) - x(t_0) = v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t F(\lambda) d\lambda. \quad (4-19)$$

Si las integraciones necesarias de la ecuación (4-19) se pueden realizar explícitamente, ésta dará una solución explícita para la posición de la partícula en función del tiempo. Si las integraciones no pueden realizarse explícitamente, aún podremos realizar una integración numérica y hallar una solución numérica del problema.

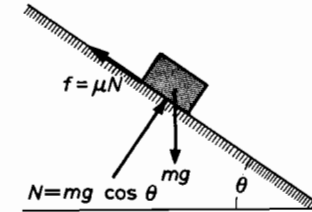


FIG. 4-2. Partícula que desciende deslizando sobre un plano inclinado.

Un caso especial de fuerza que se puede considerar función del tiempo es el de una fuerza constante. Con este tipo de fuerza la ecuación (4-18) nos da, para la velocidad de la partícula en función del tiempo, el resultado

$$v = v_0 + a(t - t_0), \quad (4-20)$$

donde  $a = F/m$  es la aceleración constante de la partícula. Integrando la (4-20) tendremos la posición de la partícula

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2. \quad (4-21)$$

Las ecuaciones (4-20) y (4-21) deben ser familiares para el lector desde un primer curso de mecánica, que trata corrientemente con extensión de problemas de fuerzas constantes. Se debe recordar que la fuerza gravitacional que actúa sobre una partícula que se mueve cerca de la superficie de la Tierra se considera, para todos los fines prácticos, constante e igual a  $mg$ , donde  $g$  es la aceleración proporcionada a la partícula cuando sobre ella actúa una fuerza gravitacional constante. Otro ejemplo es el caso de una partícula que se mueve en un plano inclinado bajo la acción de la citada

fuerza gravitacional y de otra de rozamiento (fig. 4-2), cuya ecuación recordará el lector que es

$$mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta = m\ddot{x}, \quad (4-22)$$

siendo  $\mu$  el coeficiente de rozamiento por deslizamiento entre la partícula y el plano.

La fuerza constante se puede considerar también como un ejemplo especial de una fuerza que sólo depende de la posición. Esto lo veremos en la próxima sección.

Como un segundo ejemplo de la resolución de la ecuación de movimiento en que interviene una fuerza dependiente del tiempo, consideraremos el problema de una partícula que en el instante  $t = 0$  tiene la posición  $x_0$ , la velocidad  $v_0$  y sobre la que actúa una fuerza sinusoidal

$$F = F_0 \sin \omega t.$$

La ecuación de movimiento

$$\ddot{x} = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

se puede integrar fácilmente para obtener la velocidad en función del tiempo,

$$\dot{x} = v_0 + \frac{F_0}{m\omega} - \frac{F_0}{m\omega} \cos \omega t,$$

y, volviendo a integrar, encontraremos la posición en función del tiempo

$$x = x_0 + \left( v_0 + \frac{F_0}{m\omega} \right) t - \frac{F_0}{m\omega^2} \sin \omega t.$$

Este último problema es de interés en relación con la dispersión de las radiaciones electromagnéticas en la ionosfera, producida por los electrones libres. La dispersión de una onda electromagnética se produce a causa de que los electrones absorben energía de las ondas incidentes y luego la emiten en forma de radiación en todas direcciones.

Un electrón acelerado radia energía electromagnética, y el campo electromagnético radiado es una función lineal de la aceleración del electrón. Como sólo el término sinusoidal de la solución anterior contribuye a la aceleración del electrón, se deduce (despreciando el efecto Doppler) que la energía radiada tiene la misma frecuencia que la onda electromagnética incidente. Además, la energía radiada tendrá una relación de fase definida con la onda incidente. Esto significa que la radiación de todos los electrones se combinará en forma coherente, conduciendo el efecto neto a una onda que en parte se refleja y en parte se transmite de una manera seme-

jante a la reflexión y transmisión de la luz cuando pasa del aire al vidrio, o viceversa (véase Capítulo 12). La cantidad de energía reflejada depende de la velocidad de propagación de la fase dentro de la ionosfera de la onda electromagnética resultante. Esta velocidad de la fase es mayor que la correspondiente a la onda en el aire,\* y es función de la frecuencia.

#### 4-6 Fuerza en función de la posición: conceptos de trabajo y energía

En física se presentan muchos casos de fuerzas que son función de la posición. Dos ejemplos con los que trataremos muchas veces son las fuerzas gravitacionales y eléctricas.

La ecuación unidimensional del movimiento que describe el de una partícula bajo la acción de una fuerza que sólo sea función de la posición es

$$F(x) = m \frac{dv}{dt}. \quad (4-23)$$

Vemos que los dos miembros de esta ecuación son fácilmente integrables con respecto a la variable de posición  $x$ . La integral del primer miembro representa el *trabajo* que la fuerza  $F$  realiza sobre la partícula mientras ésta se mueve desde la posición inicial  $x_0$  a la final  $x$ ,

$$\text{Trabajo} = \int_{x_0}^x F(x) dx. \quad (4-24)$$

La unidad de trabajo en el sistema MKS es el julio (o *joule*), que equivale a un newton-metro. La integral del trabajo se puede hallar siempre, ya sea explícita o numéricamente. En uno u otro caso podemos definir una función  $U(x)$  tal que

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (4-25)$$

o

$$U(x) = -\int^x F(x) dx.$$

Esta nos permite expresar el trabajo por la diferencia del valor de  $U(x)$  en los dos puntos extremos

\* Esto no está en contradicción con la teoría de la relatividad, que establece que la energía no puede transmitirse con una velocidad superior a la de la luz. Para el estudio de este punto y para una deducción aclaratoria del índice de refracción de un gas electrónico, a partir de la respuesta o reacción de los electrones a la onda electromagnética, consúltese *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I, Capítulo 31. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963.

$$W = \int_{x_0}^x F(x) dx = -U(x)|_{x_0}^x = U(x_0) - U(x). \quad (4-26)$$

La función  $U(x)$  es la *energía potencial* que tiene la partícula cuando se encuentra situada en el punto  $x$ . Luego, hemos encontrado que el trabajo realizado por la fuerza  $F(x)$  es igual a la diferencia entre los valores inicial y final de la energía potencial de la partícula.

El segundo miembro de la ecuación (4-23) también se puede expresar como una diferencial perfecta. Cambiando la variable de integración  $x$  por  $t$  (esto es, haciendo  $dx = v dt$ ), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x m \frac{dv}{dt} dx &= \int_{t_0}^t m \frac{dv}{dt} v dt = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) dt \\ &= \frac{1}{2} mv^2 \Big|_{t_0}^t = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2. \end{aligned} \quad (4-27)$$

La cantidad  $\frac{1}{2}mv^2$  es la *energía cinética* de la partícula, que de aquí en adelante representaremos por el símbolo  $T$ :

$$T = \frac{1}{2}mv^2. \quad (4-28)$$

La unidad de energía cinética en el sistema MKS es, igual que la de trabajo, el julio (o *joule*).

Hemos encontrado que, para cualquier fuerza  $F(x)$ ,

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_0}^x F(x) dx = U(x_0) - U(x) = T(x) - T(x_0) \\ U(x) + T(x) &= U(x_0) + T(x_0). \end{aligned} \quad (4-29)$$

La ecuación (4-29) expresa un principio físico muy importante, el de *conservación de la energía total*:

$$T(x) + U(x) = E. \quad (4-30)$$

Es aplicable a cualquier problema unidimensional en que la fuerza sólo sea función de la posición. La ecuación (4-29) recibe también el nombre de *principio del trabajo y la energía* y establece que el trabajo efectuado por una fuerza sobre una partícula es igual al cambio o variación de su energía cinética.

Observemos que la función de energía potencial definida en la ecuación (4-25) queda indeterminada por el valor de una constante, la constante de integración. Sin embargo, esto no importa, puesto que en cualquier aplicación sólo aparecerá la diferencia de energías potenciales. Es importante recordar esto, pues nos permitirá escoger arbitrariamente el punto en

que la partícula tenga la energía potencial cero. Además nos permitirá, en cualquier momento que creamos conveniente hacerlo, añadir en todos los puntos la misma cantidad constante a la energía potencial de una partícula sin afectar los resultados.

► Como ilustración, consideremos el movimiento vertical de una partícula de masa  $m$ , unida a un resorte, que actuará sobre ella al mismo tiempo que la fuerza de gravedad (fig. 4-3). Este es un problema que resulta molesto a algunos estudiantes.

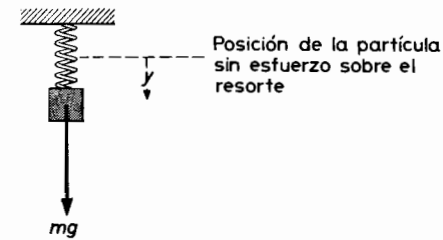


FIG. 4-3. Oscilador armónico simple.

La fuerza gravitacional tiene un valor constante y actúa hacia abajo, como se indica. Por el contrario, la fuerza del resorte sobre la partícula es función del cambio de longitud del mismo. Su magnitud es dada por

$$F_s = ky,$$

donde  $y$  representa el incremento de la longitud del resorte. Si  $y$  se considera positivo en el sentido hacia abajo, entonces la magnitud y el sentido de la fuerza del resorte sobre la partícula estarán dados por

$$F_s = -ky.$$

La fuerza vertical total que actúa sobre la partícula de masa  $m$  será, por consiguiente,

$$F = -ky + mg,$$

que nos da la función de energía potencial

$$\begin{aligned} U(y) &= - \int^y F dy = \frac{1}{2} ky^2 - mgy \\ &= \frac{1}{2} k \left( y - \frac{mg}{k} \right)^2 - \frac{m^2 g^2}{2k} \end{aligned}$$

Si hacemos la transformación de coordenadas

$$y = y' + \frac{mg}{k},$$

el origen de coordenadas se cambia al punto

$$y = \frac{mg}{k},$$

que es la posición de equilibrio del sistema. Ahora podemos escribir la energía potencial en función de  $y'$  (el desplazamiento de la partícula desde su posición de equilibrio)

$$U(y') = \frac{1}{2}ky'^2 - \frac{m^2g^2}{2k}.$$

Esta función de energía potencial nos da el mismo resultado, para el movimiento de la partícula, que la función de energía potencial

$$U(y') = \frac{1}{2}ky'^2,$$

que, a su vez, se puede obtener de la expresión anterior, simplemente sumando el valor constante  $m^2g^2/2k$  al valor de la energía potencial en todos los puntos. El principio de conservación de la energía total nos permite expresar la velocidad de la partícula en función de su posición. Para el ejemplo en estudio, encontramos que

$$\frac{1}{2}ky'^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}'^2 = \text{const} = E,$$

o sea, que la velocidad de la partícula en el punto  $y'$  es

$$|\dot{y}'| = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}y'^2}.$$

La fuerza que actúa en la partícula cuando se encuentra en el punto  $y'$  es

$$F = -\frac{dU}{dy'} = -ky'.$$

Como demostraremos en la Sección 4-9, el desplazamiento de la partícula desde su posición de equilibrio varía sinusoidalmente con el tiempo. A este tipo de partícula, que se mueve bajo la acción de una fuerza de restauración proporcional al desplazamiento, la llamaremos oscilador armónico simple. ◀

Volviendo al problema que estudiamos, de la ecuación (4-30), obtenemos

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = E - U(x)$$

o sea,

$$v = \pm \sqrt{(2/m)[E - U(x)]}. \quad (4-31)$$

La selección del signo más o el menos antes de la raíz cuadrada depende de que la partícula se mueva en el sentido en que  $x$  aumenta o en el que

disminuye, lo que puede averiguarse mediante los valores inicial y subsiguientes de  $v$ , tal como veremos en la próxima sección. La ecuación (4-31), expresada en la forma

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{(2/m)[E - U(x)]}} = dt,$$

se puede integrar para hallar  $t$  en función de  $x$ :

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{\sqrt{m} dx}{\pm \sqrt{2[E - U(x)]}}. \quad (4-32)$$

Y hallando después de resuelta esta última ecuación  $x$  en función de  $t$  tendremos la solución buscada.

Debemos hacer observar que el tiempo  $t$  es una cantidad constantemente creciente. Por lo tanto, al integrar el segundo miembro de la ecuación (4-32), debemos escoger el signo más cuando  $x$  está creciendo y el menos cuando  $x$  decrece. La determinación de los puntos de retorno, en que el signo de la velocidad cambia, se estudiará en la próxima sección.

► Antes de hacer un análisis más completo, consideremos otra vez el caso de una fuerza constante, para la cual la energía potencial será

$$U(x) = -\int^x F dx = -Fx,$$

de donde, por el principio del trabajo y la energía, obtenemos

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = F(x - x_0)$$

o sea,

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2F}{m}(x - x_0) = v_0^2 + 2a(x - x_0). \quad (4-33)$$

Esta ecuación es la que aparece en los cursos elementales de física.

Procederemos ahora a determinar  $x(t)$  de la ecuación (4-33). Veamos que

$$\frac{dx}{\pm \sqrt{v_0^2 - 2ax_0 + 2ax}} = dt,$$

que al integrar (suponiendo  $\dot{x} > 0$ ) nos da

$$\frac{1}{a} \sqrt{v_0^2 - 2ax_0 + 2ax} \Big|_{x_0}^x = t - t_0. \quad (4-34)$$

En la ecuación (4-34) se puede despejar  $x$  dando la conocida solución

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2,$$

que se obtuvo también en la sección anterior. ◀

#### 4-7 Fuerza que es función sólo de la posición: movimiento limitado e ilimitado

El problema de una fuerza que sólo depende de la posición de la partícula es muy importante. En esta sección estudiaremos la naturaleza cualitativa del movimiento realizado por una partícula bajo la acción de una fuerza de este tipo. Como se indicó en la sección anterior, la fuerza  $F(x)$  se deriva a partir de una función de energía potencial  $U(x)$ ; específicamente

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}. \quad (4-35)$$

También vemos que bajo la acción de esta fuerza la energía total,  $E$ , que es la suma de las energías potencial y cinética, es una constante del movimiento:

$$T + U = E. \quad (4-36)$$

Consideremos ahora una gráfica de la función de energía potencial  $U(x)$  en función de  $x$ . La figura (4-4) muestra una función arbitraria de dicha energía, transportada en función de la coordenada (abscisa) de posición. Si en la misma gráfica trazamos luego una recta que represente la magnitud de la energía constante, la diferencia entre la ordenada de la curva de energía potencial y la constante  $E$  en un punto  $x$  representará la energía cinética que tiene la partícula en ese punto. Indicamos este hecho para un punto específico en la gráfica de la figura (4-4). Siendo proporcional al cuadrado de la velocidad de la partícula, la energía cinética debe ser, necesariamente, una cantidad positiva en todo instante. Se deduce de esto que el valor,  $E$ , de la energía total en cualquier punto físico (o sea, un punto en que pueda encontrarse la partícula) tiene que ser mayor que el de la energía potencial en los puntos accesibles físicamente. En otras palabras, la recta de energía total debe quedar por encima de la curva de energía potencial en todos los puntos físicamente accesibles a la partícula. Cualquier región en que no suceda esto no será físicamente accesible para el problema considerado.

Para las gráficas de energía potencial y total de la figura 4-4 las regiones entre los puntos  $x_1$  y  $x_2$  y los puntos  $x_3$  y  $x_4$ , o sea, las dos regiones II y IV son inaccesibles para la partícula. Todas las demás regiones de la figura son físicamente accesibles. Sin embargo, en cualquier problema, la partícula permanecerá en la región en que esté situada inicialmente. Por ejemplo, supongamos que la partícula está originalmente en la región I y que se mueva en el sentido creciente de  $x$  hacia  $x_1$ . Al llegar al punto  $x_1$  tendrá

una energía cinética nula, puesto que en este punto la energía potencial es igual a la total. Esto significa que la partícula quedará en reposo al llegar a  $x_1$ . Un instante después volverá a estar en movimiento regresando por donde vino. Como no puede entrar en la región II, tendrá, por consiguiente, que permanecer en la I.

Otra manera de reconocer que la partícula volverá atrás recorriendo en sentido inverso su trayectoria, consiste en observar que la pendiente de la

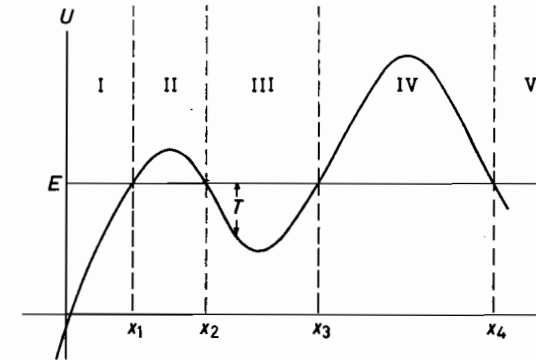


FIG. 4-4. Diagrama de energía.

curva de energía potencial es positiva en el punto  $x = x_1$ . Una pendiente positiva significa que la fuerza que actúa sobre la partícula en dicho punto, que es la derivada de  $U(x)$  con respecto a  $x$  con signo menos, o sea negativa, estará dirigida en el sentido negativo de  $x$ . Luego, la partícula comenzará a moverse en el sentido negativo de  $x$ .

El punto  $x = x_1$  en que  $U(x) = E$  se llama *punto de retorno*, pues es donde la partícula se detiene e instantáneamente comienza a moverse en sentido contrario.

Haciendo un análisis similar, concluiremos que los puntos  $x = x_2$ ,  $x = x_3$  y  $x = x_4$  son también puntos de retorno y que la partícula una vez situada en cualquiera de las regiones I, III o V, permanecerá en ella. Observemos también que las regiones I y V sólo tienen cada una un punto de retorno, extendiéndose hasta el infinito en el otro extremo. Las regiones como éstas, en que la partícula se puede mover hasta el infinito, se llaman *regiones ilimitadas o abiertas*, mientras que las regiones como la III, que tienen dos puntos de retorno en la parte finita del espacio se denominan *regiones limitadas o acotadas*.

El movimiento de una partícula en una región limitada se denomina movimiento limitado. Si el movimiento de la partícula es unidimensional,



debe ser, necesariamente, periódico, y se repetirá idénticamente después de un intervalo de tiempo  $\tau$ , llamado período del movimiento.

#### 4-8 Equilibrio estable e inestable

En la función de energía potencial de la figura 4-4 vemos que existen puntos en los que la pendiente se anula:

$$\frac{dU}{dx} = 0. \quad (4-37)$$

En dichos puntos, la fuerza es cero y una partícula colocada en ellos con velocidad cero permanecerá en reposo indefinidamente.

Se dice que una partícula está en equilibrio, cuando la fuerza que actúa sobre ella se anula. Ahora bien, existe una diferencia entre los puntos de equilibrio en que la energía potencial es mínima y aquellos en que tiene un valor máximo. En el primer caso, si sacamos a la partícula de la posición de equilibrio, dándole cierta energía cinética o desplazándola ligeramente y soltándola luego a partir del reposo en su nueva posición, tendrá una energía total mayor que el valor mínimo de la energía potencial (fig. 4-5). Entonces se moverá en una región limitada con un movimiento periódico. Dichos puntos de equilibrio a un lado y otro de los cuales se

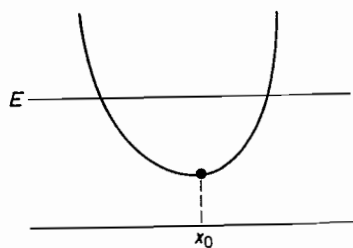


FIG. 4-5. Punto de equilibrio estable.

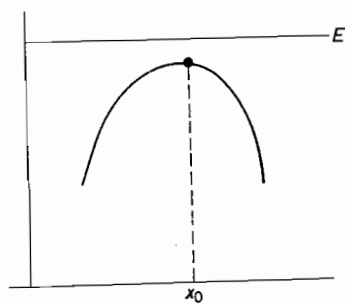


FIG. 4-6. Punto de equilibrio inestable.

moverá una partícula, que ha sido sacada de su posición de equilibrio, con un movimiento periódico en una región limitada, se llaman *puntos de equilibrio estable*.

Por el contrario, si la partícula está en un punto de máxima energía potencial, un ligero desplazamiento de su equilibrio hará que la partícula se mueva, cuando se la suelta, separándose cada vez más de su punto de

equilibrio, como podemos deducir de nuestro análisis del movimiento de una partícula desde su punto de retorno (fig. 4-6).

Por la misma causa, si se comunicara cierta energía cinética a la partícula en un punto de máxima energía potencial, también continuaría separándose de dicho punto.

Por esta razón, un punto de máxima energía potencial se denomina de *equilibrio inestable*.

#### 4-9 Movimiento a un lado y otro de un punto de equilibrio estable: el oscilador armónico simple

El movimiento de una partícula que oscila a un lado y otro de un punto de equilibrio estable es uno de los problemas más importantes de física. A continuación estudiaremos el movimiento unidimensional de dicho tipo. Consideraremos que el desplazamiento máximo de la partícula desde su posición de equilibrio es pequeño, entendiéndose por desplazamiento máximo pequeño, uno para el cual (y, por tanto, naturalmente también para todos los desplazamientos menores), se puede calcular aproximadamente la función de energía potencial, reteniendo solamente el primer término importante que no se anule en su desarrollo por la serie de Taylor.

El desarrollo en serie de Taylor de una función  $f(x)$  está dado por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) [x - x_0]^n, \quad (4-38)$$

donde

$$f^{(n)}(x_0) = \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0}. \quad (4-39)$$

Recordando que en un punto de equilibrio estable  $dU/dx = 0$ , se deduce que

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2!} U^{(2)}(x_0) (x - x_0)^2 + \dots \quad (4-40)$$

El primer término  $U(x_0)$  es constante, y representa el valor de la energía potencial en  $x = x_0$ . Ahora bien, dijimos anteriormente que la energía potencial siempre se podía ajustar de tal forma que valiera cero en un punto específico (Sección 4-6). Podemos hacer que sea así en el punto  $x = x_0$ , es decir, hacemos  $U(x_0) = 0$ . Con esta elección tendremos, en una primera aproximación

$$U(x) = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2, \quad (4-41)$$



donde hemos tomado

$$k = U^{(2)}(x_0). \quad (4-42)$$

Como, en un punto de energía potencial mínima

$$\frac{d^2U}{dx^2} > 0, \quad (4-43)$$

la constante

$$k > 0. \quad (4-44)$$

Aún se puede simplificar más el problema cambiando el origen del sistema de coordenadas al punto  $x = x_0$ , con lo que  $x_0$  será nulo y la ecuación (4-42) se convierte en

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (4-45)$$

Como, para esta energía potencial, la fuerza, que es igual a la negativa de la derivada de dicha energía con respecto a  $x$ , se expresa, en cualquier punto  $x$ , por

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx. \quad (4-46)$$

Por otra parte, debemos considerar que, como el movimiento a un lado y otro de un punto de equilibrio estable es limitado, existirá un desplazamiento máximo respecto a éste que se halla con la ecuación

$$U(x_{\text{máx}}) = E \quad \text{o} \quad \frac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2 = E.$$

Cuya solución es

$$x_{\text{máx}} = \pm A = \pm \sqrt{2E/k}. \quad (4-47)$$

La ecuación del movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza de restauración proporcional al desplazamiento de la partícula de su posición de equilibrio, es

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (4-48)$$

Para resolver esta ecuación seguiremos el procedimiento indicado en la Sección 4-6. Sabemos que la energía potencial está dada por

$$U = \frac{1}{2}kx^2.$$

Poniendo este valor en la ecuación (4-31), obtenida del principio de conservación de la energía total,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x),$$

tenemos

$$\dot{x} = \pm \sqrt{(2E/m) - (kx^2/m)} = \pm \sqrt{\omega_0^2(A^2 - x^2)}. \quad (4-49)$$

Estableciendo

$$\frac{2E}{m} = \omega_0^2 A^2 \quad (4-50)$$

y

$$k = m\omega_0^2, \quad (4-51)$$

llegamos a la ecuación

$$\omega_0(t - t_0) = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \sqrt{A^2 - x^2}}. \quad (4-52)$$

Al integrar la ecuación (4-52) debemos tener cuidado en la selección de los signos más o menos, como se indicó en la sección 4-6.

Para realizar la integración, haremos la sustitución

$$x = A \sin \theta, \quad dx = A \cos \theta d\theta;$$

y para tener la seguridad de que el tiempo sea continuamente creciente, para velocidades iniciales positivas, escogeremos  $\theta_0$  con un valor entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ . Por el contrario, para valores iniciales negativos de la velocidad de la partícula  $\theta_0$  se elegirá con un valor entre  $\pi/2$  y  $3\pi/2$ .

Con esta elección de  $\theta_0$ , veremos que  $\theta$  crecerá continuamente y que, por lo tanto, podemos establecer

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \sqrt{A^2 - x^2}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{A \cos \theta d\theta}{\sqrt{A^2(1 - \sin^2 \theta)}} = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta.$$

En consecuencia

$$\omega_0(t - t_0) = \theta - \theta_0 = \sin^{-1} \frac{x}{A} - \sin^{-1} \frac{x_0}{A},$$

lo que nos da

$$x = A \sin [\omega_0(t - t_0) + \theta_0], \quad (4-53)$$

donde

$$\theta_0 = \sin^{-1} \frac{x_0}{A}. \quad (4-54)$$

Llegamos así a la conclusión de que, en una primera aproximación, el movimiento de una partícula a un lado y otro de un punto de equilibrio estable es una oscilación sinusoidal con un período

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (4-55)$$

\* En lugar de  $\sin^{-1}$  se puede usar  $\text{arc sen}$ .

y un desplazamiento máximo o amplitud

$$A = \sqrt{2E/m\omega_0^2}. \quad (4-56)$$

El movimiento de una partícula que varía sinusoidalmente con el tiempo, tal como se expresa en la ecuación (4-53), recibe el nombre de armónico simple. Dejamos al lector la verificación de que la ecuación (4-53) es una solución de la ecuación de movimiento (4-48).

► Como ejemplo, consideremos otra vez (sección 4-6) una partícula de masa  $m$  unida a un resorte de constante  $k$ , con libertad para moverse verticalmente (fig. 4-7). El sistema formado por la partícula y el resorte se

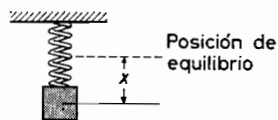


FIG. 4-7. Oscilador armónico simple.

encuentra en equilibrio cuando la fuerza gravitacional que actúa sobre la partícula queda equilibrada por la fuerza del resorte sobre la misma.

Cualquier desplazamiento  $x$  de esta posición de equilibrio cambiará la magnitud de la fuerza ejercida por el resorte, dando entonces una fuerza neta sobre la partícula:

$$F = -kx$$

Este es, exactamente, el tipo de fuerza que da a la partícula una oscilación armónica simple de frecuencia

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4-57)$$

La amplitud del movimiento, en este problema, depende de la posición y la velocidad iniciales de la partícula

$$A = \sqrt{2E/m\omega_0^2} = \sqrt{(v_0^2/\omega_0^2) + x_0^2}. \quad (4-58)$$

La fase  $\theta_0$  se determina a partir de la amplitud del desplazamiento inicial y la velocidad inicial, como indicamos antes. ◀

#### 4-10 Movimiento bajo la acción de una fuerza dependiente de la velocidad

Los problemas en que interviene una fuerza que sólo es función de la velocidad conducen a la ecuación de movimiento

$$F(v) = m\ddot{x}. \quad (4-59)$$

Hay varias formas de resolver esta ecuación. Por ejemplo, podemos expresar la ecuación (4-59) por

$$F(v) = m \frac{dv}{dt} \quad (4-60)$$

o bien, por

$$F(v) = mv \frac{dv}{dx}, \quad (4-61)$$

La última ecuación se obtuvo sustituyendo en la anterior  $dv/dt$  por  $(dv/dx)(dx/dt)$ .

Las dos últimas ecuaciones son ecuaciones diferenciales de primer orden y, por consiguiente, siempre tendrán soluciones. En la primera, obtenemos el tiempo en función de la velocidad

$$t - t_0 = \int_{v_0}^v \frac{m dv}{F(v)} \quad (4-62)$$

siendo  $v_0$  la velocidad de la partícula en el instante inicial,  $t_0$ . La segunda ecuación, cuando se halla la integral, da la posición en función de la velocidad,

$$x - x_0 = \int_{v_0}^v \frac{mv dv}{F(v)}. \quad (4-63)$$

Las ecuaciones (4-62) y (4-63), juntas, representan una solución paramétrica de la ecuación de movimiento. Si queremos, podemos eliminar la velocidad en las dos ecuaciones, con lo que obtendremos directamente la posición en función del tiempo.

Otra forma de hallar  $x$  en función de  $t$  es volver a integrar una u otra de las dos últimas ecuaciones, después de despejar primero la velocidad. Es decir, con la ecuación (4-62) se halla  $v$  en función de  $t$ , se vuelve a integrar  $v$  con respecto al tiempo y se halla la solución deseada,

$$x - x_0 = \int_{t_0}^t v dt. \quad (4-64)$$

Por otra parte, con la ecuación (4-63) tenemos  $v$  en función de  $x$ ,

$$\frac{dx}{dt} = v(x). \quad (4-65)$$

La integración de ésta da

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{v(x)}. \quad (4-66)$$

Para hallar  $x$  en función de  $t$  tendríamos que invertir la ecuación precedente, despejando  $x$  en función de  $t$ .

► Como ejemplo, consideraremos el problema de una partícula que se mueve en un medio resistente. Cuando la velocidad de la partícula es pequeña, la fuerza de amortiguamiento que se opone al movimiento es aproximadamente una función lineal de la velocidad,

$$F_{\text{amort}} = -m\kappa v, \quad (4-67)$$

donde  $m\kappa$  es una constante, siendo utilizado  $m$  para lograr que la solución tenga una forma simple.

Cuando la velocidad de la partícula es más alta, la fuerza de amortiguamiento es proporcional a una potencia mayor de la velocidad.

Considerando el caso de bajas velocidades, tendremos la ecuación de movimiento siguiente:

$$m \frac{dv}{dt} = -m\kappa v. \quad (4-68)$$

Integrando esta ecuación diferencial de primer orden, tenemos

$$\kappa(t - t_0) = -\ln \frac{v}{v_0}$$

o sea,

$$v = v_0 \exp[-\kappa(t - t_0)]. \quad (4-69)$$

Volviendo a integrar esta última se tiene la solución

$$x - x_0 = \frac{v_0}{\kappa} [1 - e^{-\kappa(t-t_0)}]. \quad (4-70)$$

Observemos que cuando el tiempo aumenta, la velocidad decrece, aproximándose a cero exponencialmente a medida que la partícula se acerca al punto

$$x_{\infty} = x_0 + \frac{v_0}{\kappa}. \quad (4-71)$$

Es interesante calcular el trabajo realizado por la fuerza amortiguadora y verificar que es igual a la pérdida en energía cinética de la partícula.

El trabajo total realizado es

$$W = \int_{x_0}^{x_{\infty}} F dx = - \int_{x_0}^{x_{\infty}} m\kappa v dx = - \int_{t_0}^{\infty} m\kappa v^2 dt.$$

Utilizando el valor de  $v$  dado por la ecuación (4-69), tenemos

$$W = - \int_{t_0}^{\infty} m\kappa v_0^2 e^{-2\kappa(t-t_0)} dt = - \frac{mv_0^2}{2},$$

que es lo que se quería demostrar. Similarmente, podemos comprobar que el impulso

$$I = \int_{t_0}^{\infty} F dt,$$

que la fuerza amortiguadora imparte a la partícula, es igual al cambio o variación de su cantidad de movimiento lineal:

$$\int_{t_0}^{\infty} F_{\text{amort}} dt = - \int_{t_0}^{\infty} m\kappa v_0 e^{-\kappa(t-t_0)} dt = -mv_0. \blacktriangleleft$$

► Otro interesante ejemplo que, junto con el anterior, nos describe el movimiento como proyectil de una partícula bajo la acción de la fuerza de gravedad y el amortiguamiento producido por el aire en el que se mueve la partícula, es la solución de la ecuación

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - m\kappa v. \quad (4-72)$$

La ecuación (4-72) representa la ecuación de movimiento de una partícula que se mueve verticalmente, sometida a la acción de la fuerza gravitacional y de otra de amortiguamiento. Si se toma como positivo el sentido hacia arriba, las dos fuerzas se dirigirán hacia abajo cuando la velocidad sea positiva, por lo que serán necesarios los signos menos en la ecuación (4-72).

Esta ecuación se puede integrar y luego despejar  $v$  en función de  $t$ . O sea,

$$t - t_0 = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{g + \kappa v} = - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{g + \kappa v}{g + \kappa v_0},$$

que, al despejar  $v$ , nos da

$$v = - \frac{g}{\kappa} + \left( \frac{g}{\kappa} + v_0 \right) e^{-\kappa(t-t_0)}. \quad (4-73)$$

Observemos que, al aumentar  $t$ , el segundo término del segundo miembro de la ecuación (4-73) disminuye exponencialmente, hasta que para valores suficientemente grandes de  $t$  se hace despreciable. Entonces, la velocidad de la partícula se aproxima a su velocidad límite  $-g/\kappa$ . Para esta velocidad límite, la fuerza amortiguadora equilibra justamente a la gravitacional, haciendo que el cuerpo continúe su caída con la velocidad constante  $-g/\kappa$ . Para hallar la posición de la partícula en cualquier instante, integraremos la ecuación (4-73) con respecto al tiempo, obteniendo la solución

$$x = x_0 - \frac{g}{\kappa} (t - t_0) - \left( \frac{g}{\kappa^2} + \frac{v_0}{\kappa} \right) [e^{-\kappa(t-t_0)} - 1]. \blacktriangleleft \quad (4-74)$$

El movimiento macroscópico de cargas (eléctricas) en conductores, para el cual la relación entre la intensidad de la corriente y el voltaje entre los extremos del conductor está dado por la ley de Ohm, puede describirse o expresarse considerando que las cargas se mueven bajo la acción de una fuerza amortiguadora proporcional a la primera potencia de la velocidad de desplazamiento de dichas cargas. La constante de proporcionalidad,  $\kappa$ , se puede relacionar con la conductividad de corriente continua,  $\sigma$ , del conductor que, como sabemos, es la inversa de la resistividad. La conductividad se puede definir también por la razón de la densidad de corriente por unidad de área,  $J$ , al campo eléctrico (de corriente continua) aplicado,  $E$ :  $\sigma = J/E$ . La densidad de corriente, a su vez, está relacionada con la velocidad de desplazamiento por  $J = Nev$ , donde  $N$  es el número de partículas cargadas, con carga  $e$  por unidad de volumen, y  $v$  es la velocidad media de desplazamiento de las partículas cargadas.

En consecuencia, se halla que

$$\sigma = \frac{Ne^2v}{eE}.$$

De la anterior explicación podemos concluir que la velocidad de desplazamiento de las partículas se hará constante cuando la fuerza eléctrica  $eE$  sea equilibrada por la fuerza amortiguadora, esto es,  $eE = m\kappa v$ , lo que da la relación

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m\kappa}$$

entre la conductividad de un metal y su constante de amortiguamiento  $\kappa$ .

#### 4-11 Oscilador armónico con amortiguamiento

Al estudiar, en la sección 4-9, la oscilación armónica simple de una partícula a un lado y otro de un punto de equilibrio estable no consideramos el efecto de las fuerzas amortiguadoras que siempre se presentan en cualquier sistema.

Ahora, volveremos a estudiar el problema teniendo en cuenta la presencia de una de estas fuerzas disipadoras proporcional a la primera potencia de la velocidad además de la fuerza restauradora proporcional al desplazamiento respecto al punto de equilibrio. Nos limitaremos a las fuerzas amortiguadoras proporcionales a la primera potencia de la velocidad, para quedar dentro del mismo orden de aproximación al que nos restringe el considerar que la fuerza restauradora es proporcional a la primera potencia del desplazamiento. Además, al restringir nuestro tratamiento en esta forma llegaremos a una ecuación de movimiento que, además de ser fácil de resolver, se presenta frecuentemente en física. El lector deberá poner toda su atención al analizar esta ecuación.

La ecuación unidimensional del movimiento de una partícula que se mueve a un lado y otro de un punto de equilibrio estable por la acción de una fuerza restauradora,  $F = -kx$ , y de otra amortiguadora

$$F_{\text{amort}} = -2m\mu\dot{x} \quad (4-75)$$

es

$$m\ddot{x} = -kx - 2m\mu\dot{x}. \quad (4-76)$$

Si en esta ecuación de movimiento introducimos la constante de restauración

$$k = m\omega_0^2, \quad (4-77)$$

dicha ecuación se reduce a

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (4-78)$$

que es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, con coeficientes constantes. Este es el tipo más simple, de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y siempre tiene cuando menos una solución de la forma

$$x = Ae^{\alpha t}. \quad (4-79)$$

Es una simple cuestión verificar esto en la ecuación que consideramos. Utilizando la (4-79) como una solución de tanteo, hallamos que

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2x = Ae^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\mu\alpha + \omega_0^2).$$

Como el segundo miembro de esta ecuación debe hacerse igual a cero y dar una solución no trivial,  $\alpha$  tiene que ser una raíz de la ecuación característica

$$\alpha^2 + 2\mu\alpha + \omega_0^2 = 0. \quad (4-80)$$

En general, encontraremos dos valores de  $\alpha$  que satisfagan la ecuación (4-80). Estos son

$$\alpha = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}. \quad (4-81)$$

Luego, para todo  $\mu \neq \omega_0$  tenemos dos soluciones independientes,

$$x_1 = Ae^{-(\mu+\lambda)t} \quad (4-82)$$

y

$$x_2 = Be^{-(\mu-\lambda)t}, \quad (4-83)$$

donde

$$\lambda = \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}. \quad (4-84)$$

Una propiedad de las ecuaciones diferenciales homogéneas es que la suma lineal de dos soluciones linealmente independientes es también una solución. Por tanto,

$$x = x_1 + x_2 = e^{-\mu t}(Ae^{-\lambda t} + Be^{+\lambda t}) \quad (4-85)$$

es otra solución de la ecuación (4-78).

Podemos demostrar fácilmente que la ecuación (4-85) es la solución general de la (4-78) para  $\mu \neq \omega_0$ . Es decir, cualquier solución de la ecuación (4-78) se puede expresar en la forma de la (4-85) escogiendo apropiadamente las constantes arbitrarias  $A$  y  $B$ .

Para comprobarlo presentamos otro método de hallar la solución de la ecuación (4-78). Veremos que éste también nos conduce a la solución general para el caso en que  $\mu = \omega_0$ . La ecuación (4-78) se puede poner en forma de operador como

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\mu\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)x = 0, \quad (4-86)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \mu + \lambda\right)\left(\frac{d}{dt} + \mu - \lambda\right)x = 0. \quad (4-87)$$

La ecuación (4-87), ahora, se puede expresar por dos ecuaciones diferenciales de primer orden simultáneas, poniendo

$$y = \left(\frac{d}{dt} + \mu - \lambda\right)x. \quad (4-88)$$

Entonces, la ecuación (4-87) se convierte en

$$\left(\frac{d}{dt} + \mu + \lambda\right)y = 0. \quad (4-89)$$

La solución de esta última ecuación diferencial de primer orden es

$$y = Ce^{-(\mu+\lambda)t}, \quad (4-90)$$

lo que significa que  $x$  es una solución de la ecuación diferencial no homogénea de primer orden

$$\frac{d}{dt}x + (\mu - \lambda)x = Ce^{-(\mu+\lambda)t}. \quad (4-91)$$

Esta ecuación se simplifica multiplicándola por el factor de integración  $e^{(\mu-\lambda)t}$  lo que convierte a su primer miembro en la derivada de la función  $xe^{(\mu-\lambda)t}$ . Entonces, tenemos

$$\frac{d}{dt}[xe^{(\mu-\lambda)t}] = Ce^{-2\lambda t},$$

que se puede integrar, si  $\lambda \neq 0$ , dando

$$xe^{(\mu-\lambda)t} = \frac{C}{-2\lambda}e^{-2\lambda t} + B,$$

donde  $B$  es la constante de integración. Haciendo  $A = -C/2\lambda$ , obtenemos la solución hallada anteriormente para  $\mu \neq \omega_0$ , o  $\lambda \neq 0$ ,

$$x = e^{-\mu t}(Ae^{-\lambda t} + Be^{\lambda t}). \quad (4-92)$$

El método empleado para obtener la ecuación (4-92) es muy apropiado para encontrar la solución de la ecuación (4-78) cuando  $\mu = \omega_0$ . En estas circunstancias, la ecuación característica tiene una sola raíz y, por consiguiente, una sola solución,

$$x_1 = Ae^{-\mu t}.$$

Sin embargo, una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, tiene dos soluciones linealmente independientes. Para hallar la segunda solución procederemos como antes, expresando la ecuación (4-78) en forma de operador. Pero ahora, la ecuación tendrá la forma

$$\left(\frac{d}{dt} + \mu\right)\left(\frac{d}{dt} + \mu\right)x = 0. \quad (4-93)$$

Haciendo nuevamente

$$y = \left(\frac{d}{dt} + \mu\right)x, \quad (4-94)$$

obtenemos la ecuación diferencial de  $y$ .

$$\frac{dy}{dt} + \mu y = 0. \quad (4-95)$$

cuya solución es

$$y = Be^{-\mu t}. \quad (4-96)$$

Con esta solución de  $y$ , la ecuación satisfecha por  $x$  es

$$\left(\frac{d}{dt} + \mu\right)x = Be^{-\mu t}, \quad (4-97)$$

que se puede simplificar multiplicando por el factor de integración  $e^{\mu t}$ .

Entonces, la ecuación (4-97) se convierte en

$$\frac{d}{dt}(xe^{\mu t}) = B, \quad (4-98)$$

cuya solución es

$$xe^{\mu t} = Bt + A$$

o sea,

$$x = e^{-\mu t}(A + Bt). \quad (4-99)$$

Hemos hallado así que, en los problemas en que las dos raíces de la ecuación característica son iguales, dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (4-80) son

$$x_1 = Ae^{-\mu t} \quad (4-100)$$

y

$$x_2 = Bte^{-\mu t}. \quad (4-101)$$

Luego, la solución general para el caso en que  $\mu = \omega_0$  está dada por la ecuación (4-99).

Cuando  $\mu \neq \omega_0$ , habrá que distinguir entre el caso en que  $\mu > \omega_0$  y el de  $\mu < \omega_0$ , puesto que la naturaleza cualitativa del movimiento será diferente en los dos. Estas dos condiciones son, respectivamente, las del oscilador armónico *sobreamortiguado* y del oscilador armónico *subamortiguado*; y se llama con *amortiguado crítico* al caso en que  $\mu = \omega_0$ .

Los valores de las constantes  $A$  y  $B$  que aparecen en las ecuaciones (4-85) y (4-99) dependen de los valores iniciales de la posición y la velocidad de la partícula.

Investigaremos ahora el movimiento que se presenta en cada uno de los casos  $\mu < \omega_0$ ,  $\mu > \omega_0$  y  $\mu = \omega_0$ .

a) *Caso subamortiguado*,  $\mu < \omega_0$ . Cuando  $\mu < \omega_0$ , la raíz cuadrada de la ecuación (4-84) es imaginaria, por lo que haremos

$$\lambda = -iv,$$

y se verá que podemos expresar la solución en la forma

$$x = e^{-\mu t}(Ae^{ivt} + Be^{-ivt}). \quad (4-102)$$

Como el desplazamiento de la partícula de su posición de equilibrio es una cantidad real, se deduce que las constantes  $A$  y  $B$ , que en general serán números complejos, estarán relacionadas. Esto tiene que ser así, puesto que si  $A$  y  $B$  son complejos, aparecerán cuatro constantes de integración en la solución general, en lugar de las dos que debieran. La relación entre  $A$  y  $B$  se deduce del hecho de que  $x$  es real y, por lo tanto,  $x = x^*$  donde el asterisco designa al complejo conjugado, o sea

$$e^{-\mu t}(Ae^{ivt} + Be^{-ivt})^* = e^{-\mu t}(A^*e^{-ivt} + B^*e^{ivt}).$$

Esta relación sólo puede satisfacerse si  $B = A^*$ .

De nuestro breve estudio de los números complejos (sección 1-9) vimos que siempre podemos establecer

$$A = \frac{1}{2}Ce^{i\phi}, \quad (4-103)$$

donde  $C$  y  $\phi$  son números reales.

En función de estas nuevas constantes, la solución toma la forma

$$x = \frac{1}{2}Ce^{-\mu t}[e^{i(vt+\phi)} + e^{-i(vt+\phi)}] = Ce^{-\mu t} \cos(vt + \phi). \quad (4-104)$$

Debemos observar que el oscilador armónico subamortiguado aún realiza una clase de movimiento oscilatorio, cuya amplitud decrece exponencialmente con el tiempo, como se ve en la figura 4-8.

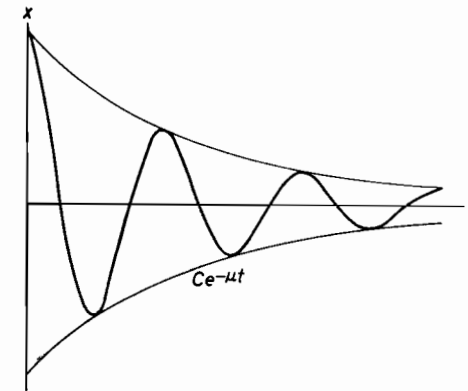


FIG. 4-8. Movimiento del oscilador armónico subamortiguado.

Aunque el movimiento no se repite idénticamente y, por tanto, no es periódico en el sentido estricto de la palabra, sin embargo, todavía existe un intervalo,

$$\tau = \frac{2\pi}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}}, \quad (4-105)$$

entre los pasos sucesivos de la partícula en el mismo sentido por el punto de equilibrio. Este mismo intervalo también existe entre dos máximos desplazamientos sucesivos al mismo lado del punto de equilibrio.

Es interesante considerar la pérdida de energía del oscilador en dicho período del movimiento. La pérdida instantánea de energía se debe a la fuerza amortiguadora cuyo trabajo por unidad de tiempo es

$$vF_{\text{amort}} = -\dot{x}(m\ddot{x} + m\omega_0^2x) = -\frac{dE}{dt},$$

donde

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2.$$

Luego, la pérdida instantánea de energía es función del tiempo y, por tanto, en un período  $\tau$ , se la puede calcular comparando la energía total en los dos instantes  $t$  y  $t + \tau$ .

Para un tiempo  $t$ , la energía total se halla que está dada por

$$E = \frac{1}{2}mC_0^2 e^{-2\mu t} \{ \omega_0^2 \cos^2(vt + \phi) + [\mu \cos(vt + \phi) + v \sin(vt + \phi)]^2 \}$$

$$= \frac{1}{2}mC^2 e^{-2\mu t} f(t), \quad (4-106)$$

donde  $f(t)$  es la cantidad entre las llaves. Esta energía es entonces periódica, siendo  $\tau$  su período. Esto es,

$$f(t + \tau) = f(t).$$

De lo cual deducimos

$$E(t + \tau) = E(t) e^{-2\mu\tau}. \quad (4-107)$$

Por lo tanto, después de un intervalo de tiempo  $\tau$ , la energía tendrá un valor de  $e^{-2\mu\tau}$  veces el valor que tenía al comienzo del intervalo. La energía decae con doble rapidez que la amplitud.

b) *Caso sobreamortiguado*,  $\mu < \omega_0$ . El desplazamiento de la partícula, en el caso sobreamortiguado dado por

$$x = Ae^{-(\mu+\lambda)t} + Be^{-(\mu-\lambda)t}, \quad (4-108)$$

está representado en la figura 4-9. Como  $\mu > \lambda$ , los dos términos de (4-108) disminuyen exponencialmente. Tomando el tiempo inicial  $t_0$  igual a cero podemos obtener, en función de la velocidad y el desplazamiento iniciales de la partícula, las ecuaciones

$$A + B = x_0 \quad (4-109)$$

$$y \quad -(\mu + \lambda)A - (\mu - \lambda)B = v_0, \quad (4-110)$$

que nos dan los valores de  $A$  y  $B$

$$A = -\frac{v_0 + (\mu - \lambda)x_0}{2\lambda} \quad (4-111)$$

$$y \quad B = \frac{v_0 + (\mu + \lambda)x_0}{2\lambda}. \quad (4-112)$$

Con valores positivos de  $x_0$  y  $v_0$ ,  $B$  será positiva y  $A$  negativa, siendo mayor el valor absoluto de  $B$  que el de  $A$ . Como el término que contiene a  $A$  en la ecuación (4-108) disminuye más rápidamente que el que contiene a  $B$  y, además  $B > |A|$ , se deduce que el desplazamiento, para cualquier valor del tiempo, permanecerá positivo, tal como se indica en la curva  $a$ ) de la figura 4-9.

Con valores de  $v_0$  negativos y tales que

$$v_0 < -(\mu + \lambda)x_0,$$

$B$  será negativa y  $A$  positiva. En magnitud  $A$  será mayor que  $B$ . Como el término que contiene a  $A$  decrece más rápidamente que el de  $B$  se ve que, para un valor determinado de  $t$  y todos los que le siguen, el término en  $B$  será el dominante. En otras palabras, el desplazamiento llegará finalmente a tomar un valor negativo. Por tanto, la partícula pasará por su posición de equilibrio una vez y subsiguientemente tenderá a él indefinidamente, tal como se ve en la curva (b) de la figura 4-9.

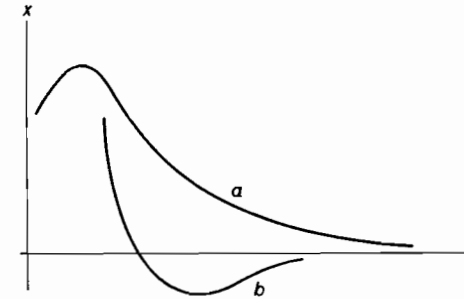


FIG. 4-9. Movimiento del oscilador armónico con sobreamortiguamiento.

c) *Caso con amortiguado crítico*,  $\mu = \omega_0$ . En este caso el desplazamiento se amortigua también exponencialmente, teniendo la forma

$$x = e^{-\mu t}(A + Bt), \quad (4-113)$$

que hallamos en la ecuación (4-99).

La importancia de este caso radica en el hecho de que, para las mismas condiciones iniciales, un sistema volverá a su posición de equilibrio en el menor tiempo posible si el amortiguamiento es crítico. Se presenta una excepción a esta regla en el caso en que la  $B$ , de la ecuación (4-108), sea nula.

Como en el caso de sobreamortiguamiento, uno de los términos,  $Bte^{-\mu t}$  de la ecuación (4-113), disminuye menos rápido que el otro. Por consiguiente, dependiendo de las magnitudes y signos relativos de las constantes  $A$  y  $B$ , la partícula se aproximará de nuevo a la posición de equilibrio asintóticamente o pasará por dicha posición una sola vez sin retornar a ella. Las curvas de este caso son cualitativamente semejantes a las de la figura 4-9 para el caso sobreamortiguado.

#### 4-12 Oscilador armónico forzado: resonancia

El problema del oscilador armónico simple o del amortiguado es interesante; sin embargo, en la práctica se presenta con mucha mayor frecuencia

el caso de oscilador armónico forzado y es importante en física. Por ejemplo, sólo por la acción de fuerzas adicionales el oscilador armónico amortiguado puede mantener su movimiento, o sea, tomar, en dicho caso, los valores iniciales de posición y velocidad que determinan las constantes en función de las cuales se expresan las soluciones de los problemas planteados en la sección anterior.

El movimiento amortiguado de una partícula que oscila a un lado y otro de un punto de equilibrio estable, sometida a una fuerza adicional dependiente del tiempo,  $F(t)$ , queda determinado por la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + 2m\mu\dot{x} + m\omega_0^2x = F(t)$$

o sea,

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F(t)}{m}. \quad (4-114)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal no homogénea, que se representa simbólicamente por

$$Lx = \frac{F(t)}{m}. \quad (4-115)$$

En este caso, el operador diferencial es

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^2}{dt^2} + 2\mu\frac{d}{dt} + \omega_0^2, \quad (4-116)$$

que, como hemos hecho anteriormente, se puede descomponer en factores, resultando

$$L = \left(\frac{d}{dt} + \mu + \lambda\right) \left(\frac{d}{dt} + \mu - \lambda\right), \quad (4-117)$$

donde  $\lambda = \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$ . Una ecuación diferencial lineal tiene la propiedad, muy conveniente, de que si  $x_1$  es una solución de la ecuación

$$Lx_1 = f_1,$$

y  $x_2$  lo es de la

$$Lx_2 = f_2,$$

entonces

$$x = x_1 + x_2$$

es una solución de la ecuación no homogénea

$$Lx = f_1 + f_2.$$

Este hecho se indicó ya en la sección anterior, cuando se buscaba una solución de la ecuación homogénea en que  $f_1 = f_2 = 0$ . Realmente hallamos

que la solución general de dicha ecuación se expresaba por la suma de dos soluciones de ella linealmente independientes.

Aprovechando esta propiedad de las ecuaciones diferenciales lineales, encontramos que la solución general de una ecuación diferencial no homogénea se puede expresar por la suma de la solución general de su ecuación homogénea ( $f_1 = 0$ ) y una solución de la ecuación no homogénea ( $f_2 = F(t)/m$ ). La solución de la ecuación homogénea,  $x_h$ , se llama *solución homogénea* y la otra,  $x_p$ , se llama *solución particular* o *no homogénea*.

Las diferentes soluciones homogéneas halladas en la sección anterior eran amortiguadas exponencialmente. Esto significa que, dando un período de tiempo suficientemente grande, su contribución a la solución general será pequeña y despreciable. Las soluciones homogéneas de la ecuación (4-114) se denominan por esta razón *soluciones transitorias* o *temporales*. La solución particular, por el contrario, no desaparece gradualmente con el tiempo, por lo que será una *solución de régimen permanente* o *de estado estacionario*.

Consideraremos ahora la solución particular de la ecuación (4-114) para dos casos especiales de fuerzas dependientes del tiempo,  $F(t)$ . En el primero tomaremos una fuerza excitadora sinusoidal

$$F(t) = F_0 \text{ sen } (\omega t + \theta),$$

cuya importancia es debida a que cualquier función periódica  $F(t)$  de período  $2T$ ,

$$F(t + 2T) = F(t),$$

se puede expresar como una suma lineal de términos senos y cosenos. Este desarrollo, o *serie de Fourier*,\* se puede poner en la forma

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ sen } \frac{n\pi t}{T}, \quad (4-118)$$

donde los coeficientes de Fourier son

$$a_n = \frac{1}{T} \int_t^{t+2T} F(t) \cos \frac{n\pi t}{T} dt \quad (4-119)$$

y

$$b_n = \frac{1}{T} \int_t^{t+2T} F(t) \text{ sen } \frac{n\pi t}{T} dt. \quad (4-120)$$

Una fuerza periódica,  $F(t)$ , de período  $2T$  se podrá indicar como suma de las fuerzas sinusoidales  $F_n(t)$ ,

\* I. S. Sokolnikoff y R. M. Redheffer, *Mathematics of Physics and Modern Engineering*. Nueva York: McGraw-Hill, 1958.



$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t),$$

donde

$$F_0(t) = \frac{1}{2T} \int_t^{t+2T} F(t) dt = F_0$$

y

$$F_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{n\pi t}{T}$$

$$= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin \left( \frac{n\pi t}{T} + \theta_n \right).$$

Las constantes  $a_n$  y  $b_n$  están dadas por las ecuaciones (4-119) y (4-120) y el ángulo de fase por

$$\theta_n = \operatorname{tg}^{-1} \frac{a_n}{b_n}.$$

Las propiedades de la solución de una ecuación diferencial lineal nos permiten deducir que si  $x_n(\omega_n, t)$  representa la solución para la fuerza

$$F_n(t) = C_n \sin(\omega_n t + \theta_n), \quad (4-121)$$

donde

$$C_n = \begin{cases} F_0 & n = 0, \\ \sqrt{a_n^2 + b_n^2} & n \neq 0, \end{cases} \quad (4-122)$$

$$\theta_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n = 0, \\ \operatorname{tg}^{-1} \frac{a_n}{b_n} & n \neq 0, \end{cases} \quad (4-123)$$

$$\omega_n = \frac{n\pi}{T}, \quad (4-124)$$

la solución particular para la fuerza excitadora periódica

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$$

estará dada por

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(\omega_n, t).$$

De hecho, al considerar la solución para una fuerza excitadora sinusoidal, estamos considerando la solución para cualquier tipo de fuerza periódica excitadora dependiente del tiempo.

El segundo caso de fuerza excitadora que consideraremos es la de un impulso de muy corta duración, cuya magnitud es, sin embargo, suficientemente grande para producir un cambio finito en la cantidad de movimiento de la partícula. Si ese impulso ocurre en un tiempo  $t'$  y dura un período  $\Delta t$ , el cambio en la cantidad de movimiento de la partícula será

$$\Delta p = \int_{t'}^{t'+\Delta t} F(t) dt. \quad (4-125)$$

Una fuerza de este tipo actúa en un intervalo  $\Delta t$  tan pequeño que se puede suponer que el desplazamiento de la partícula en el instante  $t = t'$  durante el intervalo  $\Delta t$  puede considerarse nulo para todos los fines prácticos. La importancia de esto se verá claro cuando mostremos cómo la solución para una fuerza excitadora dependiente del tiempo se puede expresar en función de una integral que contiene la solución del problema de la fuerza impulsora.

a) *Fuerza excitadora sinusoidal.* Cuando

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t + \theta) \quad (4-126)$$

la solución de la ecuación (4-114) se obtiene fácilmente. Por álgebra podemos simplificar más el problema si consideramos en vez de ella, la fuerza

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t + \theta) + iF_0 \sin(\omega t + \theta) = F_0 e^{i(\omega t + \theta)}. \quad (4-127)$$

Observaremos que si  $x_1$  es la solución para la fuerza

$$F_1(t) = F_0 \cos(\omega t + \theta),$$

y  $x_2$  la solución para la fuerza

$$F_2(t) = F_0 \sin(\omega t + \theta),$$

entonces, la solución para la fuerza

$$F(t) = F_0 e^{i(\omega t + \theta)}$$

es

$$x = x_1 + ix_2. \quad (4-128)$$

De esta última podemos hallar a su vez, las soluciones  $x_1$  y  $x_2$ , puesto que, como el operador diferencial  $L$  de la ecuación (4-114) es real, tendremos

$$x_1 = \operatorname{Re} x^* \quad (4-129)$$

y

$$x_2 = \operatorname{Im} x^* \quad (4-130)$$

Lo que nos permite proseguir para hallar la solución de la ecuación

\*  $\operatorname{Re}$  = parte real,  $\operatorname{Im}$  = parte imaginaria.

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i(\omega t + \theta)}. \quad (4-131)$$

Es razonable suponer que la solución no homogénea de esta ecuación tiene la misma dependencia exponencial del tiempo que  $F(t)$ . Luego, supondremos una solución de la forma

$$x = A e^{i(\omega t + \theta)}, \quad (4-132)$$

para la que encontramos

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = A e^{i(\omega t + \theta)} (-\omega^2 + 2\mu i\omega + \omega_0^2). \quad (4-133)$$

Para que esta expresión sea igual a  $(F_0/m) \exp [i(\omega t + \theta)]$ , debemos tener que

$$A = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\mu\omega} = \frac{(F_0/m)(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\mu\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}. \quad (4-134)$$

La ecuación (4-134) se puede simplificar poniendo

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\mu\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}} = \cos \phi - i \sin \phi = e^{-i\phi}, \quad (4-135)$$

donde

$$\cos \phi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}} \quad (4-136)$$

y

$$\sin \phi = \frac{2\mu\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}}. \quad (4-137)$$

Con esta sustitución, la (4-134) tomará la forma

$$A = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}} e^{-i\phi}; \quad (4-138)$$

de donde obtenemos la solución de la ecuación (4-131), que será

$$x(t) = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}} e^{i(\omega t + \theta - \phi)}. \quad (4-139)$$

La solución que buscamos es cómo se mueve el sistema bajo la acción de la fuerza  $F_0 \sin(\omega t + \theta)$ ; es la parte imaginaria de la solución dada en la ecuación (4-139). Esto es

$$x_2(t) = \text{Im } x(t) = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}} \sin(\omega t + \theta - \phi). \quad (4-140)$$

Se observará que la solución de estado estacionario para la fuerza excitadora  $F(t) = F_0 \sin(\omega t + \theta)$  se ha hallado que es sinusoidal de la misma

frecuencia que dicha fuerza. Difiere, sin embargo, de ésta en la fase, pues está retrasada en  $\phi$  radianes de la misma. Como  $\mu$  es una constante positiva, la diferencia de fase  $\phi$  tendrá un valor entre 0 y  $\pi$  (fig. 4-10).

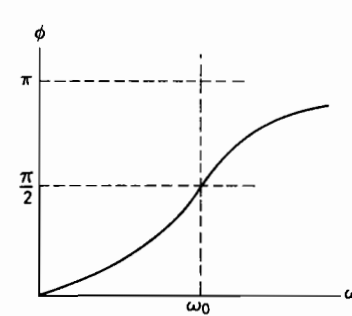


FIG. 4-10. Retraso de fase del oscilador armónico forzado.

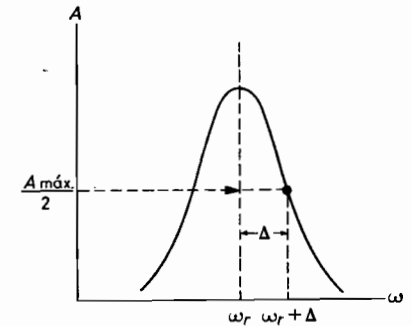


FIG. 4-11. Amplitud del oscilador armónico forzado en función de la frecuencia de la fuerza excitadora.

Observaremos también que la amplitud de la solución de estado estacionario

$$\begin{aligned} A &= \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}} \\ &= \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - 2\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega_0^2 - 4\mu^4}} \end{aligned} \quad (4-141)$$

es función de la frecuencia,  $\omega$ . Para  $\mu$  pequeño, la amplitud  $A$  toma su valor máximo aproximado,  $F_0/2m\mu\omega_0$ , a una frecuencia  $\omega = \omega_r$  tal que

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\mu^2. \quad (4-142)$$

Siempre que una cantidad física de interés, función de otra cantidad física dependiente del tiempo, toma un valor máximo cuando la frecuencia de esta otra varía, tenemos el fenómeno llamado *resonancia*. El valor de la frecuencia de la segunda cantidad, para el cual la primera tiene su máximo, se llama punto de resonancia. Por tanto,  $f_r = \omega_r/2\pi$  es la frecuencia de resonancia para la amplitud del movimiento. Se suele también considerar a  $\omega_r$  como la frecuencia de resonancia.

En la figura 4-11 tenemos una curva de frecuencia-amplitud en la que podemos observar que es simétrica respecto a la vertical en la proximidad de la frecuencia de resonancia. Como para valores grandes de  $\omega$  la amplitud es muy pequeña, existirá una frecuencia

$$\omega = \omega_r + \Delta$$

para la cual la amplitud tendrá por valor la mitad de su máximo. El valor

$$\Delta = |\omega_r - \omega| \quad (4-143)$$

en el cual ocurre esto, se llama *anchura media* de la curva de resonancia. Con la ecuación (4-141) vemos que, para valores pequeños de  $\mu$ , el valor mitad del máximo lo toma  $A$  a una frecuencia  $\omega$  tal que

$$\omega^2 = \omega_r^2 \pm 2\sqrt{3}\mu\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$$

o

$$\omega \approx \omega_r \pm \frac{\mu\omega_0}{\omega_r}\sqrt{3} \approx \omega_0 \pm \mu\sqrt{3}. \quad (4-144)$$

Esto significa que, para amortiguamientos pequeños, la curva de amplitud tiene una anchura media

$$\Delta = \mu\sqrt{3}. \quad (4-145)$$

Entonces, con la curva de frecuencia-amplitud de estado estacionario o régimen permanente, podemos hallar valores aproximados de la constante de amortiguamiento  $\mu$  y la frecuencia natural de la vibración del oscilador no amortiguado,  $\omega_0$ .

En muchos problemas importantes como, por ejemplo, la oscilación forzada de un electrón a un lado y otro de un punto de equilibrio estable, lo que se observa o mide no es el desplazamiento, sino la energía necesaria para mantener el movimiento del oscilador. Al tratar con electrones, no podemos, aunque quisiéramos, observar directamente su movimiento, por lo que es de interés medir la energía media disipada por la fuerza amortiguadora en cada ciclo de la solución de estado estacionario y hallar el punto de resonancia y la anchura media de la curva de frecuencia-potencia media disipada.

La energía media disipada por ciclo en dicho estado estacionario debe ser, por supuesto (como el lector puede comprobar fácilmente), igual a la energía media suministrada por la fuerza excitadora. En un intervalo  $\Delta t$ , la magnitud de la energía disipada está dada por

$$\Delta W = 2m\mu\dot{x}^2 \Delta t.$$

De aquí, hallamos que la potencia media  $\langle P \rangle$  disipada en un período  $\tau$  está dada por

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{\tau} \langle W \rangle = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} 2m\mu\dot{x}^2 dt \\ &= \frac{2m\mu A^2 \omega^2}{\tau} \int_t^{t+\tau} \cos^2(\omega t + \theta - \phi) dt \\ &= m\mu A^2 \omega^2. \end{aligned}$$

Nuevamente observaremos que la cantidad física que interesa aquí, o sea, la potencia media disipada, es función de la frecuencia  $\omega$ , y con la ecuación (4-141) para la amplitud tenemos

$$\langle P \rangle = \frac{\mu F_0^2 \omega^2}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2 \omega^2]}. \quad (4-146)$$

El valor máximo de esta potencia media disipada ( $F_0^2/4m\mu$ ) se presenta a la frecuencia

$$\omega = \omega_0. \quad (4-147)$$

Luego,  $\omega_0$  es la frecuencia de resonancia de la potencia media absorbida.

Para hallar la anchura media de la curva de frecuencia-potencia disipada, tomaremos

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \langle P \rangle_{\text{máx}} = \frac{F_0^2}{8m\mu}$$

o sea,

$$\frac{\mu\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2} = \frac{1}{8\mu}.$$

Esta última ecuación, cuando los valores de la constante de disipación,  $\mu$ , son pequeños, tiene la solución aproximada

$$\omega = \omega_0 \pm \mu.$$

Por lo que la anchura media de la curva de frecuencia-potencia disipada será:

$$\Delta = \mu. \quad (4-148)$$

Otro término empleado comúnmente para medir la anchura de una curva de energía-resonancia es la  $Q$  del sistema. La  $Q$  de un circuito resonante se define por  $2\pi$  veces la razón de la energía media almacenada en el sistema a la energía disipada por ciclo de la fuerza excitadora. Para el oscilador armónico amortiguado

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \frac{\langle \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \rangle}{\tau \langle 2m\mu\dot{x}^2 \rangle} \\ &= 2\pi \frac{\frac{1}{2}m(\omega_0^2 + \omega^2) \langle x^2 \rangle}{(2\pi/\omega) 2m\mu\omega^2 \langle x^2 \rangle} \\ &= \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{4\mu\omega} \end{aligned} \quad (4-149)$$

Cerca de la resonancia, cuando  $\omega \approx \omega_0$ , tenemos

$$Q = \frac{\omega_0}{2\mu}, \quad (4-150)$$

que es otra definición dada algunas veces para la  $Q$  de un sistema.

► Los resultados de esta sección fueron aplicados por Drude y Lorentz en la deducción clásica del índice de refracción de un medio. La primitiva teoría clásica del electrón de Lorentz consideraba que los electrones de un átomo estaban colocados en puntos de equilibrio estable y, en consecuencia, se comportaban como osciladores armónicos. Interesantemente este modelo clásico de los electrones de un átomo, aunque incorrecto, nos condujo a una buena descripción de las propiedades ópticas de los gases, los dieléctricos y los metales. Su continuo empleo para explicar las propiedades ópticas de los materiales se justifica por los resultados de la mecánica cuántica, que indicaban que la modificación de un campo eléctrico externo en una región, debido a la presencia de átomos y sus electrones, es matemáticamente equivalente a su modificación por un conjunto de osciladores armónicos. Observaremos que para altas frecuencias,  $\omega \gg \omega_0$  y amortiguaciones pequeñas, la ecuación (4-140) de la respuesta o reacción de un oscilador cargado (eléctricamente) a un campo eléctrico sinusoidal nos da

$$x(t) = -\frac{eE}{m\omega^2} \text{sen}(\omega t + \theta),$$

que es idéntico al término sinusoidal que aparece en la solución de la respuesta o reacción de un electrón libre a un campo eléctrico sinusoidal (sección 4-5). De aquí, podemos inferir que en la dispersión, por los electrones de un átomo, de una radiación electromagnética de alta frecuencia (rayos  $x$  o rayos  $\gamma$ ), los electrones pueden considerarse como partículas libres. Remitimos al lector a los libros de electricidad y magnetismo o a las disertaciones sobre física de Feynman\* para la deducción del índice de refracción en función de los parámetros que describen al oscilador.

Encontramos además que los circuitos eléctricos formados por condensadores, inductancias y resistores en serie, en los que existe una fuerza electromotriz dependiente del tiempo, satisfacen una ecuación diferencial lineal análoga a la del oscilador armónico amortiguado sometido a una fuerza dependiente del tiempo. Por tanto, los resultados que hemos obtenido para un oscilador armónico simple se podrán aplicar igualmente a los problemas de un circuito de corriente alterna en serie.

Esta analogía se extiende también a circuitos eléctricos más complicados y a sistemas mecánicos vibrantes, y es la base de las computadoras analógicas eléctricas, que permiten analizar problemas mecánicos muy complicados por medio de sus circuitos eléctricos análogos o correspondientes, más fáciles de formar y ajustar. ◀

\* Slater & Frank, *Electromagnetism*. New York: McGraw-Hill, Capítulo 9. *Feynman Lectures on Physics*, Vol. II. Reading, Mass.: Addison-Wesley, Capítulo 32.

b) *Fuerza impulsora, función de Green.* Una fuerza impulsora es una de muy corta duración. El intervalo de tiempo en que actúa sobre la partícula es tan corto que cualquier cambio en la posición de ésta durante dicho intervalo se puede despreciar. Pero la magnitud de la fuerza impulsora es lo suficientemente grande como para producir un cambio o variación, finito de la cantidad de movimiento de la partícula durante este breve tiempo.

Una fuerza impulsora unidad es la que, al actuar durante el corto intervalo de tiempo  $\Delta t$ , produce un cambio de una unidad en la cantidad

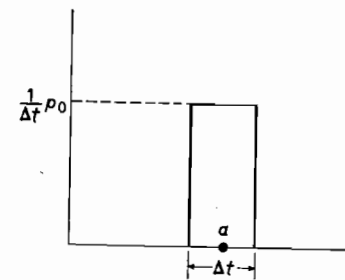


FIG. 4-12. Fuerza impulsora constante.

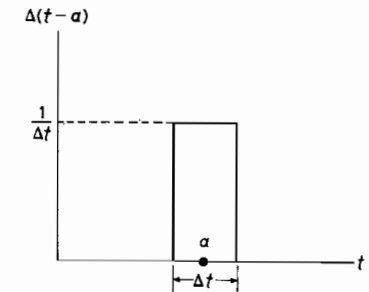


FIG. 4-13. Fuerza impulsora unidad constante.

de movimiento de la partícula. Si este impulso unidad se produce en el tiempo  $t = t_1$ , entonces

$$\int_{t_1}^{t_1+\Delta t} F(t) dt = 1. \quad (4-151)$$

La forma más simple de la fuerza impulsora es la constante. Entonces, una fuerza impulsora unidad constante, que actúa durante un tiempo  $\Delta t$ , tiene en este intervalo la magnitud

$$F = \frac{1}{\Delta t}.$$

Utilizaremos el símbolo  $p_0 \Delta(t - a)$  para representar la fuerza impulsora constante que, al actuar sobre la partícula en el tiempo medio  $t = a$  durante un intervalo  $\Delta t$  (fig. 4-12), imparte a la partícula una cantidad de movimiento  $p_0$ . Por consiguiente,  $\Delta(t - a)$  es la función adimensional de impulso de magnitud  $1/\Delta t$  que actúa en el mismo intervalo (fig. 4-13).

Cuanto menor sea el intervalo  $\Delta t$  durante el cual actúa la fuerza impulsora, es claro que mayor será la aproximación, pues para  $\Delta t$  suficientemente pequeño el desplazamiento será despreciable.

En el límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero, la magnitud máxima de una fuerza que se considere como impulsora, tenderá necesariamente, a un valor muy grande para que  $F\Delta t$  permanezca finito. La figura 4-14 ilustra este hecho para la fuerza impulsora unidad

$$F = \frac{1}{\Delta t \sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{(t-a)^2}{(\Delta t)^2} \right]. \quad (4-152)$$

El área bajo todas y cada una de las curvas de la figura 4-14 es igual a la unidad, siendo la mayor parte de la integral debida a la región comprendida entre  $[a - (\Delta t/2)$  y  $a + (\Delta t/2)]$ .

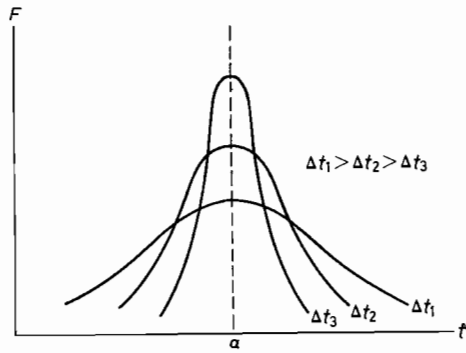


FIG. 4-14. Fuerza impulsora unidad

$$F = \frac{1}{\Delta t \sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{(t-a)^2}{(\Delta t)^2} \right].$$

Se puede idealizar esta situación diciendo que la fuerza impulsora unidad tiene un valor muy grande en el punto  $t = a$  y un valor cero en todos los demás puntos. Siempre que tengamos una fuerza impulsora que se pueda representar de esta forma, usaremos el símbolo  $p_0\delta(t-a)$  si ella imparte a la partícula un cambio en la cantidad de movimiento igual a  $p_0$ . Luego  $\delta(t-a)$  es la función idealizada del impulso unidad, que definiremos por

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t-a) dt = \begin{cases} 1 & t_1 < a < t_2, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4-153)$$

y

$$\delta(t-a) = 0, \quad t \neq a. \quad (4-154)$$

La función  $\delta(t-a)$  que satisface las propiedades anteriores se llama "función delta de Dirac".\*

Observaremos que la función de impulso constante  $\Delta(a-t)$ , lo mismo que la función de impulso constante  $\Delta(t-a)$ , tiene la magnitud  $1/\Delta t'$  para un intervalo  $\Delta t$  repartido a un lado y otro del punto  $t = a$ . Esto es  $\Delta(t-a) = \Delta(a-t)$ . Análogamente  $\delta(t-a) = \delta(a-t)$ , puesto que  $\delta[-t - (-a)]$  también satisface las ecuaciones (4-153) y (4-154).

La importancia de la fuerza impulsora unidad radica en el hecho de que cualquier fuerza dependiente del tiempo se puede expresar por una suma de fuerzas impulsoras; y, por el principio de superposición, que satisfacen las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales, la solución para una fuerza dependiente del tiempo se podrá, por consiguiente, expresar por la suma de las soluciones para las fuerzas impulsoras.

Por ejemplo, consideremos la fuerza  $F(t)$  representada en la figura 4-15. Se puede considerar que, para un intervalo de tiempo,  $\Delta t$ , lo suficiente-

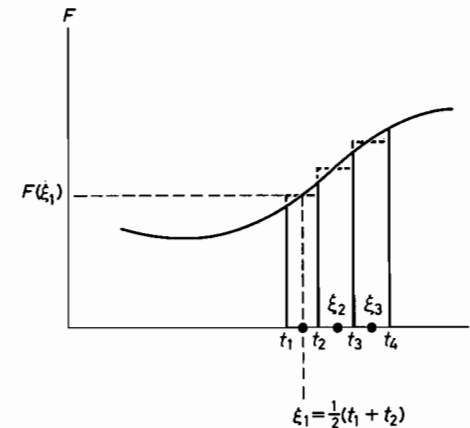


FIG. 4-15. Representación de una fuerza en función de una serie de fuerzas impulsoras.

mente pequeño, comprendido entre los instantes  $t_1$  y  $t_2$ , se puede considerar que una fuerza continua varía linealmente.

El valor de  $F(t)$  en el tiempo medio de este intervalo,

$$\xi_1 = \frac{t_1 + t_2}{2},$$

\* La función delta de Dirac, aunque se llame función, no es tal en el sentido corriente, pues una función que tiene un valor no nulo en sólo un punto no tiene área bajo su curva, cosa que no sucede en las funciones. Los textos de ingeniería se refieren a esta función como la derivada de la función escalón unidad de Helmholtz, que se define por

$$H(t, a) = \begin{cases} 0 & t < a, \\ 1 & t > a. \end{cases}$$

nos representará, en consecuencia, el valor medio de  $F(t)$  sobre el mismo intervalo. Esto es

$$F(\xi_1) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt.$$

Para valores pequeños de  $\Delta t$ , el efecto de  $F(t)$  sobre el movimiento de la partícula puede calcularse aproximadamente por el que produciría la fuerza constante  $F(\xi_1)$  sobre dicho movimiento en el mismo  $\Delta t$ . Esta última fuerza puede representarse actuando sobre  $\Delta t$  por  $F(\xi_1) \Delta(t - \xi_1) \Delta t$ . Subdividiendo el tiempo en el cual actúa la fuerza  $F(t)$  en  $N$  intervalos pequeños  $\Delta t$ , hallaremos, con argumentos similares al antes expuesto, que podemos establecer

$$F(t) = \sum_{n=1}^N F(\xi_n) \Delta(t - \xi_n) \Delta \xi, \quad (4-155)$$

donde  $\Delta(t - \xi_n)$  es la función constante de impulso unidad definida anteriormente en el intervalo  $\Delta t = \Delta \xi$ . En el límite, cuando  $\Delta t$  o  $\Delta \xi$  tienden a cero, tenemos, por la definición de la integral como límite de una suma,

$$F(t) = \int_{T_1}^{T_2} F(\xi) \delta(t - \xi) d\xi, \quad (4-156)$$

donde hemos utilizado  $\delta(t - \xi)$  para representar  $\Delta(t - \xi)$  cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ . Aquí  $T_1$  y  $T_2$  son los límites del período en que la fuerza  $F(t)$  actúa sobre la partícula.

La ecuación (4-156) se puede también obtener directamente a partir de las propiedades de la función delta de Dirac. El intervalo alrededor de  $\xi = t$  en el que la función delta de Dirac  $\delta(t - \xi)$  es distinta de cero, es tan pequeño que la  $F(\xi)$  de la ecuación (4-156) tendrá esencialmente el valor constante  $F(t)$  sobre todo el intervalo. Luego, en el segundo miembro de la ecuación (4-156) sólo contribuirá a la integral este intervalo, por lo que

$$\int_{T_1}^{T_2} F(\xi) \delta(t - \xi) d\xi = F(t) \int_{T_1}^{T_2} \delta(t - \xi) d\xi = F(t),$$

siempre que la integral se evalúe en un intervalo que contenga el punto  $\xi = t$ , esto es, siempre que

$$T_1 < t < T_2.$$

Aplicando el principio de superposición que satisfacen las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales, si  $g(t, \xi_n)$  representa la solución de la ecuación de movimiento para la fuerza impulsora unidad  $\Delta(t - \xi_n)$ , hallare-

mos que la solución para la fuerza  $F(\xi_n) \Delta(t - \xi_n) \Delta \xi$  será  $g(t, \xi_n) F(\xi_n) \Delta \xi$  y la solución para la fuerza de la ecuación (4-155) será

$$x(t) = \sum_{n=1}^N g(t, \xi_n) F(\xi_n) \Delta \xi. \quad (4-157)$$

En el límite, cuando  $\Delta \xi$  tienda a cero, tendremos

$$x(t) = \int_{T_1}^{T_2} g(t | \xi) F(\xi) d\xi, \quad (4-158)$$

donde  $g(t | \xi)$  es la solución de la ecuación de movimiento para la función de impulso unidad  $\delta(t - \xi)$ . Esta es la *función de Green* (llamada usualmente función de respuesta o reacción al impulso en los libros de ingeniería).

Evidentemente, cualquier tiempo anterior al instante en que la fuerza comience a actuar sobre la partícula no tendrá ningún efecto en su movimiento; por lo tanto, hasta el tiempo  $t = T_1$ , la partícula estará en reposo en su posición de equilibrio. La ecuación (4-158) representa entonces la solución que da para la partícula un desplazamiento y una velocidad nulos para cualquier tiempo anterior a  $t = T_1$ .

Razonando de la misma manera, se verá que la función de Green deberá anularse para todos los valores del tiempo  $t$  menores que el  $\xi$  en que se presenta el impulso, esto es

$$g(t | \xi) = 0, \quad t \leq \xi. \quad (4-159)$$

Este hecho asegura que las fuerzas que actúan sobre la partícula en los instantes subsiguientes a  $t$  en que estamos observando la posición de la partícula no contribuyen a la solución  $x(t)$  de la ecuación (4-158) en el tiempo  $t$ .

En ciertas ocasiones nos interesará analizar el movimiento del oscilador a partir del tiempo  $t = t_0$  donde  $t_0 > T_1$ . En este caso tendremos que buscar la solución que nos dé los valores de la posición y la velocidad de la partícula en el instante  $t = t_0$ .

Veamos cómo se puede hallar la solución general de este problema para condiciones iniciales cualesquiera a partir de la función de Green. Pero antes tendremos que determinar la expresión explícita de la función de Green  $G(t | \xi) = mg(t | \xi)$  que satisfaga la ecuación

$$\left( \frac{d}{dt} + \mu + \lambda \right) \left( \frac{d}{dt} + \mu - \lambda \right) G(t | \xi) = \delta(t - \xi). \quad (4-160)$$

Haciendo la sustitución

$$y(t|\xi) = \left( \frac{d}{dt} + \mu - \lambda \right) G(t|\xi), \quad (4-161)$$

obtenemos para  $y(t|\xi)$  la ecuación diferencial de primer orden

$$\left( \frac{d}{dt} + \mu + \lambda \right) y(t|\xi) = \delta(t - \xi), \quad (4-162)$$

que se puede reducir, empleando el factor de integración  $e^{(\mu+\lambda)t}$ , a

$$\frac{d}{dt} [e^{(\mu+\lambda)t} y(t|\xi)] = e^{(\mu+\lambda)t} \delta(t - \xi). \quad (4-163)$$

La solución particular de la ecuación (4-163) es

$$y(t|\xi) = \begin{cases} e^{-(\mu+\lambda)(t-\xi)} & t > \xi, \\ 0 & t < \xi. \end{cases} \quad (4-164)$$

Introduciendo esta solución para  $y$  en la ecuación (4-161), obtenemos

$$\left( \frac{d}{dt} + \mu - \lambda \right) G(t|\xi) = \begin{cases} e^{-(\mu+\lambda)(t-\xi)} & t > \xi, \\ 0 & t < \xi. \end{cases}$$

que, al ser multiplicada por el factor de integración  $e^{(\mu-\lambda)t}$ , toma la forma

$$\frac{d}{dt} [e^{(\mu-\lambda)t} G(t|\xi)] = \begin{cases} e^{-2\lambda t} e^{(\mu+\lambda)t} & t > \xi, \\ 0 & t < \xi. \end{cases} \quad (4-165)$$

La integración de esta última ecuación nos da la solución de la función de Green con  $\mu \neq \omega_0$  o  $\lambda \neq 0$ ,

$$e^{(\mu+\lambda)t} G(t|\xi) = \begin{cases} \frac{e^{(\mu+\lambda)t}}{2\lambda} (e^{-2\lambda t} - e^{-2\lambda \xi}) & t > \xi, \\ 0 & t < \xi, \end{cases}$$

o

$$G(t|\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda} [e^{-(\mu-\lambda)(t-\xi)} - e^{-(\mu+\lambda)(t-\xi)}] & t \geq \xi, \\ 0 & t \leq \xi. \end{cases} \quad (4-166)$$

Se observará que la función de Green,  $G(t|\xi)$ , es una función continua de  $(t - \xi)$ .

Luego, si  $\mu \neq \omega_0$ , la solución para una fuerza  $F(t)$  expresada por la ecuación (4-158) para  $t > T_1$  queda expresada por

$$x(t) = \int_{T_1}^t \frac{F(\xi)}{2\lambda m} [e^{-(\mu-\lambda)(t-\xi)} - e^{-(\mu+\lambda)(t-\xi)}] d\xi. \quad (4-167)$$

► Como ejemplo sobre lo correcta que es la ecuación (4-167), la utilizaremos para hallar la solución particular para la fuerza excitadora sinusoidal

$$F(t) = F_0 e^{i(\omega t + \theta)}.$$

La solución particular se obtiene tomando el límite superior de la integral de la ecuación (4-167). Entonces como

$$\int_{T_1}^t e^{(\mu-\lambda)\xi} e^{i(\omega\xi + \theta)} d\xi = \frac{e^{(\mu+\lambda)t} e^{i(\omega t + \theta)}}{\mu - \lambda + i\omega}$$

y

$$\int_{T_1}^t e^{(\mu+\lambda)\xi} e^{i(\omega\xi + \theta)} d\xi = \frac{e^{(\mu+\lambda)t} e^{i(\omega t + \theta)}}{\mu + \lambda + i\omega},$$

la solución particular será

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{F_0}{2m\lambda} e^{i(\omega t + \theta)} \left( \frac{1}{\mu - \lambda + i\omega} - \frac{1}{\mu + \lambda + i\omega} \right) \\ &= \frac{F_0 e^{i(\omega t + \theta)}}{m(\mu^2 - \omega^2 - \lambda^2 + 2i\mu\omega)} \\ &= \frac{F_0 e^{i(\omega t + \theta)}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\mu\omega)}, \end{aligned}$$

que concuerda con la ecuación (4-134) de la amplitud de  $x_p(t)$ . ◀

La ecuación (4-166) de la función de Green para el movimiento de un oscilador armónico amortiguado, se pudo obtener partiendo de consideraciones algo más sencillas. Recordaremos que la función de Green es la solución de la ecuación (4-160), que es la del movimiento de un oscilador armónico amortiguado de masa unidad al cual se aplica una fuerza  $\delta(t - \xi)$ . Esta fuerza imparte al oscilador una cantidad de movimiento lineal unidad o una velocidad unidad en el tiempo  $t = \xi$ . La ecuación (4-166) representaría, por lo tanto, la solución de un oscilador armónico amortiguado libre que, un instante después del tiempo  $t = \xi$ , tuviera cero desplazamiento y una cantidad de movimiento unidad, o bien, una velocidad unidad, lo que se desprende del hecho de que antes del tiempo  $t = \xi$  el oscilador estaba en reposo, y en el tiempo  $t = \xi$  recibió un impulso unidad, después del cual comenzó a moverse con oscilaciones armónicas simples amortiguadas. La solución del problema para  $\lambda \neq 0$  es dada por la ecuación (4-92); y, explícitamente, para las condiciones iniciales

$$x(\xi) = 0, \quad v(\xi) = 1,$$

toma la forma

$$x(t) = \frac{e^{-\lambda(t-\xi)}}{2\lambda} [e^{\lambda(t-\xi)} - e^{-\lambda(t-\xi)}]$$

para todo  $t > \xi$ , lo que concuerda con la ecuación (4-166).

Para concluir, explicaremos cómo obtener la solución general para cualesquiera condiciones iniciales en el tiempo  $t = t_0$ , conociendo la función de Green.

Para ello, necesitaremos la ecuación diferencial que queda satisfecha por la función de Green  $G(t|\xi)$  que se considerará como función de  $\xi$  para  $t$  fija. Esta ecuación diferencial se puede hallar fácilmente, pues encontramos que  $G(t|\xi)$  es función de  $(t - \xi)$ , y, por lo tanto,

$$\frac{\partial G(t|\xi)}{\partial t} = -\frac{\partial G(t|\xi)}{\partial \xi}$$

y

$$\frac{\partial^2 G(t|\xi)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 G(t|\xi)}{\partial \xi^2}. \quad (4-168)$$

Obtenemos así la ecuación diferencial de  $G(t|\xi)$  en función de  $\xi$

$$\frac{\partial^2 G(t|\xi)}{\partial \xi^2} - 2\mu \frac{\partial G(t|\xi)}{\partial \xi} + \omega_0^2 G(t|\xi) = \delta(t - \xi). \quad (4-169)$$

Multiplicando esta ecuación por  $x(\xi)$ , y la ecuación

$$\frac{d^2}{d\xi^2} x(\xi) + 2\mu \frac{d}{d\xi} x(\xi) + \omega_0^2 x(\xi) = \frac{F(\xi)}{m}$$

satisfecha por  $x(\xi)$  por la función de Green  $G(t|\xi)$ , obtenemos, restando las dos ecuaciones resultantes, el resultado

$$\begin{aligned} x(\xi) \delta(t - \xi) - \frac{F(\xi)}{m} G(t|\xi) &= \left( x(\xi) \frac{d^2 G(t|\xi)}{d\xi^2} - G(t|\xi) \frac{d^2 x(\xi)}{d\xi^2} \right) \\ &\quad - 2\mu \left( x(\xi) \frac{dG(t|\xi)}{d\xi} + G(t|\xi) \frac{dx(\xi)}{d\xi} \right) \\ &= \frac{d}{d\xi} \left[ x(\xi) \frac{dG(t|\xi)}{d\xi} - G(t|\xi) \frac{dx(\xi)}{d\xi} - 2\mu x(\xi) G(t|\xi) \right]. \quad (4-170) \end{aligned}$$

(Hemos reemplazado la derivada parcial  $\partial/\partial\xi$  por la total  $d/d\xi$ . Se entiende que  $t$  se mantiene constante.) Integrando ahora la ecuación (4-170) desde el tiempo  $t_0$  hasta cualquier tiempo  $t+$ , un poco mayor que  $t$ , tendremos

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_0}^{t+} \frac{F(\xi)}{m} G(t|\xi) d\xi \\ &\quad + \left[ x(\xi) \frac{dG(t|\xi)}{d\xi} - G(t|\xi) \frac{dx(\xi)}{d\xi} - 2\mu x(\xi) G(t|\xi) \right]_{\xi=t_0}^{\xi=t+}. \quad (4-171) \end{aligned}$$

Pero, por la ecuación (4-166),

$$G(t|\xi) = 0 \quad \text{para} \quad \xi > t.$$

Luego, si  $\xi > t$  tenemos semejantemente

$$\frac{dG(t|\xi)}{d\xi} = 0, \quad \xi > t.$$

Entonces, la solución general será

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_0}^{t+} \frac{G(t|\xi)F(\xi)}{m} d\xi \\ &\quad + \left\{ G(t|t_0)[\dot{x}(t_0) + 2\mu x(t_0)] - x(t_0) \frac{d}{dt_0} G(t|t_0) \right\}. \quad (4-172) \end{aligned}$$

Observaremos que el primer término de esta solución es igual a la solución hallada anteriormente; es decir, la velocidad y el desplazamiento son nulos en el tiempo  $t = t_0$ . Por el contrario, la cantidad entre llaves es una solución de la ecuación homogénea con las constantes de integración ajustadas de forma que nos dé las condiciones iniciales correctas.

Podemos darnos cuenta de que los términos adicionales dan las condiciones iniciales correctas, porque  $G(t|t_0)$  para  $t > t_0$  es la solución de la ecuación homogénea que satisface las condiciones iniciales

$$G(t_0+|t_0) = 0$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t|t_0) \Big|_{t=t_0+} = -\frac{\partial}{\partial t_0} G(t|t_0) \Big|_{t=t_0+} = 1,$$

donde  $t_0+$  representa un tiempo infinitesimalmente mayor que  $t_0$ . Entonces, la ecuación (4-172) nos da

$$x(t = t_0) = x(t_0)$$

y

$$\begin{aligned} \dot{x}(t = t_0+) &= \dot{x}(t_0) + 2\mu x(t_0) - x(t_0) \frac{\partial^2}{\partial t \partial t_0} G(t|t_0) \Big|_{t=t_0+} \\ &= \dot{x}(t_0) + 2\mu x(t_0) + x(t_0) \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t|t_0) \Big|_{t=t_0+} = \dot{x}(t_0). \end{aligned}$$

El último paso se deduce de

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t|t_0) \Big|_{t=t_0+} = -2\mu \frac{\partial}{\partial t} G(t|t_0) \Big|_{t=t_0+} - \omega_0^2 G(t_0+|t_0) = -2\mu.$$



## 4-13 Movimiento a lo largo de una curva determinada

El movimiento de una partícula a lo largo de una curva determinada es un ejemplo de problema que conduce a una ecuación de movimiento unidimensional para cualquier coordenada cuyos valores tengan una correspondencia biunívoca con los puntos de la curva. Una coordenada de este tipo es siempre la coordenada  $s$  que representa la distancia, medida a lo largo de la curva, de los puntos de ésta con respecto a un punto fijo de la misma. La componente de la ecuación de movimiento de Newton en la dirección de la tangente a la curva se expresa, en función de  $s$ , por

$$F_s = m\ddot{s}, \quad (4-173)$$

donde  $F_s$  es la componente tangencial de la fuerza y  $\ddot{s}$  es, por la ecuación (2-100), la componente tangencial de la aceleración.

Si  $F_s$  es función bien del tiempo, de la coordenada  $s$ , o de su derivada con respecto al tiempo  $\dot{s}$ , entonces, como hemos visto a lo largo de este capítulo, podrá hallarse fácilmente una solución. En especial, si la fuerza sólo es función de  $s$ , podemos definir una función de energía potencial  $U(s)$  tal que

$$F_s(s) = -\frac{dU}{ds}. \quad (4-174)$$

Se puede expresar el trabajo por la diferencia de energía potencial entre los dos puntos extremos

$$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} F_s(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = U(s_1) - U(s_2). \quad (4-175)$$

Como el trabajo es igual al cambio en la energía cinética,

$$W_{12} = \frac{1}{2}m\dot{s}_2^2 - \frac{1}{2}m\dot{s}_1^2,$$

tendremos para fuerzas que sean función de la distancia  $s$ , la conservación de la energía total

$$E = T + U, \quad (4-176)$$

donde la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2.$$

Consideremos, como ejemplo, el movimiento de una partícula de masa  $m$  que describa una trayectoria circular en un plano vertical, bajo la acción de la fuerza gravitacional de magnitud  $mg$  y la fuerza restringidora,  $\mathbf{R}$ , que obliga a la partícula a moverse en una circunferencia. En la figura 4-16

vemos que la distancia sobre la circunferencia del punto  $P$  al punto más bajo de la misma está dado por

$$s = l\theta, \quad (4-177)$$

donde  $l$  es el radio de la circunferencia y  $\theta$  el ángulo en radianes formado por la recta  $OP$  con la vertical. La fuerza restringidora,  $\mathbf{R}$ , de la cual hablaremos más ampliamente en los siguientes capítulos, actúa en una dirección normal a la trayectoria circular por lo que la componente tangencial de la fuerza que actúa sobre la partícula se deberá exclusivamente a la gravedad. En la figura 4-16 vemos que la componente tangencial de la fuerza gravitacional es

$$F_s = -mg \sin \theta = -mg \sin \frac{s}{l}. \quad (4-178)$$

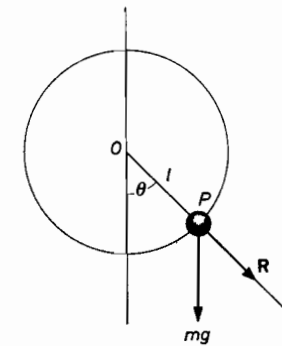


Fig. 4-16. Movimiento en una circunferencia vertical.

La energía potencial, de la que se deriva esta componente tangencial, es

$$U(s) = -mgl \cos \theta = -mgl \cos \frac{s}{l}. \quad (4-179)$$

Tiene un mínimo en  $s = 0$  o  $\theta = 0$ . Para valores pequeños de  $s$ , la partícula tendrá un movimiento armónico simple a un lado y otro del punto de equilibrio. Como  $\sin \theta$  es aproximadamente igual a  $\theta = s/l$  cuando el valor de  $\theta$  es pequeño, la ecuación quedará

$$m\ddot{s} = -\frac{mgs}{l}. \quad (4-180)$$

Esta es la ecuación de movimiento de un oscilador armónico simple no amortiguado que oscile con una frecuencia angular  $\omega_0$ , donde

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}. \quad (4-181)$$

Si los desplazamientos desde la posición de equilibrio no son pequeños, resolveremos el problema siguiendo el método esbozado en la sección 4-6. Se halla que la energía total,

$$E = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 - mgl \cos \frac{s}{l}, \quad (4-182)$$

es una constante del movimiento y en función de  $\theta$  toma la forma

$$E = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta. \quad (4-183)$$

De esta ecuación se puede despejar  $\dot{\theta}$ , e integrando a continuación obtendremos el valor de  $\theta$  en función del tiempo. Se halla así

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{2/ml^2} \sqrt{E + mgl \cos \theta}, \quad (4-184)$$

que da la solución

$$\sqrt{\frac{2g}{l}} (t - t_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\pm \sqrt{a + \cos \theta}}, \quad (4-185)$$

siendo  $a = E/mgl$ . Se han de escoger los signos más o menos del integrando de modo que resulte una integral que siempre crezca en magnitud, como se indicó en una de las primeras secciones de este capítulo.

El segundo miembro de la ecuación (4-185) es una integral elíptica. Se puede integrar numéricamente desarrollando el denominador por la fórmula del binomio. Por ejemplo, para  $a > 1$  podemos establecer

$$(a + \cos \theta)^{-1/2} = a^{-1/2} - \frac{1}{2} a^{-3/2} \cos \theta + \frac{3}{8} a^{-5/2} \cos^2 \theta - \dots, \quad (4-186)$$

e integraremos término a término la serie resultante.

Si  $E > mgl$ , no existen puntos de retorno. Esta situación se presenta cuando la partícula tiene energía suficiente para llegar a la parte superior de la circunferencia con alguna energía cinética aún restante; en cuyo caso la partícula continuará de consiguiente moviéndose alrededor de la circunferencia haciendo vueltas enteras y, por lo tanto, aumentando constantemente la magnitud de  $\theta$ .

Si  $a < 1$  el movimiento es periódico, y el período estará dado por

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_{\text{máx}}} \frac{d\theta}{\sqrt{2} \sqrt{a + \cos \theta}} \quad (4-187)$$

donde  $\theta_{\text{máx}}$  es el desplazamiento angular máximo de la partícula. Este desplazamiento máximo se presenta cuando la velocidad de la partícula (o sea  $\dot{\theta}$ ) se anula, para lo cual encontraremos

$$\theta_{\text{máx}} = \cos^{-1}(-a). \quad (4-188)$$

#### 4-14 Oscilador anarmónico

Hemos visto que para pequeños desplazamientos de una partícula respecto a un punto de equilibrio estable, se halló que su movimiento es armónico simple. Se consideraban pequeños los desplazamientos si el término en  $x^3$  y los de mayor grado en el desarrollo en serie de Taylor de la función de energía potencial, respecto al punto de equilibrio, eran despreciables. Si no se cumple esta condición, rige entonces el movimiento, dentro de los términos siguientes de aproximación que tomen, una ecuación de la forma

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha mx^2 - \beta mx^3 - \dots \quad (4-189)$$

El movimiento respecto a un punto de equilibrio estable, siendo uno limitado, es todavía periódico, como indicamos en la sección 4-7, pero ya no es armónico simple. Se dice que es un movimiento, *anarmónico*. La ecuación (4-189) no es diferencial lineal, y no hay ningún método general para resolver una ecuación diferencial no lineal. Si sólo se retienen los términos en  $x^3$  y  $x^4$  del desarrollo por la serie de Taylor, de la función de energía potencial, se encuentra que podemos obtener una solución numérica fácilmente para el problema, pues las integrales de la forma

$$\int \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}\alpha x^3 - \frac{1}{4}\beta x^4}}$$

se pueden expresar en función de integrales elípticas para las que existen tablas completas y detalladas.

Nos limitaremos a estudiar algunas soluciones aproximadas de la ecuación

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \alpha x^2 - \beta x^3. \quad (4-190)$$

El período del movimiento de una partícula que se mueve a un lado y otro de un punto de equilibrio estable, dentro del campo de energía potencial

$$U(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{3} \alpha x^3 + \frac{1}{4} \beta x^4 \quad (4-191)$$

está dado por

$$\tau = 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (4-192)$$

Siendo aquí  $x_1$  y  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) las raíces de la ecuación

$$U(x) = E,$$

y representan los desplazamientos máximo y mínimo a partir de la posición de equilibrio situada en el punto  $x = 0$ .

Como se indicó anteriormente, la integral de la ecuación (4-192) de la función de energía potencial dada por la ecuación (4-191) se puede expresar en relación con integrales elípticas. Si los términos  $\alpha x^3$  y  $\beta x^4$  son pequeños, será suficiente una solución aproximada, que se podrá hallar por diferentes métodos. A continuación expondremos dos de estos métodos equivalentes.

Para simplificar los desarrollos algebraicos que intervienen y hacer así más claros los métodos, nos limitaremos al caso en que  $\alpha = 0$ , es decir, a una función de energía

potencial simétrica con respecto a la posición de equilibrio. Puesto que el movimiento en consideración es limitado y periódico, podemos desarrollar la solución en serie de Fourier,

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t, \quad (4-193)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular del movimiento. Está relacionada al período  $\tau$  del movimiento por

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}. \quad (4-194)$$

Podemos simplificar el desarrollo en serie Fourier de  $x(t)$  con las siguientes consideraciones. La posición de equilibrio para una función de energía potencial simétrica es también la posición media del oscilador. Por tanto, se deduce que

$$a_0 = 0.$$

Además, por una elección adecuada del instante o tiempo inicial  $t = 0$ , podemos hallar que el movimiento es también una función del tiempo, en cuyo caso sólo aparecerán los términos coseno en el desarrollo por la serie de Fourier de la solución. Este sería el caso si escogiéramos  $t = 0$  cuando la partícula se encontrara en un punto de desplazamiento máximo a partir de la posición de equilibrio; o sea, cuando su velocidad fuera nula. Entonces, será posible expresar la solución en la forma

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t. \quad (4-195)$$

Ahora bien, como para  $\beta = 0$ , la solución es  $x(t) = a_1 \cos \omega_0 t$ , se deduce que todas las  $a_n$  de la ecuación (4-195) son funciones de  $\beta$ , y, con excepción de  $a_1$ , tenderán a cero cuando  $\beta$  tienda a cero. La frecuencia  $\omega$  también es función de  $\beta$ ; y tiende a  $\omega_0$  a medida que  $\beta$  se aproxima a 0. Por tanto, para valores pequeños de  $\beta$  es razonable suponer que todas las  $a_n$  con  $n \neq 1$  son pequeñas en relación con  $a_1$ . Utilizando la ecuación (4-195) como una posible solución de tanteo, tendremos que

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = (\omega_0^2 - \omega^2) a_1 \cos \omega t + (\omega_0^2 - 4\omega^2) a_2 \cos 2\omega t + (\omega_0^2 - 9\omega^2) a_3 \cos 3\omega t + \dots, \quad (4-196)$$

y que, en una primera aproximación, podemos establecer

$$\begin{aligned} -\beta x^3 &= -\beta a_1^3 \cos^3 \omega t \\ &= -\frac{3}{4}\beta a_1^3 \cos \omega t - \frac{1}{4}\beta a_1^3 \cos 3\omega t. \end{aligned} \quad (4-197)$$

Igualando las dos últimas ecuaciones, vemos que, en una primera aproximación

$$(\omega_0^2 - \omega^2) a_1 = -\frac{3}{4}\beta a_1^3, \quad (4-198)$$

$$a_2 = 0,$$

$$y \quad (\omega_0^2 - 9\omega^2) a_3 = -\frac{1}{4}\beta a_1^3. \quad (4-199)$$

La ecuación (4-198) nos da una primera aproximación del cambio de la frecuencia natural de vibración. Si el cambio de esta frecuencia se supone que es pequeño, podemos establecer

$$\omega_0 + \omega \approx 2\omega_0 \quad y \quad \omega_0 - \omega = \Delta\omega.$$

Con esta aproximación se halla

$$\Delta\omega = -\frac{3\beta a_1^3}{8\omega_0^3},$$

o bien,

$$\omega = \omega_0 + \frac{3\beta a_1^2}{8\omega_0}. \quad (4-200)$$

Realmente, como para  $\beta$  positivo, la amplitud máxima del movimiento oscilatorio con una energía total dada es menor que la amplitud del movimiento armónico simple, en el cual  $\beta = 0$  (fig. 4-17), es de esperar que la frecuencia aumente.

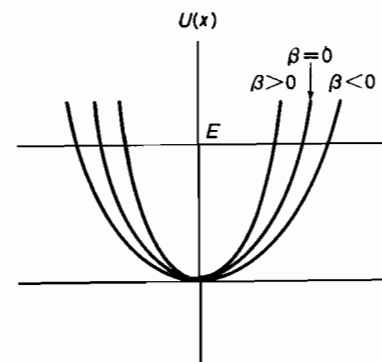


FIG. 4-17. Gráfica de  $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}m\beta x^4$ .

Debemos aclarar que la frecuencia natural de vibración del oscilador anarmónico, a diferencia de la del oscilador armónico simple, es función de la amplitud del movimiento.

Con la ecuación (4-199) se halla una primera aproximación del coeficiente  $a_3$ . Poniendo

$$\omega_0^2 - 9\omega^2 \approx -8\omega_0^2,$$

obtenemos

$$a_3 = \frac{\beta a_1^3}{32\omega_0^2}, \quad (4-201)$$

que nos da, para una primera aproximación, la solución

$$x(t) = a_1 \cos \omega t + \frac{\beta a_1^3}{32\omega_0^2} \cos 3\omega t. \quad (4-202)$$

Se puede proseguir este procedimiento, utilizando los valores anteriores en la solución de tanteo para obtener, sucesivamente, valores cada vez más aproximados de la frecuencia natural de vibración,  $\omega$ , y de los coeficientes del desarrollo de Fourier de la solución. Este método se conoce como *método de aproximaciones sucesivas*.

Hubiéramos alcanzado el mismo resultado por un enfoque o planteamiento, algo más complicado, que el de aproximaciones sucesivas. En este planteamiento, el término  $\beta x^3$  de la ecuación

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\beta x^3 \quad (4-203)$$

se considera que es un término no homogéneo de la ecuación diferencial, que si no por él sería lineal. Hemos visto, por la ecuación (4-172), que la solución no homogénea de esta ecuación no homogénea se puede expresar en relación con la función de Green que, para  $\mu = 0$ , se halla que es [4-166]]:

$$G(t|\xi) = \begin{cases} \frac{\text{sen } \omega_0(t-\xi)}{\omega_0} & t \geq \xi, \\ 0 & t \leq \xi. \end{cases} \quad (4-204)$$

Sólo nos interesa la solución no homogénea de la ecuación (4-203), en vista de que es una ecuación diferencial no lineal, cuya solución general no es expresable por la suma de la solución para  $\beta = 0$  más la solución cuando  $\beta \neq 0$ .

La solución particular de la ecuación (4-203) es

$$x(t) = - \int^t \beta x^3(\xi) \frac{\text{sen } \omega_0(t-\xi)}{\omega_0} d\xi. \quad (4-205)$$

E introduciendo la primera aproximación a la solución de esta ecuación, que es el primer término del desarrollo por la serie de Fourier de  $x(\xi)$ ,

$$x_1(\xi) = a_1 \cos \omega \xi,$$

y utilizando la identidad trigonométrica

$$\begin{aligned} \text{sen } \omega_0(t-\xi) \cos^3 \omega \xi &= \frac{1}{8} \{ \text{sen } [\omega_0 t + (\omega - \omega_0)\xi] + \text{sen } [\omega_0 t - (\omega + \omega_0)\xi] \} \\ &\quad + \frac{1}{8} \{ \text{sen } [\omega_0 t + (3\omega - \omega_0)\xi] + \text{sen } [\omega_0 t - (3\omega + \omega_0)\xi] \}, \end{aligned}$$

hallamos la nueva solución aproximada

$$x(t) = - \frac{3\beta a_1^3}{8\omega_0} \left\{ \frac{\cos \omega t}{\omega_0 - \omega} + \frac{\cos \omega t}{\omega_0 + \omega} \right\} - \frac{\beta a_1^3}{8\omega_0} \left\{ \frac{\cos 3\omega t}{\omega_0 - 3\omega} + \frac{\cos 3\omega t}{\omega_0 + 3\omega} \right\},$$

o sea,

$$x(t) = - \frac{3}{4} \frac{\beta a_1^3}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t - \frac{1}{4} \frac{\beta a_1^3 \cos 3\omega t}{\omega_0^2 - 9\omega^2}. \quad (4-206)$$

Para poder poner esta solución de acuerdo con la de la forma

$$x(t) = a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t,$$

será necesario, como vimos antes, que

$$(\omega_0^2 - \omega^2)a_1 = -\frac{3}{4}\beta a_1^3, \quad a_2 = 0 \quad \text{y} \quad a_3 = \frac{1}{32} \frac{\beta a_1^3}{\omega_0^2}.$$

Si a continuación introducimos la aproximación

$$x(\xi) = a_1 \cos \omega t + \frac{1}{32} \frac{\beta a_1^3}{\omega_0^2} \cos 3\omega t$$

en el segundo miembro de la ecuación (4-205), hallaremos la siguiente aproximación de la solución de la ecuación (4-203).

Observamos que la ecuación (4-205) se conoce por *ecuación integral*.

La importancia de los términos anarmónicos se puede apreciar considerando, por ejemplo, el movimiento vibratorio de los átomos en un cristal isotrópico. Suponiendo que todos los átomos del cristal oscilan respecto a un punto de equilibrio estable, el movimiento en cualquier dirección se describe clásicamente como un movimiento dentro de un campo de energía potencial

$$U = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{3} max^3 + \frac{1}{4} m\beta x^4.$$

En nuestro ejemplo vemos que siendo cero la posición media del oscilador para  $\alpha = 0$ , los términos en  $kx^2$  y  $\beta x^4$  no contarán en la expansión o dilatación térmica del cristal. De esta dilatación da cuenta el término  $\frac{1}{3} max^3$ , que destruye la simetría del problema y, por lo tanto, da una posición media diferente de cero.

#### 4-15 Oscilador anarmónico forzado

La ecuación del movimiento del oscilador anarmónico que estamos considerando ( $\alpha = 0$ ), cuando su movimiento es forzado por una fuerza sinusoidal excitadora

$$F = F_0 \cos \omega t,$$

es

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t - \beta x^3. \quad (4-207)$$

Podemos hallar a ésta una solución aproximada con la ecuación (4-172), que nos dará como solución particular la ecuación integral

$$x(t) = \int^t \frac{F_0}{m} \cos \omega \xi \frac{\text{sen } \omega_0(t-\xi)}{\omega_0} d\xi - \int^t \beta x^3(\xi) \frac{\text{sen } \omega_0(t-\xi)}{\omega_0} d\xi. \quad (4-208)$$

Introduciendo, nuevamente, la primera aproximación

$$x_1(\xi) = a_1 \cos \omega \xi$$

en esta ecuación integral, llegaremos a una segunda aproximación a la solución,

$$x_2(t) = \frac{F_0}{m} \frac{\cos \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{3}{4} \frac{\beta a_1^3}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t - \frac{1}{4} \beta a_1^3 \frac{\cos 3\omega t}{\omega_0^2 - 9\omega^2}. \quad (4-209)$$

En esta aproximación, la frecuencia  $\omega$  es claro que queda determinada por la fuerza sinusoidal excitadora. Para que esta solución coincida con la solución de tanteo

$$x(t) = a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t,$$

tendremos que tener

$$(\omega_0^2 - \omega^2)a_1 + \frac{3}{4}\beta a_1^3 - \frac{F_0}{m} = 0, \quad (4-210)$$

$$a_2 = 0, \quad (4-211)$$

y

$$a_3 = - \frac{1}{4} \frac{\beta a_1^3}{\omega_0^2 - 9\omega^2}. \quad (4-212)$$

Siempre que  $\omega_0^2 - 9\omega^2$  sea tan grande que  $a_3$  resulte pequeño,

$$x_1(t) = a_1 \cos \omega t \quad (4-213)$$

será una buena primera aproximación de la ecuación (4-208). La amplitud  $a_1$  de esta solución aproximada es una raíz de la ecuación (4-210).

Debemos aclarar que, a diferencia del caso del oscilador armónico simple no amortiguado, en este caso, la amplitud no aumenta indefinidamente cuando  $\omega$  se aproxima a la frecuencia natural de oscilación del oscilador anarmónico.

Otro fenómeno interesante que se presenta en este problema, pero no en el del oscilador armónico, es que, para cierto intervalo finito de las frecuencias, la ecuación (4-210) puede tener tres raíces reales de  $a_1$ , mientras que para todos los demás valores de  $\omega$  sólo da una raíz real para  $a_1$  (fig. 4-18). Esto significa que, a medida que  $\omega$  aumenta desde  $\omega < \omega_1$ , la amplitud  $a_1$ , que para valores pequeños de  $\omega$  está determinada por la parte *e-f* de la curva de la figura 4-18(a), se moverá o variará según la parte *f-g* de la misma. Cuando toma el valor correspondiente a *g*, cualquier aumento de  $\omega$  que le haga pasar de  $\omega_2$  hará necesariamente que la amplitud salte a la parte *h-j*. La amplitud del oscilador anarmónico forzado tendrá entonces una discontinuidad en  $\omega = \omega_2$ .

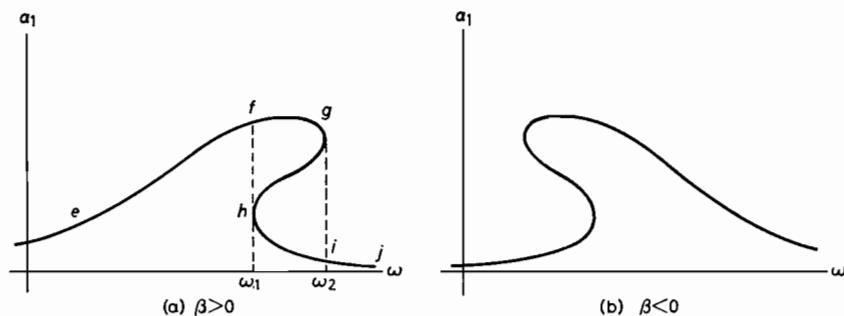


FIG. 4-18. Curva frecuencia-amplitud del oscilador anarmónico forzado.

Similarmente, cuando  $\omega$  disminuye desde valores de  $\omega > \omega_2$ , o sea, con amplitudes que corresponden a la parte *h-j* de la curva, la amplitud saltará, originando una discontinuidad, cuando  $\omega$  pase por  $\omega_1$ .

Observaremos que cerca de  $\omega = \frac{1}{3}\omega_0$  lo que haría infinito  $a_3$  en la ecuación (4-212), se tendrá una amplitud muy grande por el término en  $\cos 3\omega t$ . Es evidente que, cuando  $\omega$  tenga un valor próximo a  $\frac{1}{3}\omega_0$  se deberá tomar en cuenta el término  $\cos 3\omega t$  para hallar la primera aproximación de la solución por la serie de Fourier, en lugar de, como habíamos hecho, considerar pequeño este valor y usar únicamente el primer término de dicha serie (ver problema 4-25).

La existencia de nuevas resonancias en que la frecuencia de la fuerza excitadora no es igual a la de la oscilación producida en el oscilador, es un fenómeno muy interesante y útil característico del oscilador anarmónico. Este fenómeno se utiliza, a veces, para generar ondas electromagnéticas de una frecuencia determinada, mientras se excita el sistema en otra frecuencia.

## Problemas

4-1. Se lanza un bloque hacia arriba sobre un plano inclinado con una velocidad inicial  $v_0$ . Si el plano forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal y el coeficiente de

rozamiento (deslizante), entre el plano y el bloque es  $\mu$ , hállese el tiempo que tarda el bloque en volver al pie del plano inclinado. ¿Cuál será el valor mínimo del coeficiente de rozamiento en reposo o estático para que el bloque se detenga en el plano inclinado?

4-2. Encontrar la posición en un tiempo  $t$  de una partícula de masa  $m$ , cuando la fuerza aplicada es  $F = 2m \cos \omega t$  y  $x = 8$  a  $t = 0$  y  $x = -b$  a  $t = \pi/2\omega$ .

4-3. Determinar el movimiento de una partícula de masa  $m$  a la que se aplica la fuerza

$$F = F_0 e^{-\alpha t} \sin \omega t.$$

4-4. a) Si la velocidad límite de caída de un hombre de 80 Kg, con paracaídas, es la misma que tendría al caer libremente 0.75 metros; hallar el valor de esta velocidad límite y la constante de amortiguamiento  $\kappa$  (supóngase  $F_{\text{amort}} = -m\kappa v$ ).

b) Supongamos ahora que el hombre cae libremente (partiendo del reposo) durante 5 segundos y que después abre su paracaídas. Luego de otros 5 segundos, ¿cuál sería su velocidad?

4-5. Hállese la expresión de la velocidad y el desplazamiento de una partícula sometida a una fuerza resistente proporcional al cuadrado de su velocidad.

4-6. Repítase el problema 4-5 con una fuerza constante adicional. Si la partícula tiene una velocidad inicial  $v_0$  opuesta a la fuerza constante, ¿con qué velocidad regresará al punto de partida? ¿Qué distancia hay entre el punto de partida y el de retorno?

4-7. Una partícula de masa  $m$  tiene aplicada una fuerza  $F = -kx^2$ . Si  $\dot{x} = v_0$  cuando  $x = 0$ , hállese: a) la ecuación de la energía, b) el punto de retorno, y c) la velocidad en cualquier posición.

4-8. Hallar el movimiento rectilíneo de una partícula que se mueve en un campo de fuerzas repulsivas cuya magnitud varía inversamente al cubo de la distancia entre la partícula y el centro de las fuerzas.

4-9. Una partícula se mueve en el campo de energía potencial

$$U(x) = a \ln x + \frac{b}{x^2},$$

donde  $x$  es la distancia de la partícula al origen (el centro de fuerzas) y  $a$  y  $b$  son constantes positivas. Hállese la expresión de la fuerza en función de la posición e indíquese en qué punto se anula la fuerza. ¿Es este punto de equilibrio estable? Si lo es determínese el período de las oscilaciones pequeñas respecto al mismo.

4-10. Repetir el problema 4-9 con los siguientes campos de energía potencial:

$$(a) U(x) = a \cos x + \frac{b}{\sin^2 x}, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$(b) U(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$$

$$(c) U(x) = ax^2 - bx^4$$

$$(d) U(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$$

4-11. ¿Para qué valores de la energía está limitado y para cuáles no, el movimiento de una partícula de masa  $m$  en el campo de energía potencial

$$U(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2},$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes positivas? Hallar el período del movimiento limitado. [Sugerencia: tómese  $a = -2\alpha E$  y  $b = -(\alpha^2 - \beta^2)E$ .]

4-12. Hallar la expresión de la frecuencia de oscilación de una partícula de masa  $m$  unida a dos resortes de constantes  $k_1$  y  $k_2$ , como se muestra en la figura 4-19.

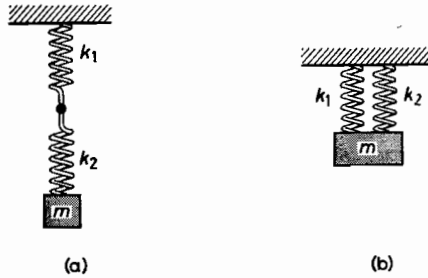


FIG. 4-19

4-13. Una partícula de masa  $m$  se mueve bajo la acción combinada de las fuerzas

$$F_1 = -kx, \quad F_2 = F_0 t,$$

y una fuerza amortiguadora proporcional a la velocidad de la partícula,

$$F_{\text{amort}} = -2m\mu\dot{x}.$$

Expresar la ecuación del movimiento en función de la posición y la velocidad iniciales de la partícula.

4-14. Repetir el problema 4-13 con las fuerzas

$$(a) F_2 = F_0 e^{-at}$$

$$(b) F_2 = F_0 e^{-at} \cos \omega t$$

$$(c) F_2 = F_0 e^{-at} + F_0 e^{-at} \cos \omega t.$$

4-15. Considérese el movimiento de un electrón en un conductor por la acción de la fuerza excitadora sinusoidal compleja  $F = F_0 e^{i\omega t}$ . Hállese la expresión de la dependencia entre la frecuencia y la conductividad compleja. (Ver. sección 4-10.)

4-16. Encontrar la solución general del movimiento de un cuerpo sometido a una fuerza lineal de repulsión  $F = kx$ . Demostrar que este tipo de movimiento es probable que se presente en la proximidad de un punto de equilibrio inestable.

4-17. Hallar el punto de resonancia de la anchura media de la curva de velocidad en función de la frecuencia de un oscilador armónico amortiguado bajo la acción de una fuerza excitadora sinusoidal.

4-18. Determinar el movimiento de una masa  $m$  sometida a una fuerza restauradora  $-kx$  y a otra amortiguadora,  $(\pm)\mu mg$ , debida al rozamiento del deslizamiento en seco. Demostrar que las oscilaciones son isócronas (período independiente de la

amplitud), con la amplitud decreciente en  $2\mu g/\omega_0^2$  en cada semiciclo hasta que la masa se detiene.

4-19. Demostrar que

$$(a) \int_{t_1}^{t_2} F(t) \frac{d}{dt} \delta(t-a) dt = -\left. \frac{d}{dt} F(t) \right|_{t=a}, \quad t_1 < a < t_2$$

$$(b) \int_{t_1}^{t_2} F(t) \delta(t^2 - a^2) dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t) \left[ \frac{\delta(t-a) + \delta(t+a)}{2a} \right] dt$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2a} F(a) & -a < t_1 < a < t_2 \\ \frac{1}{2a} F(-a) & t_1 < -a < t_2 < a \\ \frac{1}{2a} [F(a) + F(-a)] & \begin{cases} t_1 < -a \\ t_2 > a \end{cases} \end{cases}$$

$$(c) \int F(t) \delta[b(t-a)] dt = \frac{1}{|b|} F(a)$$

$$(d) \int F(t) \delta(t-a) \delta(t-b) dt = \delta(a-b) F(a) = \delta(b-a) F(b)$$

$$(e) \frac{d}{dt} \delta(t-a) = \frac{d}{dt} \delta(a-t)$$

4-20. Hallar la función de Green del oscilador armónico con amortiguación crítica  $\mu = \omega_0$ . Compárese la solución con la ecuación (4-99) obtenida para el oscilador colocado en  $x = 0$  cuando  $t = t_0$  y con una velocidad  $v_0 = 1/m$ .

4-21. Utilícese la función de Green para hallar una solución a los problemas 4-13 y 4-14. Considérense los casos

$$\mu = \omega_0 \quad \text{y} \quad \mu \neq \omega_0.$$

4-22. Demostrar que para  $-\pi < x < \pi$ ,

$$(a) x = 2 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx$$

$$(b) x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

$$(c) x \operatorname{sen} x = 1 - \frac{\cos x}{2} + 2 \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(n+1)x}{n^2 + 2n}$$

4-23. Una partícula de masa  $m$  se mueve en un plano vertical bajo la acción de la fuerza gravitacional  $mg$  y a lo largo de las curvas:

$$(a) y = -l \cos x$$

$$(b) y = -b \sqrt{1 - x^2/a^2}$$

Hállese el período de las pequeñas oscilaciones respecto a los puntos más bajos de las curvas.

4-24. Resuélvase la ecuación

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \alpha x^2 = 0$$

a) por el método de aproximaciones sucesivas, b) por el método de la ecuación integral (función de Green), c) compárense los períodos aproximados hallados en a) y b) con el valor numérico exacto deducido de la ecuación (4-192).

4-25. Hállese una solución aproximada de la ecuación de movimiento

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

para el caso en que  $\omega$  tenga un valor próximo a  $\frac{3}{2}\omega_0$ .

4-26. Obténgase una solución aproximada de la ecuación

$$\dot{x} + \omega_0^2 x - \alpha x^2 = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

4-27. Un oscilador anarmónico puede generar subarmónicas; considérese el oscilador anarmónico forzado, no amortiguado

$$m\ddot{x} + kx + m\beta x^3 = F_0 \cos \omega t$$

y determínese la condición para la que es posible una solución de la forma

$$x = a_1 \cos \omega t + a_{1/3} \cos \frac{1}{3}\omega t$$

4-28. Considérese el movimiento de un oscilador anarmónico cuya energía potencial es

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{3}max^3$$

bajo la acción combinada de dos fuerzas excitadoras sinusoidales,

$$F = F_1 \cos \omega_1 t + F_2 \cos \omega_2 t.$$

Demostrar que la solución contiene términos sinusoidales cuyas frecuencias son iguales a la suma y diferencia de las frecuencias excitadoras. Este fenómeno se conoce como intermodulación. ¿Cuáles son los valores posibles de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  para que exista resonancia?

## 5

## Ecuaciones de movimiento de Lagrange

En el capítulo anterior formulamos las ecuaciones de movimiento de Newton. A continuación las aplicamos al movimiento rectilíneo de una partícula, esperando que, por una elección apropiada de coordenadas generalizadas, podamos tener la suficiente fortuna para reducir cualquier problema a la solución de un número de ecuaciones diferenciales unidimensionales de movimiento.

En este capítulo, estudiaremos un método general para expresar las ecuaciones de movimiento en función de coordenadas generalizadas. Las ecuaciones generalizadas de movimiento que deduciremos, reciben su nombre de Lagrange, porque fue el primero que las dio a conocer en 1788.

### 5-1 Fuerzas generalizadas

El método de representar un vector en función de los vectores base de un sistema de coordenadas generalizadas se presentó en la sección 1-5, y en la sección 2-5 estudiamos la descripción cinemática del movimiento de una partícula en función de coordenadas generalizadas, obteniendo expresiones generales de la velocidad y la aceleración de la partícula.

Dicho método de representar un vector en función de coordenadas generalizadas se basa en que cualquier vector queda determinado si se conocen sus productos escalares por tres vectores no coplanares (sección 1-5). En un punto, tres de tales vectores, determinados por un conjunto de valores de las coordenadas generalizadas ( $q_1, q_2, q_3$ ), son

$$\mathbf{b}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \mathbf{k} \quad (5-1)$$

o bien, sus vectores recíprocos los que, si la transformación de coordenadas cartesianas a generalizadas es independiente del tiempo, están dados por

$$\mathbf{b}_i = \nabla q_i = \frac{\partial q_i}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial q_i}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial q_i}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (5-2)$$

En coordenadas curvilíneas ortogonales (secciones 2-4 y 2-5), los vectores recíprocos son

$$\mathbf{b}_i = \frac{1}{h_i} \mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i^2} \mathbf{b}_i.$$

Para representar un vector fuerza, utilizamos los vectores base  $\mathbf{b}_i$ . Los productos escalares de  $\mathbf{F}$  por los  $\mathbf{b}_i$  son

$$Q_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}_i = F_x \frac{\partial x}{\partial q_i} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_i} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_i}, \quad (5-3)$$

siendo las  $Q_i$  las *fuerzas generalizadas*. En función de éstas y de los vectores base inversos, una fuerza  $\mathbf{F}$  está expresada por

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 Q_i \mathbf{b}_i.$$

Consideremos, como ejemplo, las fuerzas generalizadas obtenidas cuando se emplean las coordenadas esféricas  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$ , definidas en la sección 2-4.

Se encontró que los vectores base  $\mathbf{b}_i$  para el sistema de coordenadas esféricas son (fig. 5-1):

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{r}, \\ \mathbf{b}_3 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = r \sin \theta \mathbf{e}_\phi = \mathbf{k} \times \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (5-4)$$

Luego, con estas coordenadas esféricas, tenemos las fuerzas generalizadas

$$Q_1 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}_1 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_r = F_r, \quad (5-5)$$

$$Q_2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_\phi \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}), \quad (5-6)$$

$$Q_3 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}_3 = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}). \quad (5-7)$$

Se halla que la componente de la fuerza  $\mathbf{F}$  en la dirección radial es  $Q_1$ . Por otro lado,  $Q_2$  y  $Q_3$  no tienen las dimensiones de la fuerza. Estas últimas fuerzas generalizadas son, respectivamente, las componentes del vector  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  en las direcciones  $\mathbf{e}_\phi$  y  $\mathbf{k}$ .

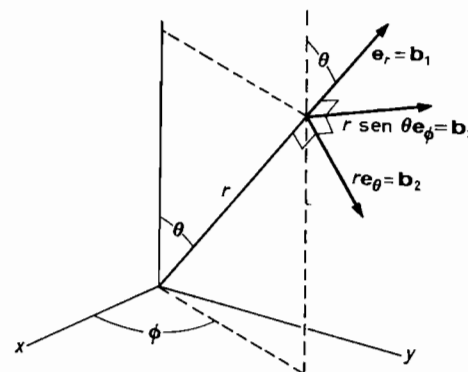


FIG. 5-1. Vectores base de las coordenadas esféricas en el punto  $(r, \theta, \phi)$ .

El vector  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  se dice que es el *momento*, con respecto al origen, que la fuerza  $\mathbf{F}$  ejerce sobre la partícula;  $Q_2$  y  $Q_3$  son, por tanto, componentes específicas de este momento. De hecho, la fuerza generalizada para cualquier coordenada angular es siempre la componente del momento del par sobre el eje alrededor del cual un cambio en la coordenada angular hace girar al vector de posición. Como se emplean con frecuencia coordenadas angulares, el momento definido por

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (5-8)$$

es una importante cantidad física de uso frecuente.

Debemos aclarar que el trabajo  $\Delta W$  efectuado por la fuerza  $\mathbf{F}$  cuando  $q_i$  varía en una cantidad infinitesimal,  $\Delta q_i$  es

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s}_i,$$

donde

$$\Delta \mathbf{s}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \Delta q_i = \Delta q_i \mathbf{b}_i$$

es el cambio del vector de posición cuando varía  $q_i$ . Esto nos da

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}_i \Delta q_i = Q_i \Delta q_i. \quad (5-9)$$

El término  $Q_i \Delta q_i$  tiene, por tanto, la dimensión del trabajo. Para un desplazamiento general en el que

$$\Delta \mathbf{s} = \Delta \mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r}_2 + \Delta \mathbf{r}_3 = \Delta q_1 \mathbf{b}_1 + \Delta q_2 \mathbf{b}_2 + \Delta q_3 \mathbf{b}_3, \quad (5-10)$$

el trabajo es

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} = \left( \sum_{i=1}^3 Q_i \mathbf{b}_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^3 \Delta q_j \mathbf{b}_j \right) = \sum_{i=1}^3 Q_i \Delta q_i, \quad (5-11)$$



puesto que

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij}.$$

### 5-2 Cantidades de movimiento generalizadas de una partícula

Análogamente, representaremos el vector de cantidad de movimiento  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  en un punto  $(q_1, q_2, q_3)$  en función de sus productos escalares

$$p_i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}_i, \quad (5-12)$$

con los tres vectores base  $\mathbf{b}_i$  definidos en el punto  $(q_1, q_2, q_3)$ . Los productos escalares  $p_i$  se llaman *cantidades de movimiento generalizadas de una partícula*.\*

A partir de la definición de la cantidad de movimiento lineal por el producto de la masa y el vector velocidad

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v},$$

encontramos que las cantidades de movimiento generalizadas de la partícula son

$$p_i = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i. \quad (5-13)$$

En la sección 2-4 hallamos las componentes covariantes de las velocidades  $v_i$  que se expresan por

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2}v^2 \right).$$

En consecuencia, la ecuación (5-13) se puede escribir en la forma

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad (5-14)$$

donde  $T = \frac{1}{2}mv^2$ .

Como ejemplo, hallaremos las cantidades de movimiento generalizadas de una partícula cuyo movimiento está descrito en coordenadas esféricas. De la misma manera que las fuerzas generalizadas que obtuvimos en la última sección, encontramos

$$p_1 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r = p_r \quad (5-15)$$

que es la componente de la cantidad de movimiento lineal en la dirección radial, y que

$$p_2 = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{r}) = \mathbf{e}_\phi \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \quad (5-16)$$

\* Debemos observar que las cantidades de movimiento generalizadas de una partícula definidas aquí no son, necesariamente, las mismas que las cantidades de movimiento generalizadas o conjugadas que estudiaremos en la sección 6-13. Para evitar confusiones, nos referiremos a las  $p_i$  consideradas aquí como las cantidades de movimiento de la "partícula" generalizadas.

y

$$p_3 = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \quad (5-17)$$

no tienen las dimensiones de la cantidad de movimiento lineal. Las dos últimas cantidades de movimiento generalizadas son las componentes del vector

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (5-18)$$

en las direcciones  $\mathbf{e}_\phi$  y  $\mathbf{k}$ , respectivamente. El vector  $\mathbf{L}$  se llama *cantidad de movimiento angular orbital* de la partícula. Nuevamente otra vez observamos que encontraremos esta cantidad de movimiento siempre que utilicemos coordenadas angulares. Como esto ocurre frecuentemente, dicha cantidad es una magnitud física muy importante.

Utilizando la ecuación (5-14) podemos obtener expresiones explícitas de las cantidades de movimiento generalizadas de una partícula. En coordenadas esféricas la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2),$$

de donde se halla

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},$$

$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2\theta \dot{\phi}.$$

Se puede llegar a las mismas expresiones utilizando las ecuaciones (5-15) y (5-17) y teniendo en cuenta que

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r \sin\theta \dot{\phi}\mathbf{e}_\phi).$$

Hemos de recordar que llamamos velocidades generalizadas a las componentes contravariantes de la velocidad

$$v_i^* = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i = \dot{x} \frac{\partial q_i}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial q_i}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial q_i}{\partial z} = \dot{q}_i. \quad (5-19)$$

Para transformaciones de coordenadas independientes del tiempo, se halla que la energía cinética en función de las velocidades generalizadas y de las cantidades de movimiento generalizadas, está dada por

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i, \quad (5-20)$$

ya que

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$$

y

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = \left( \sum_{i=1}^3 p_i \mathbf{b}_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^3 \dot{q}_j \mathbf{b}_j \right) = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i.$$

### 5-3 Ecuaciones de movimiento generalizadas

Las ecuaciones de movimiento generalizadas son los productos escalares de las ecuaciones de movimiento de Newton,  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , por los tres vectores base,  $\mathbf{b}_i$ , del sistema de coordenadas generalizadas. Los productos escalares de la fuerza por los vectores base se definieron en la sección 5-1 como las fuerzas generalizadas  $Q_i$ , y en la sección 2-4 vimos una expresión, generalmente muy útil, de los productos escalares del vector aceleración por los vectores base  $\mathbf{b}_i$ , que es

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{1}{2} v^2 \right).$$

Utilizando este resultado para los productos escalares  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_i$  obtendremos las ecuaciones de movimiento generalizadas en la forma

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad (5-21)$$

donde  $T = \frac{1}{2} m v^2$  es la energía cinética.

Las ecuaciones de movimiento expresadas en esta forma son las llamadas *ecuaciones de movimiento de Lagrange*.

Observaremos que, aparte de las ecuaciones (5-19) y (5-20), que sólo son correctas para transformaciones de coordenadas independientes del tiempo, todas las demás ecuaciones que hemos hallado empleando los vectores base  $\mathbf{b}_i$  son aplicables también a las transformaciones de coordenadas dependientes del tiempo

$$x = x(q_1, q_2, q_3, t),$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3, t),$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3, t).$$

► Como ejemplo de la aplicación de las ecuaciones de movimiento de Lagrange, consideremos el movimiento de una partícula en un plano bajo la acción de la fuerza central

$$\mathbf{F} = -m\omega_0^2 \mathbf{r} = -m\omega_0^2 (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}). \quad (5-22)$$

En coordenadas rectangulares la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

y los vectores base son los vectores base cartesianos

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{i} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{j}.$$

Obviamente deberíamos y hemos de obtener, empleando la ecuación (5-21), las ecuaciones de movimiento de Newton

$$Q_1 = F_x = m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x,$$

y

$$Q_2 = F_y = m\ddot{y} = -m\omega_0^2 y. \quad (5-23)$$

Estas son dos ecuaciones de movimiento unidimensionales independientes, cuyas soluciones se estudiaron en la sección 4-9. Estas son

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (5-24)$$

y

$$y = B \cos(\omega_0 t + \theta), \quad (5-25)$$

donde las constantes  $A$ ,  $B$ ,  $\phi$  y  $\theta$  son funciones de los valores iniciales  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\dot{x}_0$  y  $\dot{y}_0$  de las componentes del desplazamiento y la velocidad sobre los ejes de coordenadas. Dependiendo de los valores de las constantes,  $A$ ,  $B$ ,  $\phi$  y  $\theta$  la órbita del movimiento (problema 1-19) puede ser una elipse, una circunferencia o una línea recta.

Aunque este problema se resuelve fácilmente en coordenadas cartesianas, algunas características del movimiento se ven más claras empleando coordenadas cilíndricas, en las que la energía cinética está dada por

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2),$$

y los vectores base son

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_r \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_2 = r\mathbf{e}_\phi.$$

En consecuencia, las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas serán

$$Q_1 = F_r = -m\omega_0^2 r = \frac{d}{dt} (m\dot{r}) - m r \dot{\phi}^2 \quad (5-26)$$

y

$$Q_2 = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\phi}). \quad (5-27)$$

Puesto que, en este problema, el momento del par es nulo

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (-m\omega_0^2 \mathbf{r}) = 0,$$

tenemos de inmediato una ecuación de movimiento muy simple, que nos da

como solución que la componente  $z$  de la cantidad de movimiento angular orbital es una constante

$$mr^2\dot{\phi} = p_z = L_z = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = h. \quad (5-28)$$

En este problema, en que el movimiento se verifica en el plano  $xy$ , la componente  $z$  de la cantidad de movimiento angular orbital coincide con la magnitud de la cantidad de movimiento angular orbital total, puesto que ésta se encuentra sobre el eje  $z$ . ◀

Generalmente se encuentra que la cantidad de movimiento angular orbital total es una constante del movimiento siempre que el momento total del par que actúa sobre la partícula sea nulo. Esto se demuestra fácilmente haciendo el producto vectorial de las ecuaciones de movimiento de Newton por el radio vector  $\mathbf{r}$ . Esto nos da

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}), \quad (5-29)$$

ya que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times (m\mathbf{v}) = 0.$$

Luego, siempre que  $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ ,

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0$$

o sea,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const.} \quad (5-30)$$

Si el momento del par no es nulo la ecuación (5-29) nos da la ecuación de movimiento para el vector de cantidad de movimiento angular orbital,

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{L}. \quad (5-31)$$

Observaremos que esta ecuación contiene mucha más información que la contenida dentro de sus componentes específicos, cosa que sucede generalmente con las ecuaciones generalizadas del movimiento. Por lo tanto, siempre deberemos analizar esta ecuación para ver si encontramos alguna información adicional de utilidad.

► Volviendo a nuestro ejemplo, la otra ecuación de movimiento, o sea la (5-26), no es una ecuación diferencial unidimensional. Empleando la ecuación (5-28), recordando que  $p_z = mr^2\dot{\phi} = h$ , y, en consecuencia, que

$$\dot{\phi} = \frac{h}{mr^2}, \quad (5-32)$$

la ecuación (5-26) se puede hacer unidimensional. Utilizando la ecuación (5-32), podemos expresar la (5-26) en la forma

$$m\ddot{r} = -m\omega_0^2 r + \frac{h^2}{mr^3}. \quad (5-33)$$

Esta ecuación es, ahora, unidimensional y se puede resolver por los métodos esbozados en la sección 4-6.

Así, esto nos conduce a una segunda integral del movimiento, la integral de la energía

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2 + \frac{h^2}{2mr^2}, \quad (5-34)$$

que resulta que es la energía total de la partícula.

La fuerza

$$\mathbf{F} = -m\omega_0^2 \mathbf{r} \quad (5-35)$$

del problema que acabamos de considerar es un ejemplo de una fuerza central, que se expresa por

$$\mathbf{F} = f(r) \mathbf{e}_r, \quad (5-36)$$

cuya magnitud sólo es función de la coordenada radial,  $r$ . Las características generales del movimiento en un campo de fuerzas centrales se analizarán en el capítulo 7. ◀

► Como un segundo ejemplo, hallaremos las ecuaciones de movimiento en coordenadas parabólicas de un electrón, bajo la acción de un campo de fuerzas centrales de atracción

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^2} \mathbf{e}_r = -\nabla \left( -\frac{k}{r} \right)$$

y de un campo eléctrico uniforme dirigido sobre el eje  $z$  positivo. La influencia de un campo eléctrico uniforme sobre el movimiento y la energía de los electrones de los átomos, se conocen como *efecto Stark*.

En la sección 2-4 introducimos las coordenadas parabólicas que quedaron definidas por las ecuaciones

$$\xi^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z,$$

$$\eta^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z,$$

$$\phi = \text{tg}^{-1} \frac{y}{x} \quad \text{o sea} \quad \phi = \text{arc tg} \frac{y}{x}.$$

En función de  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\phi$ , y utilizando la ecuación (2-80) y los  $h_i$  hallados en la sección 2-4, se ve que la energía cinética está dada por

$$T = \frac{1}{2}m[(\dot{\eta}^2 + \dot{\xi}^2)(\eta^2 + \xi^2) + \eta^2\xi^2\dot{\phi}^2].$$

La fuerza que actúa sobre el electrón se expresa en función de las coordenadas parabólicas por

$$\mathbf{F} = -\nabla \left( -\frac{k}{r} + eEz \right) = -\nabla \left[ -\frac{2k}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{eE}{2}(\xi^2 - \eta^2) \right] = -\nabla U,$$

que nos lleva a las siguientes fuerzas generalizadas:

$$\begin{aligned} Q_\eta &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}_\eta \\ &= - \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right] = - \frac{\partial U}{\partial \eta} \\ &= - \frac{4k\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2} + eE\eta, \\ Q_\xi &= - \frac{\partial U}{\partial \xi} = - \frac{4k\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^2} - eE\xi, \end{aligned}$$

y

$$Q_\phi = 0.$$

Obtenemos así las ecuaciones generalizadas del movimiento

$$\begin{aligned} Q_\eta &= \frac{d}{dt} [m\dot{\eta}(\xi^2 + \eta^2)] - m\eta(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - m\eta\xi^2\dot{\phi}^2, \\ Q_\xi &= \frac{d}{dt} [m\dot{\xi}(\xi^2 + \eta^2)] - m\xi(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - m\xi\eta^2\dot{\phi}^2, \\ Q_\phi &= \frac{d}{dt} (m\eta^2\xi^2\dot{\phi}). \end{aligned}$$

La última ecuación es extremadamente simple, y conduce a una primera integral del movimiento

$$m\xi^2\eta^2\dot{\phi} = \text{const.}$$

Como se expuso antes,  $m\xi^2\eta^2\dot{\phi}$  representa una componente de la cantidad de movimiento angular. Realmente hallamos que

$$m\xi^2\eta^2\dot{\phi} = m(x^2 + y^2)\dot{\phi} = mr^2 \text{sen}^2 \theta \dot{\phi},$$

lo cual se vio en la sección 5-2 que representa la componente  $z$  de la cantidad de movimiento angular orbital. El lector debe comprobar que  $Q_\phi$  representa la componente  $z$  que se anula del momento del par. En el próxi-

mo capítulo veremos que, en este problema, la energía total del sistema, representada por

$$\varepsilon = T + \left( -\frac{k}{r} + eEz \right) = T + U,$$

también se conserva. ◀

#### 5-4 Movimiento restringido: restricciones holonómicas

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange son especialmente apropiadas para resolver problemas en que el movimiento de una partícula está sujeto a condiciones o restricciones.

Por ejemplo, una partícula puede estar obligada a permanecer sobre una superficie dada, o en una curva, que puede ella misma ser función del tiempo. Otras condiciones pueden imponer restricciones a las velocidades generalizadas de la partícula.

En la presente sección nos limitaremos a las restricciones en coordenadas generalizadas que se pueden expresar en la forma

$$\phi(q_1, q_2, q_3, t) = 0. \quad (5-37)$$

Tales restricciones reciben el nombre de *holonómicas*.

La existencia de restricciones, implica, necesariamente, fuerzas de reacción o fuerzas limitadoras o restrictivas. Por ejemplo, una partícula obligada

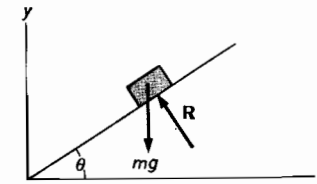


FIG. 5-2. Movimiento de una partícula a lo largo de un plano inclinado.

a moverse en un plano inclinado (fig. 5-2) debe tener coordenadas  $x$  y  $y$  que satisfagan la condición

$$\phi(x, y, z, t) = y - x \text{tg} \theta = 0,$$

donde  $x$  y  $y$  se miden desde el pie del plano inclinado. La única manera de que la partícula permanezca en el plano, es que éste ejerza sobre ella una fuerza que equilibre la componente de la resultante de las demás fuerzas que empujan a la partícula contra él.

La fuerza de reacción,  $\mathbf{R}$ , que una superficie sin rozamiento ejerce sobre una partícula, actúa siempre en una dirección normal a dicha superficie de restricción. En un tiempo  $t$ , la ecuación de restricción

$$\phi(q_1, q_2, q_3, t) = 0$$

define la citada superficie. Puesto que dos vectores paralelos sólo pueden diferir en magnitud (incluyendo en ésta al signo o sentido) podemos expresar la fuerza de reacción de esta superficie en la forma

$$\mathbf{R} = \lambda \nabla \phi, \quad (5-38)$$

pues en la sección 2-6, se demostró que  $\nabla \phi$  es un vector normal a la superficie definida por la ecuación (5-37) para todos los valores de  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  que satisfacen la ecuación en un instante o tiempo  $t$ . En general,  $\lambda$  es función de las coordenadas generalizadas, de sus derivadas con respecto al tiempo, y del tiempo. Sin embargo, su dependencia explícita de estas variables, se debe obtener de la solución de las ecuaciones de movimiento.

Observemos que una ecuación de restricción de la forma (5-37) se puede utilizar para reducir en una el número de coordenadas necesarias para la descripción del movimiento. No obstante, seguiremos usando todavía las tres ecuaciones de las componentes del movimiento y tres variables desconocidas, entre las cuales estará la función desconocida  $\lambda$  en lugar de la coordenada eliminada. Otra manera de enfocar el problema, es considerar que tiene cuatro variables desconocidas,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  y  $\lambda$ , que deberán determinarse con las tres ecuaciones de movimiento, junto con la ecuación (5-37).

Si la partícula está obligada a moverse sobre la superficie especificada por la ecuación (5-37), encontramos que su fuerza restrictiva generalizada es

$$R_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{b}_i = \lambda \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q_i}. \quad (5-39)$$

Esta fuerza tiene que añadirse a las demás fuerzas generalizadas,  $Q_i$ , que actúan sobre la partícula. Esto nos da la ecuación de movimiento

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q_i}. \quad (5-40)$$

Si la partícula está obligada a moverse sobre cierta trayectoria, entonces existen dos ecuaciones de restricción que relacionan las coordenadas generalizadas

$$\phi_1(q_1, q_2, q_3, t) = 0 \quad (5-41)$$

y

$$\phi_2(q_1, q_2, q_3, t) = 0. \quad (5-42)$$

La trayectoria sobre la que se mueve la partícula, es la intersección de las dos superficies definidas por las ecuaciones de restricción. La fuerza de restricción con que cada una de estas dos superficies acciona sobre la partícula, está dirigida, como antes, normalmente a la superficie de restricción y, por lo tanto, las fuerzas restrictivas se pueden expresar en la forma

$$\mathbf{R}_1 = \lambda_1 \nabla \phi_1 \quad (5-43)$$

y

$$\mathbf{R}_2 = \lambda_2 \nabla \phi_2. \quad (5-44)$$

Las ecuaciones de movimiento de una partícula cuyas coordenadas se exige que satisfagan las ecuaciones de restricción (5-41) y (5-42), están dadas, en consecuencia, por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial q_i} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial q_i}, \quad (5-45)$$

donde  $\lambda_1(\partial \phi_1 / \partial q_i)$  y  $\lambda_2(\partial \phi_2 / \partial q_i)$  son las fuerzas restrictivas generalizadas  $\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{b}_i$  y  $\mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{b}_i$ , respectivamente. La dependencia de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de las coordenadas, sus velocidades y el tiempo, se obtiene a partir de la resolución de las ecuaciones de movimiento, la ecuación (5-45) y las ecuaciones de restricción (5-41) y (5-42).

► Como un primer ejemplo, consideraremos el problema, bastante elemental, del movimiento de una partícula sobre la superficie de un plano inclinado sin rozamiento. Escogiendo los ejes  $x$  y  $y$ , como se indica en la figura 5-3, paralelo y perpendicular a dicho plano, respectivamente, y supo-

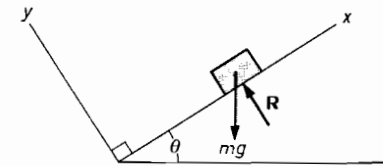


FIG. 5-3. Movimiento restringido de una partícula a lo largo de un plano inclinado liso.

niendo que el movimiento se realiza en un plano vertical, las ecuaciones de restricción serán

$$\phi_1(x, y, z) = y = 0 \quad (5-46)$$

y

$$\phi_2(x, y, z) = z = 0.$$

Eliminando la dependencia de  $z$ , la energía cinética para las coordenadas generalizadas escogidas, está dada por

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2,$$

que, por la ecuación (5-45) nos da las ecuaciones de movimiento

$$m\ddot{x} = -mg \operatorname{sen} \theta \quad (5-47)$$

y

$$m\ddot{y} = -mg \cos \theta + \lambda. \quad (5-48)$$

Puesto que

$$y = \dot{y} = 0,$$

la última ecuación de movimiento nos da el resultado, bastante obvio, de que la magnitud de la fuerza de reacción es

$$R = \lambda = mg \cos \theta. \quad (5-49)$$

Si el plano inclinado no está fijo, sino que se mueve hacia la derecha con una aceleración  $A$ , entonces, escogiendo las coordenadas como se muestra en la figura (5-4) la ecuación de restricción es

$$y - (x - V_0 t - \frac{1}{2}At^2) \operatorname{tg} \theta = 0, \quad (5-50)$$

donde  $V_0$  es la velocidad inicial del plano inclinado en el instante  $t = 0$  y  $x$  y  $y$  son las componentes cartesianas de la posición de la partícula, medidas desde el pie del plano inclinado en el mismo instante  $t = 0$ .

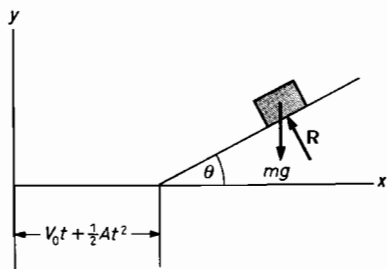


FIG. 5-4. Movimiento a lo largo de un plano inclinado en movimiento.

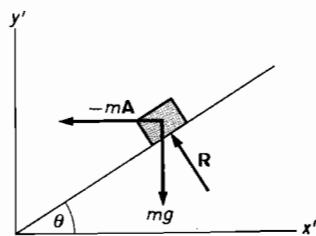


FIG. 5-5. Movimiento a lo largo de un plano inclinado en movimiento con respecto a un sistema de coordenadas que se mueve con dicho plano.

Para este problema, la ecuación (5-40) nos da las ecuaciones de movimiento

$$m\ddot{x} = -\lambda \operatorname{tg} \theta \quad (5-51)$$

y

$$m\ddot{y} = -mg + \lambda. \quad (5-52)$$

Empleando la ecuación (5-38) encontramos que las componentes  $x$  y  $y$  de la fuerza de reacción son

$$R_x = -\lambda \operatorname{tg} \theta \quad (5-53)$$

y

$$R_y = \lambda, \quad (5-54)$$

lo que nos da

$$R = \lambda \sec \theta.$$

En este problema,  $\lambda$  resulta que es una constante que el lector no tendrá dificultad en hallar.

También lo hubiéramos podido resolver, transformando, o cambiando, la descripción del movimiento a un sistema sometido a aceleración, específicamente, al sistema de coordenadas que se mueve con el plano inclinado. En un sistema de este tipo, con aceleración, las ecuaciones de movimiento de la partícula son idénticas a las de una partícula que se mueve en un plano inclinado fijo bajo la acción de la fuerza de gravedad, más la fuerza de inercia  $-mA\mathbf{i}$  (fig. 5-5).

Las ecuaciones de movimiento de este problema equivalente son

$$m\ddot{x}' = -R \operatorname{sen} \theta - mA \quad (5-55)$$

y

$$m\ddot{y}' = -mg + R \cos \theta. \quad (5-56)$$

Estas ecuaciones concuerdan con las (5-51) y (5-52) si se tiene en cuenta que

$$\ddot{x}' = \ddot{x} - A \quad \text{y} \quad \ddot{y}' = \ddot{y}.$$

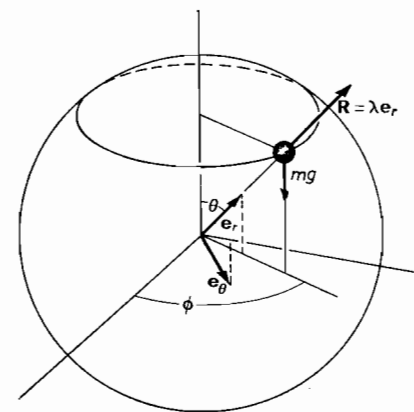


FIG. 5-6. Movimiento sobre una esfera de radio  $l$ .

Con este planteo del problema resulta claro que  $\lambda$ , cuya determinación se deja al lector, producirá una fuerza de reacción de magnitud

$$R = mg \cos \theta - mA \sin \theta. \quad (5-57)$$

► Como un segundo ejemplo, consideremos el movimiento de una partícula obligada a moverse sobre una superficie esférica de radio  $l$  bajo la acción de la fuerza de gravedad.

La ecuación de restricción, en coordenadas esféricas para este problema, es

$$r - l = 0. \quad (5-58)$$

La energía cinética en coordenadas esféricas está dada por

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2), \quad (5-59)$$

y la fuerza de gravedad (fig. 5-6) por

$$\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{k} = -mg \cos \theta \mathbf{e}_r + mg \sin \theta \mathbf{e}_\theta.$$

Las ecuaciones de movimiento se halla que son

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) = -mg \cos \theta + \lambda, \quad (5-60)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = mgr \sin \theta, \quad (5-61)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0. \quad (5-62)$$

La ecuación (5-62) es extremadamente simple y nos da una primera integral del movimiento que expresa la conservación de la componente  $z$  de la cantidad de movimiento angular orbital

$$p_\phi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = \text{const.} \quad (5-63)$$

Introduciendo esta relación en la ecuación (5-61), transformamos, a su vez, la última en la ecuación unidimensional de movimiento

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl \sin \theta + \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{ml^2 \sin^3 \theta}. \quad (5-64)$$

Como el segundo miembro de esta ecuación sólo es función de  $\theta$ , el método de la sección 4-6 se podrá utilizar, obteniendo así una segunda constante del movimiento que será la energía total

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta + \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \sin^2 \theta}. \quad (5-65)$$

Se deduce de la ecuación (5-64) que  $E$  es una constante del movimiento con lo que hallamos que

$$\frac{dE}{dt} = mr^2\ddot{\theta} - mgl \sin \theta \dot{\theta} - \frac{p_\phi^2 \cos \theta \dot{\theta}}{ml^2 \sin^3 \theta} = 0.$$

Teniendo en cuenta que el movimiento se efectúa sobre una esfera de radio constante,  $r = l$ , el lector comprenderá que  $E$  representa realmente la energía total, puesto que  $\dot{r} = 0$ .

Obsérvese que podríamos proseguir despejando  $\theta$  de la ecuación (5-65), y, subsecuentemente, integrando, hallar  $\theta$  en función de  $t$ . La solución a este problema no se puede obtener, sin embargo, en relación con funciones elementales, pero sí de integrales elípticas.

El caso en que  $\dot{\phi} = 0$  fue considerado en la sección 4-13. Para  $\dot{\phi} \neq 0$ , la ecuación del movimiento para  $\theta$  es la unidimensional

$$m\ddot{\theta} = \frac{mg}{l} \sin \theta + \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{ml^2 \sin^3 \theta},$$

que es la ecuación del movimiento rectilíneo de una partícula en el campo de energía potencial efectiva

$$U_{\text{ef}}(\theta) = \frac{mg}{l} \cos \theta + \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \sin^2 \theta}. \quad (5-66)$$

Esta función de energía potencial efectiva tiene un punto mínimo, por lo que el problema que estamos tratando tendrá un punto de equilibrio estable, o, más bien, un ángulo  $\theta = \theta_0$  que puede permanecer fijo. Para pequeños desplazamientos respecto a este punto de equilibrio para los que la partícula se mueve en una circunferencia, dicha partícula efectuará una oscilación armónica simple. La frecuencia de la oscilación alrededor de la órbita circular estable (problema 4-10a) está dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\frac{1 + 3 \cos^2 \theta_0}{|\cos \theta_0|}}. \quad (5-67)$$

Utilizando las ecuaciones (5-63) y (5-65), que expresan la conservación de la componente  $z$  de la cantidad de movimiento angular orbital y la energía total, y haciendo  $\dot{r} = 0$ , la magnitud  $R = \lambda$  de la reacción se obtendrá con la ecuación (5-60). Específicamente se halla

$$R = \frac{2E - 3mg \cos \theta}{l}. \quad \blacktriangleleft$$

Observaremos que, en este ejemplo, debido a la elección de coordenadas generalizadas, la fuerza de reacción aparece sólo en una de las ecuaciones

de movimiento. Tal será el caso siempre que la ecuación de restricción se pueda expresar en la forma

$$q_3 - \text{constante} = 0.$$

Es decir, una de las coordenadas generalizadas permanece fija. Aun cuando esto no fuera así, por una selección adecuada de los vectores base, con dos de ellos tangentes a la superficie de restricción, podríamos hallar dos ecuaciones de movimiento que no contuvieran la fuerza de reacción. Si estos dos vectores tangenciales se escogen apropiadamente, las dos ecuaciones de movimiento generalizadas resultantes, serán idénticas a las que se obtendrían si en la ecuación de restricción se despejara primero una de las coordenadas, digamos  $q_3$ , en función de las otras dos, y se eliminará totalmente del problema a  $q_3$ . El vector de posición sería, por lo tanto, función de las dos coordenadas restantes. Si se hace esto para la coordenada  $q_3$ , entonces

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[q_1, q_2, f(q_1, q_2)], \quad (5-68)$$

donde

$$q_3 - f(q_1, q_2) = 0 \quad (5-69)$$

se obtiene con la ecuación de restricción.

Partiendo de la ecuación (5-68) definiremos los dos nuevos vectores base

$$\bar{\mathbf{b}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial q_i} = \mathbf{b}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \mathbf{b}_3, \quad i = 1, 2. \quad (5-70)$$

Estos vectores son tangentes a la superficie definida por la ecuación (5-69), como podemos verificar tomando su producto escalar por una normal a la superficie. El gradiente de la función que define la superficie  $\phi = q_3 - f(q_1, q_2)$  es dicha normal. Puesto que

$$\nabla[q_3 - f(q_1, q_2)] = \nabla q_3 - \nabla f = \nabla q_3 - \frac{\partial f}{\partial q_1} \nabla q_1 - \frac{\partial f}{\partial q_2} \nabla q_2, \quad (5-71)$$

y recordando que  $\mathbf{b}_i = \nabla q_i$ , se halla que realmente tenemos

$$\bar{\mathbf{b}}_i \cdot \nabla (q_3 - f) = \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0. \quad (5-72)$$

Esto comprueba que los  $\bar{\mathbf{b}}_i$  son tangentes a la superficie de restricción. Multiplicando escalarmente las ecuaciones de Newton por  $\bar{\mathbf{b}}_i$ , obtendremos las ecuaciones generalizadas de movimiento (problema 5-16)

$$Q_i + Q_3 \frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \quad (5-73)$$

donde la energía cinética es, ahora, función de  $q_1, q_2, \dot{q}_1$  y  $\dot{q}_2$ . Esto es:

$$T = T[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, f(q_1, q_2), \dot{f}(q_1, q_2)],$$

donde  $f(q_1, q_2) = q_3$ , y

$$\dot{f}(q_1, q_2) = \dot{q}_3 = \frac{\partial f}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \dot{q}_2.$$

► Como ejemplo, volveremos a tratar el problema de una partícula de masa  $m$  sometida a la acción de la gravedad en un plano acelerante, inclinado y sin rozamiento (fig. 5-4). La ecuación de restricción

$$y - (x - V_0 t - \frac{1}{2} A t^2) \operatorname{tg} \theta = 0$$

tiene la misma forma que la (5-69). Eliminando la coordenada  $y$ , obtendremos el vector de posición en función de  $x$  y  $t$ ,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x\mathbf{i} + (x - V_0 t - \frac{1}{2} A t^2) \operatorname{tg} \theta \mathbf{j}.$$

De aquí se deduce el nuevo vector base

$$\bar{\mathbf{b}}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i} + \operatorname{tg} \theta \mathbf{j}.$$

Observemos que el vector  $\bar{\mathbf{b}}_1$  forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ . Por lo tanto, es paralelo a la superficie del plano inclinado. La energía cinética, en función de  $\dot{x}$  y  $t$ , está dada por

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x} - V_0 - A t)^2 \operatorname{tg}^2 \theta.$$

Con lo que habremos encontrado una ecuación de movimiento que no contiene la fuerza de reacción

$$(-mg\mathbf{j}) \cdot \bar{\mathbf{b}}_1 = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x},$$

o más explícitamente

$$\begin{aligned} -mg \operatorname{tg} \theta &= \frac{d}{dt} [m\dot{x} + m(\dot{x} - V_0 - A t) \operatorname{tg}^2 \theta] \\ &= m\ddot{x}(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) - mA \operatorname{tg}^2 \theta \end{aligned}$$

o sea,

$$-mg \operatorname{sen} \theta = \frac{m\ddot{x}}{\cos \theta} - mA \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos \theta}.$$

Esta ecuación es idéntica a la que obtendríamos si utilizáramos las ecuaciones (5-50), (5-51) y (5-52) para hallar una ecuación que sólo contuviese a  $x$ . ◀



► Como otra ilustración, consideremos el movimiento de una cuenta de collar de masa  $m$  obligada a moverse sin rozamiento sobre un alambre con forma de parábola (problema 3-12)

$$z = a\rho^2.$$

El alambre se encuentra en un plano vertical y está obligado a girar con la velocidad angular constante,  $\omega$ , alrededor del eje vertical de simetría de la parábola.

Como la cuenta está sujeta a moverse sobre una curva específica, sólo necesitaremos una coordenada para describir su movimiento. Esta será la coordenada  $\rho$ . Entonces, en función de  $\rho$ ,  $\dot{\rho}$  y  $\omega$ , hallamos que la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \omega^2\rho^2)$$

es expresada por

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + 4a^2\rho^2\dot{\rho}^2 + \omega^2\rho^2).$$

La fuerza de gravedad que actúa sobre la cuenta es

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}.$$

El vector base de la variable  $\rho$  es

$$\bar{\mathbf{b}}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \mathbf{e}_\rho + \frac{\partial z}{\partial \rho} \mathbf{k} = \mathbf{e}_\rho + 2a\rho\mathbf{k}.$$

Puesto que

$$\frac{\bar{b}_{1z}}{b_{1\rho}} = 2a\rho = \frac{dz}{d\rho},$$

se deduce que  $\bar{\mathbf{b}}_1$  es tangente a la parábola, lo que da la fuerza generalizada

$$\bar{Q}_1 = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{b}}_1 = -2a\rho mg$$

y la ecuación de movimiento generalizada

$$-2a\rho mg = \frac{d}{dt} [m\dot{\rho}(1 + 4a^2\rho^2)] - m\dot{\rho}^2(4a^2\rho) - m\rho\omega^2. \leftarrow$$

### Problemas

5-1. a) Demostrar que una fuerza que se puede expresar por el gradiente negativo de la función escalar  $U(x, y, z)$

$$\mathbf{F} = -\nabla U(x, y, z),$$

da fuerzas generalizadas expresadas por

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i},$$

y que las ecuaciones del movimiento generalizadas son, por tanto,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

b) Demostrar que para tales fuerzas

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} = -\Delta U,$$

y, en consecuencia,

$$dT = d[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)] = -dU,$$

o sea,  $T + U = \text{constante}$ .

5-2. Utilizar el resultado del problema 5-1 para hallar las ecuaciones de Lagrange de una partícula cuya energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}b\dot{q}_2^2,$$

y cuya energía potencial escalar es

$$U = \frac{1}{2}k_1(q_1 + q_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(q_1 - q_2)^2.$$

5-3. El punto de soporte de un péndulo simple de longitud  $l$  y masa  $m$  se mueve sobre una recta vertical de acuerdo con la ecuación

$$y = y(t)$$

El movimiento del péndulo es en un plano vertical.

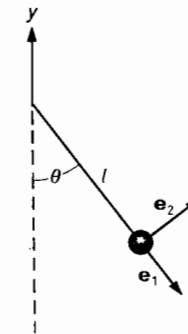


FIG. 5-7

a) Establecer las componentes de las ecuaciones de movimiento de Newton para la partícula en las direcciones  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$  mostradas en la figura 5-7. [Sugerencia: considérese el movimiento con respecto a un sistema de coordenadas cuya aceleración es  $\mathbf{A} = \ddot{y}\mathbf{i}$ .]

b) Demostrar que la energía cinética de la partícula está dada por

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{l}\theta)^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + ml\dot{\theta}\dot{y}\sin\theta.$$

c) Dado que la energía potencial escalar es

$$U = mgy - mgl \cos \theta,$$

demostrar que las ecuaciones de Lagrange deducidas de la energía cinética de la parte b) y esta función de la energía potencial para la variable  $\theta$  (ver problema 5-1) son equivalentes a la ecuación de Newton a lo largo de  $e_2$ .

d) Demostrar que si expresamos la energía cinética en la forma

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta)^2 + \frac{1}{2}m[\dot{r} \cos \theta + r\dot{\theta} \sin \theta + \dot{y}]^2,$$

y restringimos el movimiento por la ecuación

$$r - l = 0$$

entonces, las ecuaciones de Lagrange para las variables  $r$  y  $\theta$  concuerdan con las de Newton halladas en la parte a).

5-4. Consideremos el sistema representado en la figura 5-8. El resorte está obligado a moverse en una recta vertical.

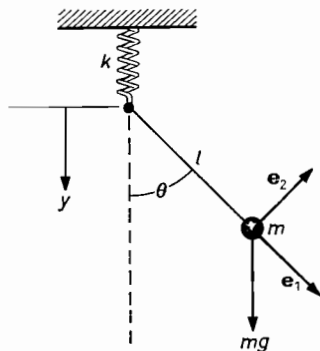


FIG. 5-8

a) Teniendo en cuenta que la fuerza sobre el resorte es igual a la componente vertical de la tensión, o tracción, en la cuerda, establecer las ecuaciones de movimiento de Newton, tomando componentes sobre las direcciones  $e_1$  y  $e_2$  indicadas.

b) Demostrar que las ecuaciones así obtenidas son equivalentes a las de Lagrange para las variables  $r$  y  $\theta$ , obtenidas a partir de la energía cinética de la partícula

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta)^2 + \frac{1}{2}m(-\dot{r} \cos \theta + r\dot{\theta} \sin \theta - \dot{y})^2$$

y su energía potencial

$$U = \frac{1}{2}ky^2 - mg(r \cos \theta + y)$$

(obsérvese que el sentido positivo de  $y$  es hacia abajo) sujeta a la ecuación de restricción

$$r - l = 0$$

c) Comprobar que la ecuación de Lagrange para la variable  $y$  es equivalente a la ecuación

$$R \cos \theta = ky.$$

5-5. El punto de soporte de un péndulo simple se mueve en una circunferencia vertical de radio  $R$  con una velocidad constante  $v$ , como se indica en la figura 5-9. Hallar la ecuación de movimiento de Lagrange para el péndulo si  $U = mgR \sin \phi - mgl \cos \theta$ .

5-6. a) Establecer las ecuaciones de movimiento de Newton para el péndulo simple cuyo punto de soporte está unido a un resorte con libertad de movimiento en la dirección horizontal (fig. 5-10).

b) Como la energía potencial para este problema es

$$U = \frac{1}{2}kx^2 - mgr \cos \theta, \quad \text{donde } r - l = 0,$$

establecer la expresión de la energía cinética de la partícula y hallar las ecuaciones de movimiento de Lagrange. Comparar las respuestas de las partes a) y b).

5-7. Una partícula de masa  $m$  se mueve bajo la acción de la gravedad sobre la superficie de un cilindro horizontal.

a) Obtener las ecuaciones de movimiento de Lagrange para la partícula.

b) Si la partícula se desliza en un plano vertical habiendo partido de la parte superior del cilindro con una velocidad muy pequeña, hállese la fuerza de reacción en función de la posición.

c) ¿En qué punto se separará la partícula del cilindro?

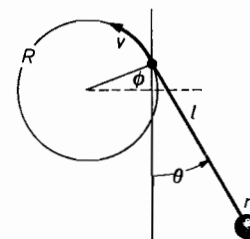


FIG. 5-9

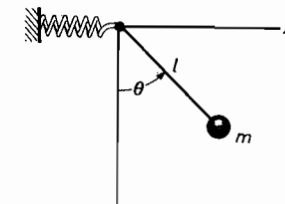


FIG. 5-10

5-8. Repetir el problema 5-7 con una partícula que se mueve sobre la superficie lisa del cilindro parabólico

$$y = -ax^2.$$

5-9. Una partícula de masa  $m$  se desliza, bajo la acción de la gravedad, en la superficie interior lisa del cono invertido de la figura 5-11 cuya ecuación es

$$\rho = z \operatorname{tg} \alpha.$$

a) Establecer las ecuaciones de movimiento de Lagrange para la partícula.

b) Demostrar que son posibles órbitas circulares, y hallar la velocidad de la partícula en una órbita de este tipo.

5-10. Considerando el sistema de partículas mostrado en la figura 5-12:

a) Escribir las ecuaciones de movimiento de Newton para cada una de las partículas, en función de las variables de desplazamiento, a partir del equilibrio,  $x_1$  y  $x_2$ .

b) Demostrar que para cualesquiera desplazamientos arbitrarios de las dos partículas, la energía potencial acumulada en los resortes está dada por

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3x_2^2.$$

c) Empleando la expresión

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2,$$

para la energía cinética, demostrar que las ecuaciones de Lagrange así obtenidas para las variables  $x_1$  y  $x_2$ , a partir de esta  $T$  y la  $U$  de la parte b), concuerdan con las ecuaciones de Newton halladas en la parte a). ¿Cuáles supone usted que son las ecuaciones de Lagrange para un sistema de partículas?

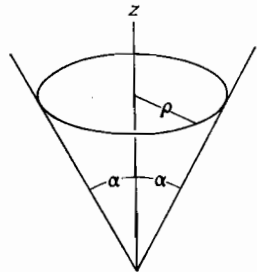


FIG. 5-11

5-11. a) Hállese la energía cinética total del péndulo doble representado en la figura 5-13.

b) Utilizando la energía cinética encontrada en la parte a) y la energía potencial

$$U = -m_1l_1g \cos \theta_1 - m_2g(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2),$$

demostrar que las ecuaciones de Lagrange así obtenidas para  $\theta_1$  y  $\theta_2$  concuerdan con las componentes de las ecuaciones de Newton sobre  $e_2$  y  $e_4$ . Tómense las componentes de las ecuaciones de Newton a lo largo de  $e_2$  para ambas partículas.

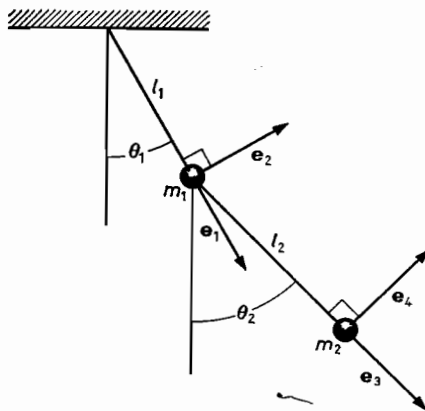


FIG. 5-13

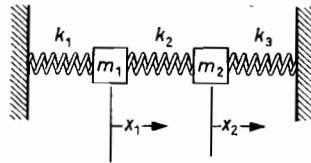


FIG. 5-12

5-12. Las coordenadas  $q_1$  y  $q_2$  están definidas en función de las coordenadas polares planas,  $r$  y  $\phi$ , por las ecuaciones

$$q_1 = \ln \left( \frac{r}{a} \right) - \phi \operatorname{ctg} \xi, \quad q_2 = \ln \left( \frac{r}{a} \right) + \phi \operatorname{tg} \xi,$$

donde  $a$  y  $\xi$  son constantes. Trazar las curvas de las constantes  $q_1$  y  $q_2$ . Hallar la energía cinética de una partícula de masa  $m$  en función de  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $\dot{q}_1$  y  $\dot{q}_2$ . Encontrar expresiones para  $Q_1$  y  $Q_2$  en función de las componentes polares,  $F_r$  y  $F_\phi$ , de la fuerza, donde  $F_r = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{F}$  y  $F_\phi = \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{F}$ . Hallar  $p_1$  y  $p_2$ . Determinar las fuerzas  $Q_1$  y  $Q_2$  necesarias para que la partícula se mueva con una velocidad constante,  $\dot{s}$ , sobre una espiral de  $q_1 = c$  constante.

5-13. Cuando las fuerzas actúan únicamente durante un corto intervalo de tiempo, como en un choque o colisión, reciben el nombre de fuerzas de impulso. El término impulso está dado por la cantidad

$$\mathbf{I} = \int_{\Delta t} \mathbf{F} dt,$$

donde la integración se hace sólo durante el tiempo infinitesimal,  $\Delta t$ , en el que actúan las fuerzas. Demostrar que, si hay fuerzas de impulso, las ecuaciones de Lagrange se pueden transformar en

$$\Delta \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \Delta \frac{\partial U}{\partial q_i} + I_i,$$

donde  $I_i$  es la fuerza de impulso generalizada correspondiente a  $q_i$ .

5-14. Una cuenta de masa  $m$  se desliza, bajo la acción de la gravedad por un alambre curvado en la forma de la parábola  $y = 1 + x^2$ . El coeficiente de rozamiento entre la cuenta y el alambre es  $\mu$ , por lo que la fuerza de rozamiento que actúa sobre la cuenta es  $\mu R$ , donde  $R$  es la fuerza de restricción normal a la curva. Dicha fuerza de rozamiento tiende a oponerse al movimiento. Al mismo tiempo, el plano del alambre gira alrededor de  $Oy$  con una velocidad angular constante,  $\omega$ . Hállese las ecuaciones de Lagrange para la cuenta.

5-15. a) Establecer la expresión de la energía cinética de una partícula de masa  $m$  en función de las coordenadas parabólicas planas,  $q_1$  y  $q_2$ , definidas por

$$x = \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2), \quad y = q_1q_2.$$

Hállese las cantidades de movimiento generalizadas,  $p_1$  y  $p_2$ .

b) Escribanse las ecuaciones de Lagrange en función de estas coordenadas para el caso en que sobre la partícula no actúe ninguna fuerza.

c) Encontrar las fuerzas generalizadas,  $Q_1$  y  $Q_2$ , necesarias para que la partícula se mueva sobre una parábola,  $q_1 = c = \text{constante}$ , con velocidad generalizada  $\dot{q}_2 = u_0$ , partiendo desde el punto  $q_1 = c$  y  $q_2 = 0$  en el  $t = 0$ .

d) Hallar las fuerzas correspondientes,  $F_x$  y  $F_y$ , relativas a un sistema de coordenadas cartesianas.

5-16. Demostrar que las  $\bar{\mathbf{b}}_i$  definidas por la ecuación (5-70), nos dan las ecuaciones de movimiento generalizadas definidas por la ecuación (5-73). Considerar también el caso en que la transformación de coordenadas sea dependiente del tiempo.

## Movimiento conservativo

### 6-1 Fuerzas conservativas

No siempre tenemos la fortuna suficiente para poder elegir coordenadas generalizadas en función de las cuales podamos hallar tres ecuaciones unidimensionales de movimiento. En general, las tres ecuaciones de movimiento obtenidas empleando la ecuación (5-21) forman un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas cuya solución puede ser difícil de hallar. En problemas en que intervienen fuerzas que sólo son funciones de la posición, podemos acercarnos un paso más a la solución si el trabajo que dichas fuerzas realizan sobre la partícula, a medida que ésta se mueve de un punto a otro, no depende de la trayectoria real seguida por dicha partícula.

El trabajo efectuado por la fuerza  $\mathbf{F}$  a lo largo de una trayectoria que une los puntos  $P_1$  y  $P_2$  se definió en la sección 4-13 por la ecuación

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (6-1)$$

En general, el trabajo realizado por una fuerza depende de la trayectoria a lo largo de la cual se evalúa. Por ejemplo, consideremos la fuerza

$$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} - (2x^2 - y^2)\mathbf{k}. \quad (6-2)$$

El trabajo que esta fuerza realiza a lo largo de dos trayectorias diferentes que unen los puntos  $(0, 0, 0)$  y  $(1, 1, 1)$  depende de la trayectoria.

El trabajo a lo largo de la recta

$$x = y = z \quad (6-3)$$

que une dichos dos puntos se halla que es

$$W = \int xy dx + \int 2z dy - \int (2x^2 - y^2) dz$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 2y dy - \int_0^1 x^2 dx \\ &= 1 \text{ unidad de trabajo.} \end{aligned}$$

En cambio, el trabajo en la trayectoria

$$x = y^2 = z. \quad (6-4)$$

se halla que es

$$\begin{aligned} W &= \int xy dx + \int 2z dy - \int (2x^2 - y^2) dz \\ &= \int_0^1 2y^4 dy + \int_0^1 2y^2 dy - \int (2y^4 - y^2) 2y dy \\ &= \frac{9}{10} \text{ de unidad de trabajo.} \end{aligned}$$

Luego el trabajo desarrollado a lo largo de estas dos trayectorias no es el mismo o, en otras palabras, el trabajo realizado por la fuerza de la ecuación (6-2) depende de la trayectoria a lo largo de la cual lo realiza.

El principio del trabajo y la energía, de que el trabajo realizado por una fuerza sobre una partícula es igual al cambio de energía cinética de la misma, es, por supuesto, generalmente aplicable a cualquier función de fuerza; lo que se ve fácilmente al deducir el principio

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int m\ddot{\mathbf{s}} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} dt = \int d(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{s}}^2).$$

Sin embargo, cuando se trata de una fuerza cuyo trabajo depende de la trayectoria, dicho principio no nos sirve realmente, a menos que conozcamos la trayectoria seguida por la partícula; pero esto reducirá el problema a uno unidimensional del movimiento de una partícula a lo largo de una curva determinada, el cual vimos en la sección 4-13. Este no es el problema que pretendemos estudiar ahora, que es el movimiento sin restricciones de una partícula sometida a fuerzas determinadas, siendo la trayectoria de la partícula uno de los detalles de información que se busca. Decir que conocemos la trayectoria, implicaría haber hallado la solución, en cuyo caso ya no necesitaríamos aplicar el principio del trabajo y la energía.

Las fuerzas para las que es útil el principio del trabajo y la energía, aunque no conozcamos la trayectoria real seguida por la partícula, son aquellas en que el trabajo que realizan sobre dicha partícula es independiente de la trayectoria. En el mencionado ejemplo, podemos determinar el trabajo tomando cualquier trayectoria que una los puntos  $P_1$  y  $P_2$  por los que pasa la partícula, y utilizar el principio del trabajo y la energía

$$W_{12} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2), \quad (6-5)$$

como una ecuación auxiliar de las ecuaciones de movimiento. El empleo de este principio, generalmente, simplifica el problema de hallar la solución de las ecuaciones de movimiento. Las fuerzas cuyo trabajo es independiente de la trayectoria, se llaman *fuerzas conservativas*, y el movimiento que éstas originan, *movimiento conservativo*. En la sección 6-3 se exponen las condiciones necesarias y suficientes para considerar como conservativa a una fuerza.

### 6-2 Energía potencial: conservación de la energía

En la sección 4-13 vimos que el trabajo realizado por una curva determinada a lo largo de una fuerza que es función de la posición, se puede expresar en relación con la función de energía potencial  $U(s)$ . Esto es

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 F_s ds = U(s_1) - U(s_2),$$

donde

$$F_s(s) = -\frac{dU(s)}{ds},$$

y  $s$  representa la distancia medida a lo largo de la citada curva desde un punto dado de la misma.

Como el trabajo realizado por una fuerza conservativa es independiente de la trayectoria, se deduce que una vez que asignemos un valor a la energía potencial en un punto del espacio, la energía potencial en cualquier otro punto estará determinada, independientemente de la trayectoria elegida, y tendrá por valor

$$U(P_2) = U(P_1) - W_{12}. \quad (6-6)$$

Luego, se podrá asignar un valor concreto a la energía potencial de cada punto del espacio. Este valor dependerá del que hayamos escogido para el primer punto o punto de referencia. Siendo arbitrario este último valor, se desprende que la misma arbitrariedad subsistirá para el de todos los demás puntos del espacio. Esto significa que no influirá sobre el problema el que, en un momento dado, decidamos cambiar el valor asignado a la energía potencial de todos los puntos del espacio en la misma cantidad.

La energía potencial, que tiene un valor determinado en todos los puntos del espacio, se dice que es una función de posición, univalente, y se expresará, en consecuencia, por

$$U = U(x, y, z).$$

En relación con la función de energía potencial, el trabajo producido por un desplazamiento infinitesimal

$$d\mathbf{s} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}$$

está dado por

$$\begin{aligned} \Delta W &= \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} = -\Delta U \\ &= -\frac{\partial U}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y - \frac{\partial U}{\partial z} \Delta z \\ &= -\Delta \mathbf{s} \cdot (\nabla U), \end{aligned} \quad (6-7)$$

donde

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}.$$

la ecuación (6-7) nos dice que

$$(\mathbf{F} + \nabla U) \cdot \Delta \mathbf{s} = 0,$$

o, como  $\Delta \mathbf{s}$  es arbitrario, que

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (6-8)$$

Como sucede con el gradiente de una función de posición (sección 2-6), la fuerza en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  está dirigida en una dirección normal a la superficie de la energía potencial constante

$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0),$$

que pasa por dicho punto. Vemos entonces, que se puede obtener fácilmente una fuerza conservadora si conocemos su función de energía potencial e, inversamente siempre que una fuerza sea conservadora, se halla fácilmente su energía potencial con la ecuación (6-6).

Para hallar la energía potencial de una fuerza conservadora escogemos para evaluar el trabajo que realiza desde el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  hasta el punto  $(x, y, z)$ , la trayectoria de la línea quebrada indicada en la figura 6-1.

El trabajo para pasar en línea recta de  $(x_0, y_0, z_0)$  a  $(x, y_0, z_0)$  es

$$W_a = \int_{x_0}^x F_x(x, y_0, z_0) dx.$$

Lo mismo, al seguir la recta de  $(x, y_0, z_0)$  a  $(x, y, z_0)$  el trabajo será

$$W_b = \int_{y_0}^y F_y(x, y, z_0) dy, \quad x \text{ constante,}$$

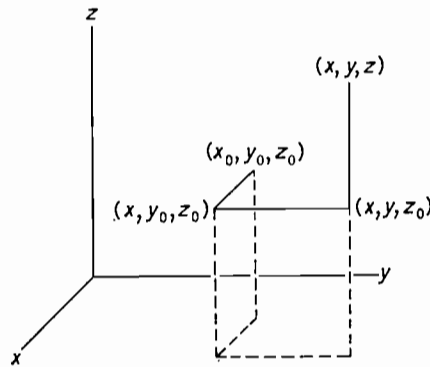


FIG. 6-1. Trayectoria de integración.

y, finalmente, el trabajo a lo largo de la última parte de la trayectoria quebrada es

$$W_c = \int_{z_0}^z F_z(x, y, z) dz, \quad x \text{ y } y \text{ constantes.}$$

El trabajo total es la suma de los trabajos realizados en cada segmento,

$$W = W_a + W_b + W_c = U(x_0, y_0, z_0) - U(x, y, z).$$

► Como ejemplo, consideremos la fuerza conservadora

$$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + \frac{1}{2}(x^2 + z^2)\mathbf{j} + yz\mathbf{k},$$

para la que obtenemos:

$$W_a = \int_{x_0}^x xy_0 dx = \frac{1}{2}y_0(x^2 - x_0^2),$$

$$W_b = \int_{y_0}^y \frac{1}{2}(x^2 + z_0^2) dy = \frac{1}{2}(y - y_0)(x^2 + z_0^2),$$

$$W_c = \int_{z_0}^z yz dz = \frac{1}{2}y(z^2 - z_0^2).$$

Entonces, el trabajo total es

$$W = W_a + W_b + W_c = \frac{1}{2}(x^2 + z^2)y - \frac{1}{2}(x_0^2 + z_0^2)y_0,$$

de donde hallamos que la función de energía potencial es

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{2}(x^2 + z^2)y. \blacktriangleleft$$

Las fuerzas conservadoras son de gran importancia en física, porque muchas fuerzas fundamentales, como las eléctricas, gravitacionales y nucleares, son

de este tipo. Para estas fuerzas, el principio de trabajo y energía nos conduce al importante de la conservación de la energía total, que es

$$E = T + U = \text{constante.} \quad (6-9)$$

### 6-3 Condiciones necesarias y suficientes para que una fuerza sea conservadora

La condición necesaria para que una fuerza, función de la posición, sea conservadora, se desprende fácilmente de la ecuación (6-8) y del hecho de que no importa en qué orden se tomen las derivadas parciales de una derivada de enésimo orden de una función continua de diversas variables. En particular, para las derivadas parciales de segundo orden tenemos

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}, \quad (6-10)$$

y habrá relaciones similares para las demás derivadas parciales de segundo orden. Para una fuerza conservadora que se pueda expresar como el gradiente negativo de una función de energía potencial, tendremos necesariamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{\partial F_z}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6-11)$$

Estas ecuaciones expresan las condiciones necesarias para que una fuerza sea conservadora. También puede demostrarse que son las condiciones suficientes.

Podemos expresar estas condiciones necesarias y suficientes más concisamente por la notación del rotacional de un vector, definido por la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (6-12)$$

La ecuación (6-11) expresa que el rotacional de una fuerza conservadora se anula

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0. \quad (6-13)$$

La prueba de que la anulaci3n del rotacional de  $\mathbf{F}$  es condici3n suficiente, requiere la utilizaci3n del teorema de Stokes.\* Este teorema relaciona la integral de superficie de la componente del rotacional de una funci3n vectorial, normal a la superficie de integraci3n, a la integral de l3nea de la componente tangencial de la funci3n vectorial a lo largo de toda

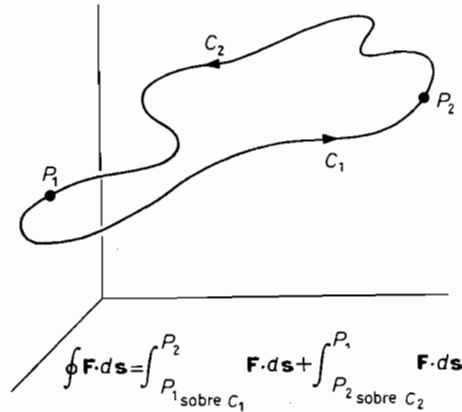


Fig. 6-2. Dos trayectorias que unen los puntos  $P_1$  y  $P_2$  formando una curva cerrada. la trayectoria cerrada que limita la superficie de integraci3n. Se expresa por

$$\int (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (6-14)$$

Se deduce de la anulaci3n del rotacional de  $\mathbf{F}$  que

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (6-15)$$

lo que es suficiente para asegurar la independencia de la trayectoria del trabajo realizado por  $\mathbf{F}$ .

Dos trayectorias cualesquiera,  $C_1$  y  $C_2$ , que unan los puntos  $P_1$  y  $P_2$  formar3n una curva cerrada (fig. 6-2), por lo cual su ecuaci3n (6-15) se expresar3 por

$$\int_{P_1 \text{ sobre } C_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{P_2 \text{ sobre } C_2}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Pero, a lo largo de una u otra trayectoria

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

\* H. B. Phillips, *An3lisis Vectorial*. M3xico. UTEHA, 1946.

por lo que encontramos que en cualquier regi3n dada en la que se anule el rotacional de  $\mathbf{F}$ ,

$$\int_{P_1 \text{ sobre } C_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{P_1 \text{ sobre } C_2}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

sean cuales fueren las dos curvas de dicha regi3n que unan los puntos  $P_1$  y  $P_2$ .

Entonces, queda demostrado que la condici3n (6-13) es necesaria y suficiente para que el trabajo realizado por una fuerza sea independiente de la trayectoria.

### 6-4 Ecuaciones de Lagrange para fuerzas conservadoras: El lagrangiano

La fuerza generalizada definida en la secci3n 5-1 toma una forma muy simple cuando se trata de una fuerza conservadora que se puede obtener a partir de una funci3n de energ3a potencial. Espec3ficamente, tenemos

$$Q_i = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) = - \frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (6-16)$$

Las ecuaciones de Lagrange para el movimiento de una part3cula sometida a una fuerza conservadora, pueden, por tanto, expresarse en la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (6-17)$$

Para las funciones de energ3a potencial definidas antes, que s3lo dependen de la posici3n,

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

Por lo que podemos expresar la ecuaci3n (6-17) en una forma m3s sim3trica por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_i} = 0,$$

o por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (6-18)$$

donde hemos puesto

$$L = T - U. \quad (6-19)$$

La funci3n  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  se llama *funci3n lagrangiana* o simplemente *lagrangiano*.

Además de las fuerzas conservadoras que actúan sobre una partícula, puede haber también otras no conservadoras. Las fuerzas generalizadas de estas últimas, por supuesto, no están incluidas en la ecuación (6-18). En tales casos, las ecuaciones de movimiento generalizadas se expresarán por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^n, \quad (6-20)$$

donde las  $Q_i^n$  son las fuerzas generalizadas no conservativas que actúan sobre la partícula. Las fuerzas conservativas generalizadas son tomadas en cuenta por la función de energía potencial de lagrangiano.

### 6-5 Ejemplos de fuerzas conservativas: fuerzas centrales, eléctricas y magnéticas\*

Como ejemplo del movimiento de una partícula en campos de fuerzas conservativas, consideraremos en este capítulo cierto número de problemas interesantes y de suma importancia referentes al movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos y magnéticos independientes del tiempo. En el próximo capítulo nos concentraremos en el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas centrales, poniendo especial atención en el movimiento de la misma en un campo de fuerzas centrales que varían según la inversa del cuadrado de la distancia.

Cuando una partícula cargada se encuentra en la proximidad de otras partículas cargadas, habrá dos tipos de fuerzas actuando sobre la partícula cuyo movimiento se estudia, que dependerán del movimiento desarrollado por las otras partículas.

Si están en reposo todas las partículas cargadas que actúan sobre la que estamos analizando, la fuerza que ejercen sobre ésta será

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}(x, y, z), \quad (6-21)$$

donde  $e$  es la carga de la partícula analizada y  $\mathbf{E}(x, y, z)$  es una función vectorial de posición (denominada intensidad del campo eléctrico o simplemente campo eléctrico) producida por las otras cargas en el punto  $(x, y, z)$ .

La fuerza ejercida por una carga puntual,  $e'$ , sobre otra también puntual,  $e$ , está dada por la ley de Coulomb

$$\mathbf{E}^{e'} = \frac{ee'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (6-22)$$

\* Incluimos las fuerzas magnéticas en esta sección, porque, como veremos, no realizan trabajo. Sin embargo, su presencia nos permite todavía determinar el trabajo hecho sobre la partícula sin conocer la trayectoria que ésta sigue.

donde  $r$  es la distancia entre las cargas,  $(\mathbf{r}/r)$  el vector unidad dirigido de la carga  $e'$  a la  $e$ , y  $1/4\pi\epsilon_0$  una constante dimensional. La fuerza eléctrica entre dos partículas cargadas es un ejemplo de una fuerza central cuya forma es

$$\mathbf{F} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (6-23)$$

Tal tipo de fuerza central se puede expresar por el gradiente negativo de una función de energía potencial  $U(r)$ , que sólo es función de  $r$ :

$$\mathbf{F} = -\nabla U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r, \quad (6-24)$$

donde  $f(r) = -\partial U/\partial r$  (sección 2-6).

Una fuerza central de la forma (6-23) es, evidentemente, conservadora, puesto que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla U = 0. \quad (6-25)$$

De paso, tendremos el agrado de mencionar que, además del principio de conservación de la energía total, se halla que para una fuerza central cuyo momento sea nulo,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0,$$

existirá una segunda integral del movimiento que expresará el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular orbital (ecuaciones 5-29 y 5-30). En el próximo capítulo se mostrará cómo, partiendo de estos dos principios de conservación se puede llegar a la solución de las ecuaciones de movimiento de una partícula que se mueve en el campo de una fuerza central.

Si sobre la carga  $e$ , actúa más de una partícula cargada, entonces la fuerza total sobre dicha carga será también una fuerza conservativa, ya que, por el principio de superposición, será igual a la suma vectorial de las fuerzas eléctricas ejercidas por cada una de las cargas sobre la  $e$ . Por consiguiente, cualquier fuerza eléctrica se puede expresar por el gradiente negativo de una función de energía potencial cuya expresión, si se trata de partículas cargadas que se mueven en campos eléctricos, es

$$U(x, y, z) = e\Phi(x, y, z), \quad (6-26)$$

donde  $\Phi(x, y, z)$  recibe el nombre de *potencial eléctrico escalar* en el punto  $(x, y, z)$ . El campo eléctrico, expresado en función del potencial eléctrico escalar, es

$$\mathbf{E}(x, y, z) = -\nabla\Phi(x, y, z). \quad (6-27)$$

Si las cargas que ejercen fuerzas sobre la partícula estudiada están también en movimiento, entonces, además de la fuerza eléctrica pueden también



ejercer sobre dicha partícula una fuerza magnética. Entre otras características, esta fuerza magnética depende de la carga  $e$  y de la velocidad  $\mathbf{v}$  de la partícula. Esta dependencia se expresa por la ecuación

$$\mathbf{F}^m = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (6-28)$$

donde  $\mathbf{B}$  es el vector de inducción magnética producido en el punto  $(x, y, z)$ , por todas las demás cargas.

Nos limitaremos, esencialmente, al estudio del movimiento de partículas cargadas en regiones finitas del espacio, donde el vector de inducción magnética,  $\mathbf{B}$ , tiene, para todos los fines prácticos, la misma magnitud, dirección y sentido en todos los puntos de la región. En estas pequeñas regiones del espacio se puede deducir el vector de inducción magnética a partir del *potencial vectorial magnético* definido por

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B}. \quad (6-29)$$

El lector no tendrá dificultad en verificar que el vector de inducción es igual al rotacional de  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (6-30)$$

Hemos introducido este potencial vectorial, porque necesitaremos utilizarlo en la generalización de las ecuaciones de movimiento de Lagrange para incluir en ellas las fuerzas magnéticas dependientes de la velocidad.

Observemos que la ecuación (6-30) también es correcta para campos magnéticos no uniformes dependientes del tiempo. Es decir, que cualquier vector de inducción magnética,  $\mathbf{B}$ , se podrá expresar siempre, por el rotacional de un potencial vectorial magnético,  $\mathbf{A}$ . Sin embargo, este potencial sólo tomará la forma sencilla dada en la ecuación (6-29) cuando los campos magnéticos sean uniformes.

Por una ampliación de la definición de las fuerzas conservativas, podremos considerar también de este tipo, las fuerzas magnéticas independientes del tiempo, pero no en el mismo sentido que las fuerzas eléctricas, pues la fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada no realiza trabajo sobre ésta a lo largo de su trayectoria. Esto se ve claramente teniendo en cuenta que la fuerza magnética es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula y, por lo tanto, siempre será normal a su trayectoria. Por consiguiente, siempre encontraremos que el trabajo realizado por la fuerza magnética se anula:

$$dW^m = \mathbf{F}^m \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Por tanto, el movimiento de una partícula en campos magnéticos y eléctricos independientes del tiempo, satisface siempre el principio de conservación de la energía total,

$$T + U = \text{constante},$$

por cuya razón agrupamos las fuerzas magnéticas entre las conservativas. En la sección 6-13 veremos que la fuerza magnética se puede obtener a partir de una función de energía potencial dependiente de la velocidad.

### 6-6 Movimiento en un campo eléctrico uniforme

Las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme son idénticas a las de una partícula en un campo gravitacional uniforme. Escogiendo el eje  $z$  como eje a lo largo del cual está dirigido el campo eléctrico, estas ecuaciones de movimiento son

$$m\ddot{x} = m\ddot{y} = 0 \quad \text{y} \quad m\ddot{z} = eE.$$

Las soluciones de estas ecuaciones se expusieron en el Capítulo 4 y también deben haber sido halladas por el lector que haya llevado un curso introductorio de mecánica.

La energía potencial está dada en este caso por

$$U = -eEz,$$

y se encuentra que la trayectoria es una parábola, a menos que el movimiento sea a lo largo del eje  $z$ .

### 6-7 Movimiento en un campo magnético uniforme

Las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme,  $\mathbf{B}$ , dirigido a lo largo del eje  $z$ ,

$$\mathbf{B} = B\mathbf{k}, \quad (6-31)$$

son:

$$m\ddot{x} = eB\dot{y}, \quad (6-32)$$

$$m\ddot{y} = -eB\dot{x}, \quad (6-33)$$

$$m\ddot{z} = 0. \quad (6-34)$$

Hemos visto que este campo no realiza trabajo sobre la partícula, por lo que la velocidad de ésta permanecerá constante. Como por la ecuación (6-34), la componente de la velocidad a lo largo del eje  $z$  es también constante, la componente de la velocidad  $v_{\perp}$  perpendicular al campo magnético, también lo será.

Considerando el movimiento de la partícula con respecto a un sistema inercial, en que no haya componente de la velocidad en la dirección del eje  $z$ , la fuerza magnética sobre la partícula será, en todo momento, perpendicular a su trayectoria y tendrá la magnitud constante

$$F^m = ev_{\perp}B. \quad (6-35)$$

De nuestro análisis del movimiento de una partícula a lo largo de una curva (sección 2-7), podemos establecer que, en cualquier punto de la trayectoria

$$ev_{\perp}B = \frac{mv_{\perp}^2}{\rho}, \quad (6-36)$$

donde  $\rho$  es el radio de curvatura de la trayectoria en ese punto. De aquí se sigue que el radio de curvatura tiene el mismo valor en todos los puntos, lo que implica que la partícula se mueve en una circunferencia de radio

$$\rho = \frac{mv_{\perp}}{eB}. \quad (6-37)$$

Con respecto a cualquier otro sistema inercial que se mueva a lo largo del eje  $z$ , la partícula tendrá una componente adicional de la velocidad en la dirección del eje  $z$ , y la trayectoria seguida en este caso será una hélice circular.

Es claro que podemos llegar a los mismos resultados resolviendo directamente las ecuaciones de movimiento.

Las dos primeras ecuaciones simultáneas de movimiento de este problema, las (6-32) y (6-33), se pueden combinar en una sola ecuación. Si multiplicamos la segunda por la unidad imaginaria,  $i$ , y sumamos la ecuación resultante a la primera, tendremos

$$\frac{d^2}{dt^2}(x + iy) = -\frac{ieB}{m} \frac{d}{dt}(x + iy), \quad (6-38)$$

cuya solución es

$$x + iy = C_1 e^{-i(eB/m)t} + C_2. \quad (6-39)$$

Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  son, generalmente, números complejos, que elegimos que se expresen en la forma

$$C_1 = A e^{-i\phi} \quad \text{y} \quad C_2 = a + ib.$$

Como  $x$  y  $y$  son cantidades reales, obtenemos

$$x = \text{Re}\{A e^{-i[(eB/m)t + \phi]} + a + ib\}$$

y

$$y = \text{Im}\{A e^{-i[(eB/m)t + \phi]} + a + ib\},$$

o

$$x - a = A \cos(\omega t + \phi) \quad (6-40)$$

y

$$y - b = -A \sin(\omega t + \phi), \quad (6-41)$$

donde

$$\omega = eB/m. \quad (6-42)$$

Las ecuaciones (6-40) y (6-41) nos dan

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = A^2, \quad (6-43)$$

que es la ecuación de una circunferencia de radio  $A$  y centro en el punto  $(a, b)$ . La rotación del radio vector de magnitud constante, está dada por el vector de velocidad angular (fig. 6-3):

$$\omega = -\frac{eB}{m} \mathbf{k} = -\omega \mathbf{k}. \quad (6-44)$$

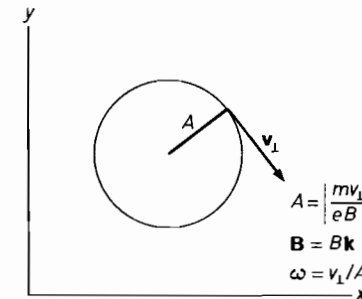


FIG. 6-3. Movimiento de una partícula cargada o electrizada en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme.

La magnitud del radio de la órbita circular se puede obtener a partir de la magnitud del vector velocidad

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_{\perp}^2 = A^2 \omega^2$$

o

$$A = \left| \frac{v_{\perp}}{\omega} \right| = \left| \frac{v_{\perp} m}{eB} \right|, \quad (6-45)$$

que concuerda con el resultado a que se llegó antes.

► Hay un gran número de aplicaciones importantes que se basan en los resultados de esta sección. El hecho de que la velocidad angular [ecuación (6-44)] con que una partícula cargada se mueve en su órbita circular en un campo magnético, es independiente de su energía, fue el principio básico del que partieron los doctores Ernest O. Lawrence y M. Stanley Livingston para desarrollar el ciclotrón, una importante herramienta para producir rayos de partículas cargadas de alta energía.

Los campos magnéticos se usan, también, extensamente para medir la cantidad de movimiento lineal de una partícula cargada. La medida del radio de curvatura  $\rho$ , del trazo dejado por una partícula cargada en una cámara de niebla sumergida en un campo magnético determina dicha cantidad de movimiento, ya que

$$mv = e\rho B.$$

La carga de las partículas elementales es de igual magnitud que la del electrón. Su signo se puede determinar por el sentido en que se desvía la partícula. El movimiento a través de un campo magnético uniforme de una partícula cargada, combinado con su paso a través de un campo eléctrico, que nos da una medida de su energía, nos permite determinar la masa de dicha partícula. Este es el principio del espectrómetro de masa. ◀

### 6-8 Movimiento en un campo eléctrico uniforme y magnético uniforme

Si escogemos el plano  $xz$  como plano de los campos eléctrico y magnético y el eje  $z$  paralelo al vector de inducción magnética, las ecuaciones componentes del movimiento serán

$$m\ddot{x} = e\dot{y}B + eE_x, \tag{6-46}$$

$$m\ddot{y} = -e\dot{x}B, \tag{6-47}$$

$$m\ddot{z} = eE_z. \tag{6-48}$$

Esta última ecuación de la coordenada  $z$  es la misma que la unidimensional del movimiento de una partícula que se mueve con la aceleración constante

$$a_z = \frac{eE_z}{m}.$$

Su solución, para la velocidad y el desplazamiento en la dirección de  $z$ , es

$$\dot{z} = \dot{z}_0 + \frac{eE_z}{2m} t \tag{6-49}$$

y

$$z = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{eE_z}{2m} t^2. \tag{6-50}$$

Por otra parte, las dos primeras ecuaciones de movimiento se deben tratar juntas. Pero, como en la sección anterior, se pueden combinar en una sola ecuación diferencial unidimensional

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + iy) = -ieB \frac{d}{dt} (x + iy) + eE_x. \tag{6-51}$$

La ecuación (6-51) es una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes, cuya solución es

$$x + iy = C_1 e^{-i(eB/m)t} + C_2 - \frac{iE_x}{B} t, \tag{6-52}$$

donde las constantes  $C_1$  y  $C_2$  son, en general, complejas. Expresando las constantes en la forma

$$C_1 = A e^{-i\phi} \quad \text{y} \quad C_2 = a + ib,$$

hallamos

$$x = \text{Re}(x + iy) = A \cos(\omega t + \phi) + a \tag{6-53}$$

y

$$y = \text{Im}(x + iy) = -A \sin(\omega t + \phi) + b - \frac{E_x}{B} t, \tag{6-54}$$

donde, como antes,  $\omega = eB/m$ . Los valores de las constantes  $A$ ,  $\phi$ ,  $a$  y  $b$ , dependen, por supuesto, de los iniciales de  $x$ ,  $y$ ,  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$ .

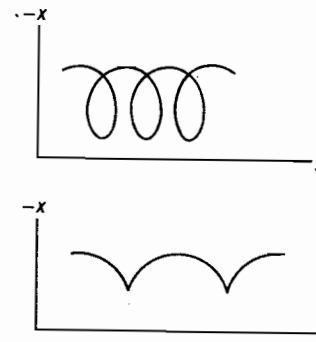


FIG. 6-4. Posibles órbitas de una partícula cargada en campos eléctrico y magnético cruzados.

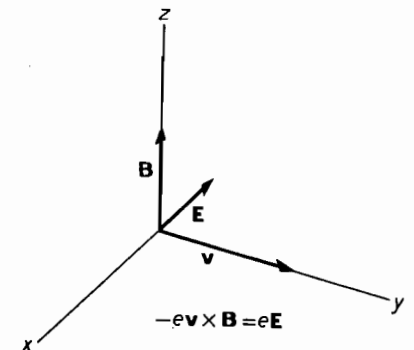


FIG. 6-5. Movimiento sin desviación de una partícula cargada sometida a campos eléctrico y magnético cruzados.

En la figura 6-4 se representan varias trayectorias que podría seguir la partícula en el plano  $xy$ .

La combinación de un campo eléctrico uniforme con otro magnético uniforme que formen ángulo recto se emplea como filtro de velocidad. Las partículas cargadas que se mueven perpendicularmente a los dos campos se desviarán, en general, como lo indica la ecuación (6-52), aparte de aquellas partículas que posean una velocidad en la que las fuerzas eléctricas y magnéticas sobre ellas se equilibran (fig. 6-5 y problema 6-6), lo que conduce a la ecuación

$$eE = evB \quad \text{o} \quad v = E/B.$$

El caso de la figura 6-6 que muestra el movimiento de los portadores de carga o electrizados en un conductor que está dentro de un campo magnético uniforme, es otro ejemplo interesante de partículas cargadas que se mueven bajo la acción de un campo eléctrico uniforme y otro magnético uniforme.

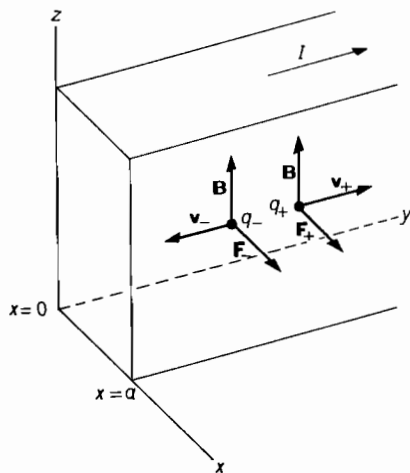


Fig. 6-6. Fuerza magnética en los portadores cargados de un conductor que está dentro de un campo magnético uniforme.

Por ejemplo, las cargas positivas que se mueven en el sentido en que las  $y$  crecen con la velocidad de penetración,  $v_x$ , por la acción del voltaje externo aplicado, serán desviadas en el sentido positivo de las  $x$  por la fuerza magnética debida al campo magnético que actúa a lo largo y en el sentido positivo del eje  $z$ . Entonces, los portadores de carga, que están limitados o confinados por el plano  $x = a$ , se acumularán sobre esta frontera plana del conductor. Al hacerlo así, crearán, a su vez, un campo eléctrico normal a la superficie de conductor que actuará sobre los otros portadores que están dentro del mismo. Este proceso continúa hasta que la fuerza eléctrica adicional resultante sobre los portadores sea igual y opuesta a la fuerza magnética sobre ellos.

La situación que se alcanza al final es el filtro de velocidad mencionado, en el cual

$$v = E_H/B,$$

donde  $E_H$  es el *campo eléctrico de Hall* producido por los portadores de carga en el plano  $x = a$ . El potencial eléctrico de Hall resultante entre los planos del conductor está dado por

$$\phi_H = aE_H.$$

Su sentido nos indica la naturaleza de la carga de los portadores y, además, nos permite obtener una estimación de la densidad,  $N$ , de los portadores electrizados. De

$$v = \frac{I/A}{eN},$$

donde  $A$  es el área de la sección transversal del conductor e  $I$  la intensidad de la corriente en el conductor, podemos obtener

$$N = \frac{I/A}{ev} = \frac{IB}{AeE_H} = \frac{IBa}{Ae\phi_H}.$$

La aparición de una diferencia de potencial entre las fronteras o límites de un conductor portador de corriente, colocado en un campo magnético uniforme, se conoce como *efecto Hall*.

## 6-9 El oscilador isotrópico en un campo magnético

La energía potencial de un oscilador isotrópico es

$$U = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2. \quad (6-55)$$

Trataremos ahora un problema muy importante que es el efecto de un campo magnético sobre el movimiento de un oscilador de este tipo o, más generalmente, sobre el movimiento de una partícula cargada bajo la acción de un campo de fuerza central. El estudio de las respuestas o reacciones de los electrones de los átomos y de los sólidos a la aplicación de campos magnéticos, es un método muy fructífero para obtener información sobre las propiedades de su movimiento en un medio de este tipo. Aunque la física clásica no es generalmente aplicable a los problemas atómicos, se ve que en el caso del oscilador isotrópico proporciona una descripción cualitativa exacta del efecto del campo magnético sobre el movimiento en cuestión.

Si consideramos que el campo magnético que actúa sobre el oscilador isotrópico está dirigido a lo largo del eje  $z$ , las ecuaciones componentes del movimiento, en coordenadas cartesianas, son

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + eB\dot{y}, \quad (6-56)$$

$$m\ddot{y} = -m\omega_0^2 y - eB\dot{x}, \quad (6-57)$$

$$m\ddot{z} = -m\omega_0^2 z. \quad (6-58)$$

Una vez más, la solución de estas tres ecuaciones se encuentra fácilmente. La última es la ecuación unidimensional de movimiento de un

oscilador armónico simple; luego, sobre esta ecuación componente no influye el campo magnético. Las otras dos ecuaciones se combinan en una sola, unidimensional, de la variable  $x_+ = x + iy$ ,

$$m\ddot{x}_+ = -m\omega_0^2 x_+ - ieB\dot{x}_+. \quad (6-59)$$

Las dos soluciones linealmente independientes de esta ecuación diferencial lineal homogénea, se pueden expresar en la forma

$$x_+ = Ce^{i(\alpha t + \phi)}, \quad (6-60)$$

donde  $\alpha$  es una raíz de la ecuación característica

$$-m\alpha^2 - eB\alpha + m\omega_0^2 = 0. \quad (6-61)$$

Las dos raíces de esta ecuación son

$$\alpha = -\frac{eB}{2m} \pm \sqrt{\frac{e^2 B^2}{4m^2} + \alpha_0^2}, \quad (6-62)$$

que para campos magnéticos pequeños que satisfagan la condición

$$\left| \frac{eB}{2m} \right| \ll \omega_0 \quad (6-63)$$

se pueden dar aproximadamente por

$$\alpha = \pm\omega_0 - \omega_L, \quad (6-64)$$

donde

$$\omega_L = \frac{eB}{2m}. \quad (6-65)$$

Más adelante demostraremos que la condición (6-63) es satisfecha en los problemas atómicos para todos los campos magnéticos que se pueda crear con la técnica actual, lo que equivale a decir que  $\omega_L$  es pequeña comparada con la frecuencia angular media del movimiento de un electrón en una órbita atómica.

Con esta aproximación tendremos las dos soluciones homogéneas

$$x_{1+} = C_1 \exp \{i[(\omega_0 - \omega_L)t + \phi_1]\} \quad (6-66)$$

y

$$x_{2+} = C_2 \exp \{-i[(\omega_0 + \omega_L)t + \phi_2]\}. \quad (6-67)$$

La solución homogénea general es, por supuesto, una combinación lineal de estas dos soluciones. No obstante, con condiciones iniciales apropiadas, las ecuaciones (6-66) o (6-67), pueden describir una forma del movimiento de la partícula. Se halla que las partes real e imaginaria de la primera solución,

$$x_1 = C_1 \cos [(\omega_0 - \omega_L)t + \phi_1] \quad (6-68)$$

y

$$y_1 = C_1 \sin [(\omega_0 - \omega_L)t + \phi_1],$$

representan el movimiento circular de la partícula en el plano  $xy$ . El radio de la circunferencia es  $C_1$  y la velocidad angular del radio vector es

$$\omega = (\omega_0 - \omega_L)\mathbf{k}. \quad (6-69)$$

Por otra parte, la segunda solución homogénea, o sea

$$x_2 = C_2 \cos [(\omega_0 + \omega_L)t + \phi_2] \quad (6-70)$$

y

$$y_2 = -C_2 \sin [(\omega_0 + \omega_L)t + \phi_2],$$

representa el movimiento circular de la partícula en el plano  $xy$  sobre una circunferencia de radio  $C_2$  con una velocidad angular

$$\omega = -(\omega_0 + \omega_L)\mathbf{k}. \quad (6-71)$$

Observaremos que la introducción de un campo magnético causa un movimiento de precesión en las formas de movimiento circular no perturbadas ( $\mathbf{B} = 0$ ) del oscilador isotrópico en un plano perpendicular al campo magnético. La velocidad angular adicional debida a esta precesión es

$$-\omega_L\mathbf{k}.$$

Esta velocidad angular adicional se llama *frecuencia* o *velocidad angular de precesión de Larmor*.

Podemos demostrar que sobre cualquier otra forma de movimiento del oscilador isotrópico, en que no hay campo magnético, el efecto producido por la aplicación de un campo magnético es, también, un movimiento de precesión que tendrá la frecuencia de Larmor.

Para ello, consideraremos el movimiento armónico simple a lo largo del eje  $x$ . La combinación lineal de las dos soluciones homogéneas de la ecuación (6-59) (que con un campo magnético nulo nos da el movimiento oscilatorio de la partícula a lo largo del eje  $x$ ) es la solución

$$x_+ = x_{1+} + x_{2+} \quad (6-72)$$

con

$$C_1 = C_2 = C \quad \text{y} \quad \phi_1 = \phi_2.$$

Escogiendo un tiempo o instante inicial tal que  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ , encontramos que en presencia del campo magnético la ecuación (6-72) nos da

$$x = C[\cos(\omega_0 + \omega_L)t \cos(\omega_0 - \omega_L)t]$$

y

$$y = C[-\text{sen}(\omega_0 + \omega_L)t + \text{sen}(\omega_0 - \omega_L)t],$$

o

$$x = (2C \cos \omega_0 t) \cos \omega_L t \quad y = -(2C \cos \omega_0 t) \text{sen} \omega_L t. \quad (6-73)$$

Esta solución se puede interpretar como un movimiento circular de amplitud  $2C \cos \omega_0 t$  y con una velocidad angular de precesión  $-\omega_L \mathbf{k}$ . Desde este punto de vista, ésta representa la solución no perturbada del movimiento de la partícula obtenida en ausencia del campo magnético, con la precesión de la velocidad angular de Larmor cuando existe el campo magnético (fig. 6-7).

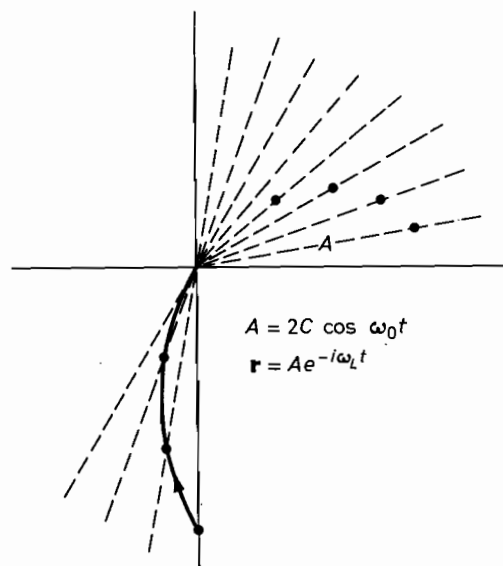


FIG. 6-7. Precesión de un oscilador armónico simple.

► Una aplicación interesante e importante del efecto de un campo magnético uniforme sobre el movimiento de un oscilador isotrópico es el efecto resultante que tiene sobre la respuesta o reacción del oscilador al campo eléctrico de una onda plana electromagnética polarizada (problema 6-4). Vemos que la presencia de un campo magnético en la dirección de propagación de la onda origina las ondas circulares polarizadas a la derecha y a la izquierda en que se puede descomponer una onda plana (sección 12-5), que se propagan con velocidad en fase diferente. Esto provoca la rotación del plano de polarización de la onda propagada. Esta rotación al aplicar un campo magnético se conoce como *efecto Faraday*. ◀

### 6-10 Teorema de Larmor

El *teorema de Larmor* dice que: siempre que tengamos una partícula cargada moviéndose en una órbita limitada en una región finita del espacio en que actúa un campo de fuerzas centrales, la adición de un pequeño campo magnético produce un movimiento adicional de precesión superpuesto al movimiento no perturbado de la partícula cargada ( $\mathbf{B} = 0$ ).

Se demuestra el teorema de Larmor considerando la descripción del movimiento de una partícula cargada en un campo central y otro magnético con respecto a un sistema de coordenadas que gire con la velocidad angular constante

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega_L \mathbf{k}.$$

La transformación de la descripción de la velocidad y de la aceleración a tal sistema de coordenadas rotativo se estudió en la sección 3-2. Recordando que las relaciones entre velocidad y aceleración son

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (6-74)$$

y

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (6-75)$$

donde  $\mathbf{v}'$  y  $\mathbf{a}'$  son, respectivamente, la velocidad y la aceleración de la partícula con respecto al sistema de coordenadas giratorio, hallamos que la ecuación de movimiento en función de  $\mathbf{v}'$  y  $\mathbf{a}'$  es

$$m[\mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] = f(r)\mathbf{e}_r + e[\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \times \mathbf{B}.$$

Con una velocidad angular

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega_L \mathbf{k} = -\frac{eB}{2m} \mathbf{k} = -\frac{e}{2m} \mathbf{B},$$

para la que

$$2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = -e\mathbf{B} \times \mathbf{v}' = e\mathbf{v}' \times \mathbf{B}$$

y

$$m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\frac{e}{2} \mathbf{B} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\frac{e^2}{4m} (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B},$$

la ecuación de movimiento se reduce a

$$m\mathbf{a}' = f(r)\mathbf{e}_r - \frac{e^2}{4m} (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}. \quad (6-76)$$

Con campos magnéticos pequeños, en los que el término  $B^2$  es despreciable, encontramos así la ecuación de movimiento aproximada

$$m\mathbf{a}' = f(r)\mathbf{e}_r. \quad (6-77)$$

La descripción del movimiento en el sistema de coordenadas giratorio es, entonces, en una primera aproximación, la misma que la del movimiento de la partícula en un sistema fijo sin campo magnético. Por consiguiente, en una primera aproximación, el movimiento de una partícula en presencia de un campo magnético se observará que es en la misma órbita que sin existir el campo magnético, pero con una precesión adicional de velocidad angular  $-\omega_L \mathbf{k}$ .

### 6-11 Continuación del teorema de Larmor

A partir de la ecuación de movimiento del vector de cantidad de movimiento angular orbital de la partícula [ecuación (5-31)], podemos hacer un análisis muy interesante del movimiento de una partícula cargada sometida a un campo de fuerza central y otro magnético. En ausencia del campo magnético, el vector de cantidad de movimiento angular es constante. Esto se deduce de que un campo de fuerzas central no ejerce ningún momento sobre la partícula, por lo que

$$d\mathbf{L}/dt = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const.}$$

De la definición del vector de cantidad de movimiento angular orbital,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

vemos que tanto el vector de posición,  $\mathbf{r}$ , como el vector de velocidad,  $\mathbf{v}$ , se encuentran siempre en un plano perpendicular a  $\mathbf{L}$ . Esto es, la órbita seguida por la partícula, sometida a la acción de una fuerza central, está en un plano perpendicular al vector de cantidad de movimiento angular orbital.

Al aplicar un campo magnético a lo largo del eje  $z$  aparece un momento que hará que ya no se conserve la cantidad de movimiento angular orbital. Pero aun así, sigue siendo cierto un teorema de conservación para la componente  $z$  de la ecuación de movimiento del vector de cantidad de movimiento angular orbital. Este teorema es, como demostraremos, el de conservación de la componente  $z$  de este vector expresado con respecto a un sistema de coordenadas que gira con la velocidad angular  $-\omega_L \mathbf{k}$ . Se ve esto más claramente, escribiendo en su forma explícita la componente  $z$  de la ecuación

$$\mathbf{N} = d\mathbf{L}/dt. \quad (6-78)$$

En coordenadas esféricas o cilíndricas, la ecuación de la componente  $z$  es una de las ecuaciones de movimiento de Lagrange (Capítulo 5). Si utilizamos coordenadas cilíndricas, y recordando que  $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ , hallamos que la ecuación citada es de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi}) &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \times [e\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \\ &= eB(\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{k}) \\ &= -\frac{d}{dt} \left[ \frac{eB}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{k})^2 \right] \end{aligned}$$

o

$$\frac{d}{dt} \left( m\rho^2\dot{\phi} + \frac{eB}{2} r^2 \sin^2 \theta. \right) = 0. \quad (6-79)$$

Pero, en coordenadas cilíndricas,  $\rho = r \sin \theta$ , por lo que la ecuación (6-79) se puede escribir como

$$\frac{d}{dt} m\rho^2(\dot{\phi} + \omega_L) = 0$$

o bien,

$$m\rho^2(\dot{\phi} + \omega_L) = \text{constante.} \quad (6-80)$$

Pero  $\dot{\phi} + \omega_L$  es la componente  $z$  del vector de velocidad angular

$$\Omega = \dot{\phi}\mathbf{k} + \dot{\theta}\mathbf{e}_\phi + \omega_L\mathbf{k},$$

el cual, a su vez (recordando que  $\dot{\phi}\mathbf{k} + \dot{\theta}\mathbf{e}_r$  es la velocidad angular del vector de posición con respecto al sistema de coordenadas fijo), es la velocidad angular del vector de posición de la partícula con respecto al sistema de coordenadas que gira con la velocidad angular  $-\omega_L \mathbf{k}$ . Se sigue de aquí que la cantidad conservada

$$L'_z = m\rho^2(\dot{\phi} + \omega_L) \quad (6-81)$$

es la componente  $z$  del vector de cantidad de movimiento angular orbital con respecto al sistema de coordenadas giratorio.

Si

$$|\omega_L| \ll \langle \dot{\phi} \rangle, \quad (6-82)$$

donde  $|\omega_L|$  es la frecuencia de Larmor y  $\langle \dot{\phi} \rangle$  la magnitud media de la componente  $z$  de la velocidad angular observada del vector de posición de la partícula, tendremos, en una primera aproximación, que la precesión de Larmor no cambia apreciablemente la componente  $z$  de la cantidad de movimiento angular orbital y podemos establecer

$$L_z = L'_z = \text{constante.} \quad (6-83)$$

Antes de investigar las otras ecuaciones componentes del movimiento del vector de cantidad de movimiento angular, expresaremos el momento en una forma más útil.

Por una manipulación del triple producto vectorial

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{B} \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{r} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{B} \\ &= (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{B} + \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (6-84)$$

se halla que el momento rotacional

$$\mathbf{N} = e\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

se puede expresar por

$$\mathbf{N} = e(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{B} + e\mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B}).$$

Pero

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = \frac{d}{dt} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B})] - \mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

de donde se deduce que

$$\mathbf{N} = e(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{B} + \frac{d}{dt} [e\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B})] - e\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6-85)$$

Esta última relación contiene el momento  $\mathbf{N} = e\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  en ambos miembros de la ecuación, y despejando éste se tiene

$$\mathbf{N} = \frac{e}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{B} + \frac{d}{dt} \left[ e\mathbf{r} \times \left( \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{B}}{2} \right) \right]. \quad (6-86)$$

Con esta expresión del momento, las ecuaciones de movimiento se pueden poner en la forma

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L} + e\mathbf{r} \times \mathbf{A}) = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}, \quad (6-87)$$

en la que el potencial vectorial magnético  $\mathbf{A}$  se definió previamente por la ecuación

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B},$$

y podemos establecer

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2}e\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{e}{2m} \mathbf{L}. \quad (6-88)$$

El vector  $\boldsymbol{\mu}$  se conoce como *momento magnético orbital* de la partícula.

El término  $e\mathbf{r} \times \mathbf{A}$  se encuentra generalmente que es despreciable cuando las partículas se mueven en regiones finitas del espacio y campos magnéticos pequeños. En este caso, tenemos la ecuación de movimiento que se puede resolver

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \frac{e}{2m} \mathbf{L} \times \mathbf{B}. \quad (6-89)$$

Afortunadamente, esta situación es la que se presenta en problemas atómicos con los campos magnéticos que se pueden producir en la actualidad.

La demostración de que el término  $e\mathbf{r} \times \mathbf{A}$  es realmente despreciable, requiere el empleo de resultados de la mecánica cuántica, puesto que la mecánica clásica no se puede aplicar a los problemas atómicos. La respuesta a por qué nos hemos molestado en considerar este problema completamente en mecánica clásica es que una descripción clásica del mismo, atemperada por restricciones debidas a resultados de la mecánica cuántica, conduce a veces a correlaciones correctas con resultados experimentales. En tales casos, la descripción clásica nos da una imagen más clara del movimiento.

Al término  $e\mathbf{r} \times \mathbf{A}$  de la ecuación (6-87) será despreciable siempre que el vector de inducción magnética satisfaga la condición

$$B \ll \frac{2L}{e\langle r^2 \rangle}, \quad (6-90)$$

siendo  $\langle r^2 \rangle$  la distancia radial media cuadrática. Este valor para los electrones de los átomos, es del orden de  $10^{-18} \text{ m}^2$ ,

$$\langle r^2 \rangle \lesssim 10^{-18} \text{ m}^2;$$

y la cantidad de movimiento angular orbital tiene como magnitud

$$L \geq h/2\pi,$$

donde  $h$  es la *constante de Planck*, y tiene el valor de  $1.05 \times 10^{-34}$  joule-seg.\* Usando los valores límites de  $L$  y  $\langle r^2 \rangle$  y el valor  $1.6 \times 10^{-19}$  coulombs\* para la magnitud de la carga electrónica, la condición (6-90) se convierte en

$$B \ll \frac{2 \times 1.05 \times 10^{-34}}{1.6 \times 10^{-19} \times 10^{-18}} \text{ webers}^*/\text{m}^2$$

o

$$B \ll 10^3 \text{ webers}/\text{m}^2.$$

Los vectores de inducción magnética mayores que se han obtenido hasta ahora en los laboratorios son del orden de unos pocos webers. Recientemente se han conseguido campos del orden de 10 webers/m<sup>2</sup> (100 000 gauss) empleando imanes superconductores y campos del orden de 50 webers/m<sup>2</sup> en electroimanes de impulsos. Estos campos todavía son pequeños comparados con el campo de 10<sup>3</sup> webers/m<sup>2</sup>.

Dijimos que la ecuación (6-89) se puede resolver para lo que recordaremos que las componentes cartesianas del movimiento son

$$\frac{dL_x}{dt} = \frac{eB}{2m} L_y, \quad \frac{dL_y}{dt} = -\frac{eB}{2m} L_x, \quad \frac{dL_z}{dt} = 0. \quad (6-91)$$

\* Joules, coulombs y webers son nombres internacionales. En español se dice julios, culombios y weberios.



Ya hemos considerado la última de estas ecuaciones. Las otras dos pueden combinarse en una sola

$$\frac{dL_{\pm}}{dt} = -i\omega_L L_{\pm} \quad (6-92)$$

en la que hemos puesto

$$L_{\pm} = L_x + iL_y. \quad (6-93)$$

Esta ecuación diferencial de primer orden tiene la solución

$$L_{\pm} = C e^{-i(\omega_L t + \phi)} \quad (6-94)$$

o sea,

$$L_x = C \cos(\omega_L t + \phi) \quad \text{y} \quad L_y = -C \sin(\omega_L t + \phi), \quad (6-95)$$

que representa el vector plano  $\mathbf{L}_{\perp} = L_x \mathbf{i} + L_y \mathbf{j}$ , que tiene la magnitud constante

$$L_{\perp} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} = C, \quad (6-96)$$

y que gira con una velocidad angular  $-\omega_L \mathbf{k}$ .

Por consiguiente, en una primera aproximación, la aparición de un campo magnético no cambia la magnitud de la proyección del vector de

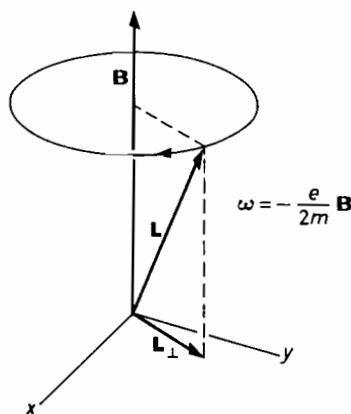


FIG. 6-8. Precesión del vector de cantidad de movimiento angular.

cantidad de movimiento angular orbital sobre el plano  $xy$  ni, puesto que  $L_z$  es constante, tampoco la magnitud de dicho vector

$$L = \sqrt{L_{\perp}^2 + L_z^2}. \quad (6-97)$$

Como esta magnitud se mantiene constante, sólo podrá cambiar su dirección y este cambio, hemos visto, que es una rotación alrededor del eje  $z$  (fig. 6-8).

Como habíamos concluido antes que el movimiento de la partícula en un instante tiene lugar en un plano perpendicular al vector de cantidad de movimiento angular orbital, se desprende que el plano de la órbita también tiene precesión junto con el vector citado alrededor del eje  $z$ .

Lo anterior concuerda con el teorema de Larmor de que, con respecto a un sistema de coordenadas que gira con la velocidad angular  $-\omega_L \mathbf{k}$ , el movimiento de la partícula es, en una primera aproximación, el mismo que su movimiento con respecto al sistema de coordenadas estacionario en ausencia de un campo magnético.

## 6-12 Resonancia magnética \*

El análisis anterior de una partícula cargada sometida al efecto combinado de un campo de fuerza central y un campo magnético uniforme es interesante, pero de poca utilidad, a menos que se emplee para predecir resultados observados experimentalmente. En problemas de sistemas atómicos, es obvio que la órbita seguida por la partícula atómica no es una de las características observables del movimiento. Lo que se observa es la interacción del sistema con un campo magnético adicional dependiente del tiempo, con el cual puede intercambiar energía, ganándola o perdiéndola.

Consideremos un momento magnético (una partícula cargada que recorre una órbita limitada de una región finita del espacio)

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m} \mathbf{L} \quad (6-98)$$

sobre el cual actúa un campo magnético uniforme, constante dirigido a lo largo del eje  $z$  y un campo magnético mucho más pequeño que varía sinusoidalmente dirigido a lo largo del eje  $y$ . La ecuación de movimiento del momento magnético está expresada por

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \frac{e}{2m} \boldsymbol{\mu} \times (\mathbf{B} + \mathbf{b}), \quad (6-99)$$

donde el campo uniforme es

$$\mathbf{B} = B\mathbf{k}, \quad (6-100)$$

y el variable con el tiempo

$$\mathbf{b} = b \cos \omega t \mathbf{j}. \quad (6-101)$$

Las componentes cartesianas de la ecuación (6-99) son

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_x}{dt} &= \frac{eB}{2m} \mu_y - \frac{eb}{2m} \mu_z \cos \omega t, \\ \frac{d\mu_y}{dt} &= -\frac{eB}{2m} \mu_x, \\ \frac{d\mu_z}{dt} &= \frac{eb\mu_x}{2m} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (6-102)$$

\* Charles P. Slichter, *Principles of Magnetic Resonance*. Nueva York: Harper and Row, Capítulo 2.

Estas ecuaciones no se pueden resolver fácilmente, puesto que algunos de los coeficientes de las componentes dependientes del tiempo,  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  y  $\mu_z$ , del vector de momento magnético, son funciones del tiempo. Sin embargo, para valores pequeños de  $b$ , podemos intentar hallar una solución por el método de aproximaciones sucesivas. Por consiguiente, pondremos

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^{(0)} + \boldsymbol{\mu}^{(1)}, \quad (6-103)$$

donde se supone que  $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$  es pequeño en comparación con  $\boldsymbol{\mu}^{(0)}$ , siendo esta última la aproximación de orden 0 del momento magnético que satisface la ecuación

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}^{(0)}}{dt} = \frac{e}{2m} \boldsymbol{\mu}^{(0)} \times \mathbf{B}. \quad (6-104)$$

En función de  $\boldsymbol{\mu}^{(0)}$ , se halla que la ecuación de  $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$  es

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}^{(1)}}{dt} = \frac{e}{2m} [\boldsymbol{\mu}^{(0)} \times \mathbf{b} + \boldsymbol{\mu}^{(1)} \times \mathbf{B} + \boldsymbol{\mu}^{(1)} \times \mathbf{b}], \quad (6-105)$$

cuyas ecuaciones componentes, despreciando el último término del segundo miembro, son

$$\frac{d\mu_x^{(1)}}{dt} = -\frac{eb\mu_z^{(0)}}{2m} \cos \omega t + \frac{eB}{2m} \mu_y^{(1)}, \quad (6-106)$$

$$\frac{d\mu_y^{(1)}}{dt} = -\frac{eB\mu_x^{(1)}}{2m}, \quad (6-107)$$

$$\frac{d\mu_z^{(1)}}{dt} = \frac{e\mu_x^{(0)}b}{2m} \cos \omega t. \quad (6-108)$$

La última ecuación tiene la solución no homogénea

$$\mu_z^{(1)} = \frac{e\mu_x^{(0)}b \sin \omega t}{2m\omega}, \quad (6-109)$$

mientras que la solución de las otras dos ecuaciones componentes se puede hallar fácilmente después de combinarlas en una sola ecuación diferencial unidimensional de primer orden

$$\frac{d\mu_+^{(1)}}{dt} = -\frac{ieB}{2m} \mu_+^{(1)} - \frac{e\mu_z^{(0)}b}{2m} \cos \omega t. \quad (6-110)$$

donde

$$\mu_+^{(1)} = \mu_x^{(1)} + i\mu_y^{(1)}.$$

Utilizando el factor de integración  $e^{i(eB/2m)t}$ , la ecuación (6-110) se transforma en

$$\frac{d}{dt} (\mu_+^{(1)} e^{i\omega_L t}) = -\frac{eb\mu_z^{(0)}}{2m} e^{i\omega_L t} \cos \omega t, \quad (6-111)$$

que se puede integrar para llegar a la solución

$$\mu_+^{(1)} e^{i\omega_L t} = -\frac{eb\mu_z^{(0)}}{2m} \frac{e^{i\omega_L t}}{\omega^2 - \omega_L^2} (\omega \sin \omega t + i\omega_L \cos \omega t)$$

o sea,

$$\mu_x^{(1)} = -\frac{eb\mu_z^{(0)}}{2m} \frac{\omega \sin \omega t}{\omega^2 - \omega_L^2} \quad (6-112)$$

y

$$\mu_y^{(1)} = -\frac{eb\mu_z^{(0)}}{2m} \frac{\omega_L \cos \omega t}{\omega^2 - \omega_L^2}. \quad (6-113)$$

Observaremos que esta solución tiene una singularidad y es que se hace infinita cuando  $\omega = \omega_L$ . De nuestro análisis del oscilador armónico simple, podemos darnos cuenta que tenemos aquí un fenómeno de resonancia, o sea, que hay un punto en el cual la respuesta o reacción del sistema a la fuerza excitadora externa es un máximo. Llamaremos a este punto, en el presente problema, punto de *resonancia magnética*.

En la práctica es claro que hay momentos de amortiguación que evitarán que  $\mu_x^{(1)}$  y  $\mu_y^{(1)}$  se vuelvan infinitos, como indican que es posible las ecuaciones (6-112) y (6-113) (problema 6-12). Si estos valores se hicieran muy grandes nulificarían nuestro análisis, puesto que supusimos que

$$|\boldsymbol{\mu}^{(1)}| \ll |\boldsymbol{\mu}^{(0)}|.$$

### 6-13 Funciones de energía potencial dependientes de la velocidad: cantidades de movimiento generalizadas

Las ecuaciones de Lagrange que describen el movimiento de una partícula sometida a la acción de un campo de fuerzas conservativas y de un campo magnético son, en función de las coordenadas cartesianas  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  y  $x_3 = z$ ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial(T-U)}{\partial x_i} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6-114)$$

donde  $e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i$  es la apropiada componente  $x$ ,  $y$  o  $z$  de la fuerza magnética.

La ecuación (6-114) se puede simplificar expresando el segundo miembro en forma que podamos unirlo a los términos del primer miembro. Para ello recordaremos que en un campo magnético constante, en el cual se cumple

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = -2 \frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad (6-115)$$

podemos establecer

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i = -2 \frac{dA_i}{dt} = -2 \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \quad (6-116)$$

Este término es similar al primero del primer miembro de la ecuación (6-114). Sin embargo, quisiéramos poder establecer

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \quad (6-117)$$

Por consiguiente, tenemos que examinarla para ver a qué es igual el término  $(\partial/\partial x_i)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$ . Vemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i,$$

o, por la ecuación (6-116)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \quad (6-118)$$

En consecuencia, para campos magnéticos constantes podemos establecer

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}), \quad (6-119)$$

lo cual nos permite volver a expresar la ecuación (6-114) en la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(T - U + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial x_i}(T - U + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = 0. \quad (6-120)$$

Volviendo a definir la función lagrangiana por

$$L = T - U + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}, \quad (6-121)$$

las ecuaciones, en coordenadas cartesianas, del movimiento de una partícula en un campo de fuerzas conservativas y otro magnético uniforme se expresan por la ecuación

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0. \quad (6-122)$$

Observaremos que el lagrangiano definido por la ecuación (6-121), deducido para una partícula en un campo magnético uniforme, da también las ecuaciones de movimiento correctas para cualquier otro campo magnético (problema 6-11). Nótese que, en función de las coordenadas generalizadas  $q_1, q_2, q_3$ , las ecuaciones generalizadas de movimiento son

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \frac{dx_i}{dq_i} = 0,$$

que se demuestra fácilmente que se reducen (problema 6-23) a la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (6-123)$$

Realmente hallamos que para fuerzas dependientes del tiempo, que se

pueden deducir de una función de energía potencial dependiente de la velocidad  $U(q_i, \dot{q}_i, t)$ , con la que las fuerzas generalizadas están dadas por

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (6-124)$$

las ecuaciones de movimiento están dadas por la ecuación (6-123), donde el lagrangiano  $L$  es

$$L = T - U. \quad (6-125)$$

Al tratar con este tipo de fuerzas, es costumbre definir la *cantidad de movimiento generalizada o conjugada*,  $p_i$ , por la ecuación

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}. \quad (6-126)$$

Esta no es igual que la cantidad de movimiento generalizada de la partícula definida en la sección 5-2. Sólo para fuerzas independientes de la velocidad en las que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

son las cantidades de movimiento generalizadas conjugadas idénticas a las cantidades de movimiento generalizadas de la partícula.

En los problemas en que intervienen fuerzas magnéticas, se halla que las cantidades de movimiento generalizadas conjugadas definidas por la ecuación (6-126) son

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = (m\mathbf{v} + e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}_i = mv_i + eA_i. \quad (6-127)$$

#### 6-14 Conservación de la energía: función hamiltoniana

Ahora, partiendo de las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_i} = 0, \quad (6-128)$$

vamos a verificar el principio de conservación de la energía para el caso en que la energía potencial  $U$  sea también función de la velocidad. Las fuerzas generalizadas expresadas a partir de la función de energía potencial dependiente de la velocidad,  $U(q_i, \dot{q}_i, t)$ , son

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (6-129)$$

y el trabajo realizado por tales fuerzas generalizadas, para cambios infinitesimales de las coordenadas generalizadas, es

$$dW = \sum_{i=1}^3 Q_i dq_i = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) dq_i. \quad (6-130)$$

La ecuación (6-128) nos indica que para un desplazamiento infinitesimal,

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) dq_i = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) dq_i$$

o

$$\sum_{i=1}^3 \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{dt} dt - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right] = 0. \quad (6-131)$$

Utilizando la relación

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{dq_i}{dt} dt = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) dt - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i dt = d \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i, \quad (6-132)$$

podemos expresar la ecuación (6-131) en la forma

$$\sum_{i=1}^3 \left\{ d \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right\} = 0$$

o

$$d \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt = 0, \quad (6-133)$$

ya que

$$dL = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (6-134)$$

Si el lagrangiano  $L$  no contiene explícitamente el tiempo, esto es, si

$$\partial L / \partial t = 0, \quad (6-135)$$

la ecuación (6-133) se reduce a

$$d \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0,$$

que da el teorema de conservación

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \text{const.} \quad (6-136)$$

La derivada parcial del lagrangiano, con respecto a la velocidad generalizada, se definió en la última sección como la cantidad de movimiento generalizada,  $p_i$ . Por tanto, la ecuación (6-136) en función de las cantidades de movimiento generalizadas expresa que siempre que se satisfaga la ecuación (6-135), la cantidad

$$\sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i - L$$

es una constante del movimiento. Esto es, siempre que el lagrangiano no sea una función explícita del tiempo, la función

$$H = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i - L, \quad (6-137)$$

denominada *hamiltoniano* del sistema es una constante del movimiento.

Procederemos ahora a demostrar que la función hamiltoniana de una partícula cargada que se mueve por la acción combinada de un campo de fuerzas conservativas, que se pueden obtener de la función de energía potencial independiente de la velocidad  $U(x, y, z)$ , y otro campo magnético, representa la energía total.

La demostración es directa si tenemos en cuenta que, en este caso, las cantidades de movimiento generalizadas son

$$p_i = mv_i + eA_i, \quad (6-138)$$

con

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i \quad \text{y} \quad A_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_i.$$

En consecuencia, si la transformación a coordenadas generalizadas es independiente del tiempo, para lo cual  $\dot{q}_i = v_i^*$ , entonces

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i - L \\ &= \sum_{i=1}^3 mv_i v_i^* + \sum_{i=1}^3 eA_i v_i^* - L \\ &= mv^2 + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - (\frac{1}{2}mv^2 - U + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = T + U. \end{aligned} \quad (6-139)$$

Aquí hemos usado el hecho de que

$$\sum_{i=1}^3 mv_i v_i^* = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^3 eA_i v_i^* = e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}.$$

Que estas dos últimas ecuaciones se verifican se deduce de la expresión del

producto escalar de dos vectores expresado en función de su producto escalar con los vectores  $\mathbf{b}_i$  y sus inversos  $\mathbf{b}_i$ .

### 6-15 Ecuaciones de movimiento de Hamilton

La función hamiltoniana definida por la ecuación (6-137) es para valores de  $q_i$ ,  $\dot{q}_i$  y  $p_i$  que satisfagan la ecuación (6-126) estacionaria con respecto a variaciones de las velocidades generalizadas. Esto podemos verificarlo considerando la variación de  $H$ . La variación de la ecuación (6-137) es

$$dH = \sum_{i=1}^s \left( p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (6-140)$$

Para valores de  $q_i$ ,  $\dot{q}_i$  y  $p_i$  que satisfagan la ecuación (6-126), los términos

$$\sum_{i=1}^s \left( p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) d\dot{q}_i$$

de la ecuación (6-140) se anulan, no quedando, ningún término en  $d\dot{q}_i$  en el segundo miembro. Se halla, en consecuencia, que

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (6-141)$$

Puesto que nos limitamos al empleo de sólo aquellos valores de  $q_i$ ,  $\dot{q}_i$  y  $p_i$  que satisfagan la ecuación (6-126), estas variables no son ya independientes. Podemos, por consiguiente, considerar que las  $\dot{q}_i$  son funciones de las  $q_i$  y  $p_i$ , y que el hamiltoniano es, a su vez, función de las mismas variables, esto es

$$H = H(q_i, p_i, t) \quad (6-142)$$

y

$$dH = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt.$$

Con la ecuación (6-140) se halla que

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (6-143)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad (6-144)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (6-145)$$

La ecuación (6-141) demuestra lo que queríamos demostrar y que, para valores de  $q_i$ ,  $\dot{q}_i$  y  $p_i$  que satisfagan la ecuación (6-126), la función hamiltoniana puede considerarse que es función de  $q_i$ ,  $p_i$  y  $t$ .

Empleando, ahora, las ecuaciones de movimiento de Lagrange, la ecuación (6-143) se puede volver a escribir en la forma

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (6-146)$$

que junto con la ecuación (6-144),  $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$ , constituye lo que llamaremos *ecuaciones de movimiento de Hamilton*. La ecuación (6-146) es el equivalente de las ecuaciones de movimiento de Lagrange, mientras que la (6-144), que nos da las velocidades generalizadas como funciones de las coordenadas y cantidades de movimiento generalizadas, es la inversa de la ecuación (6-126) que define las cantidades de movimiento generalizadas, como funciones de las coordenadas y velocidades generalizadas. Esto es, la ecuación (6-144) representa la (6-126) en que se han despejado las  $\dot{q}_i$ .

Para nuestro fin, las ecuaciones de Hamilton, siendo equivalentes a las de Lagrange, no ofrecen ninguna ventaja evidente en la resolución de problemas. Su importancia radica en que son la base de un enfoque o planteo más complejo de los conceptos de la mecánica, lo que es importante para el desarrollo de la mecánica cuántica y muy útil en mecánica estadística. Desarrollar más a fondo la mecánica de Hamilton se sale de los propósitos de este libro.

Como una ilustración de su empleo y de su equivalencia a las ecuaciones de Lagrange, encontraremos el hamiltoniano y las ecuaciones de movimiento de Hamilton de una partícula cargada en un campo central eléctrico y uno magnético uniforme, dirigido este último a lo largo del eje  $z$ .

Para comenzar, hallaremos el lagrangiano, pues lo necesitaremos para obtener las cantidades de movimiento generalizadas. El lagrangiano para este problema ya lo hemos visto en la sección 6-13, donde se halló que está dado por

$$L = T - U + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}. \quad (6-147)$$

Y a partir de él obtenemos las cantidades de movimiento generalizadas en coordenadas cartesianas

$$p_1 = p_x = mv_x + eA_x = mv_1 + eA_1, \quad (6-148)$$

$$p_2 = p_y = mv_y + eA_y, \quad (6-149)$$

$$p_3 = p_z = mv_z + eA_z, \quad (6-150)$$

con lo que encontramos las velocidades generalizadas

$$\dot{x}_i = \frac{p_i - eA_i}{m}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6-151)$$

Ahora estamos en condiciones de construir el hamiltoniano, que será

$$H = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{x}_i - T + U - e \sum_{i=1}^3 A_i \dot{x}_i = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 (p_i - eA_i)^2 + U, \quad (6-152)$$

puesto que

$$T = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \dot{x}_i = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 (p_i - eA_i)^2.$$

Este mismo resultado se pudo haber obtenido directamente partiendo de la relación

$$m\dot{x}_i = p_i - eA_i$$

y de la ecuación (6-139), que nos dice que el hamiltoniano de una partícula en un campo de fuerza conservativa y uno magnético es la energía total

$$H = T + U.$$

Partiendo del hamiltoniano (6-152) obtenemos las ecuaciones cartesianas del movimiento

$$\dot{p}_x = \frac{d}{dt} (m\dot{x} + eA_x) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} + e \sum_{i=1}^3 \left( \frac{p_i - eA_i}{m} \right) \frac{eA_i}{\partial x}$$

o sea,

$$\frac{d}{dt} (m_i \dot{x}_i + eA_x) = -\frac{\partial U}{\partial x} + e\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}, \quad (6-153)$$

y ecuaciones similares para las componentes  $y$  y  $z$ .

Como, por las ecuaciones (6-116) y (6-118)

$$e \frac{dA_x}{dt} = -\frac{1}{2} e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x \quad \text{y} \quad e\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \frac{1}{2} e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x,$$

se desprende que la ecuación (6-153) es realmente la componente  $x$  de la ecuación de movimiento de Newton. Las otras componentes se obtienen análogamente.

El resto de las ecuaciones de movimiento de Hamilton da las velocidades generalizadas

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m} (p_i - eA_i).$$

Esta es la ecuación (6-151) que recordaremos fue obtenida de las ecuaciones que definían las cantidades de movimiento generalizadas.

En general, para coordenadas curvilíneas ortogonales en las que

$$\mathbf{b}_i = \frac{1}{h_i^2} \mathbf{b}_i$$

tenemos

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i = h_i^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i = h_i^2 \dot{q}_i,$$

y, por lo tanto,

$$v^2 = \sum_{i=1}^3 v_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{v_i^2}{h_i^2}.$$

Se sigue de aquí que, en cualquier problema en el que el hamiltoniano sea igual a la energía total, su expresión en coordenadas curvilíneas ortogonales tiene la forma

$$H = T + U = \frac{1}{2} m v^2 + U = \sum_{i=1}^3 \frac{m}{2} \frac{v_i^2}{h_i^2} + U,$$

donde las  $v_i$  se expresan en función de las cantidades de movimiento generalizadas. Para los problemas en que intervengan fuerzas magnéticas en que

$$p_i = m v_i + eA_i \quad \text{o sea,} \quad v_i = \frac{1}{m} (p_i - eA_i),$$

tenemos así

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2m} \frac{(p_i - eA_i)^2}{h_i^2} + U.$$

En coordenadas esféricas, por ejemplo, el hamiltoniano tiene la forma

$$H = \frac{(p_1 - eA_1)^2}{2m} + \frac{(p_2 - eA_2)^2}{2mr^2} + \frac{(p_3 - eA_3)^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + U,$$

donde

$$\begin{aligned} p_1 - eA_1 &= (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_r, \\ p_2 - eA_2 &= (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{r} \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_\phi = r[(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_\theta], \end{aligned}$$

y

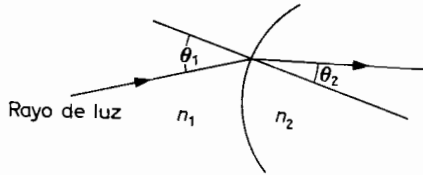
$$\begin{aligned} p_3 - eA_3 &= (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{r} \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{k} = r \sin \theta [(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_\phi]. \end{aligned}$$

## 6-16 Mecánica y óptica geométricas

Existe una interesante analogía entre la trayectoria de una partícula sometida a una fuerza conservativa y la trayectoria seguida por un rayo de luz en una región

del espacio en que el índice de refracción es una función de posición que varía lentamente. Esto es, el índice de refracción no varía apreciablemente en una distancia igual a la longitud de onda de la luz en el medio. En esta circunstancia, la naturaleza ondulatoria de la luz no es manifestada por la onda luminosa, y su propagación por el medio es exactamente descrita por la propagación de los puntos de sus frentes de onda a lo largo de las trayectorias de los rayos normales a dichos frentes.

Cuando un rayo de luz pasa de un medio con determinado índice de refracción a otro de diferente índice, lo hace de acuerdo con la ley de Snell. Esta ley establece



$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2$$

FIG. 6-9. Ley de Snell.

que la cantidad  $n \text{ sen } \theta$  permanece constante, siendo  $\theta$  el ángulo que forma la trayectoria del rayo con la normal a la superficie que separa los dos medios y  $n$  el índice de refracción del primer medio considerado (fig. 6-9).

Esta ley nos permite determinar gráficamente la trayectoria de un rayo de luz a través de un medio cualquiera. Subdividiendo, si es posible, la región por la que se propaga el rayo en cierto número de superficies de índice de refracción constante, determinado por

$$n_m(x, y, z) = n_0(x, y, z) + m \Delta n, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

(fig. 6-10a), donde  $n_0(x, y, z)$  es la superficie de índice constante que pasa por la posición inicial del rayo y  $\Delta n$  es un cambio infinitesimal del índice, podemos valorar

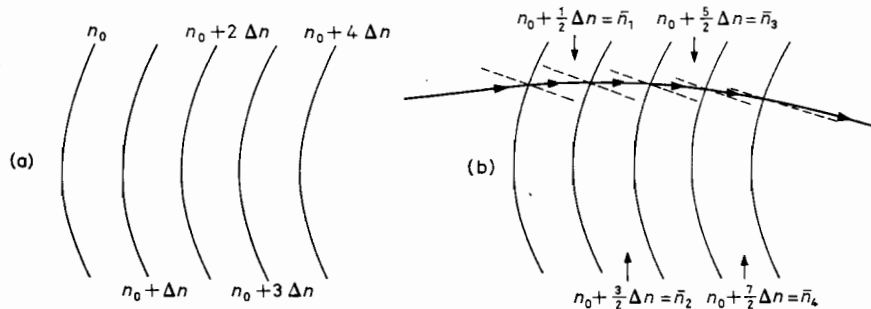


FIG. 6-10. Método gráfico para determinar trayectorias de rayos.

aproximadamente el índice de cada región por su valor medio en toda la región (fig. 6-10b). Entonces, el paso del rayo por el medio, se determina aproximadamente por la trayectoria discontinua que seguiría el rayo en la región discontinua

de la figura 6-10b. Esta trayectoria se determina aplicando la ley de Snell en cada frontera de discontinuidad.

Por el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas conservativas, vemos que hay una fórmula análoga a la ley de Snell. Consideremos una partícula que se mueve de una región a otra en la que la energía potencial cambia discontinuamente de  $U_1$  a  $U_2$  a medida que la partícula atraviesa la frontera entre las dos regiones (fig. 6-11).

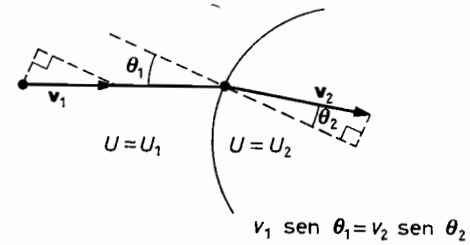


FIG. 6-11

Un cambio de la energía potencial de la partícula provoca un cambio en su velocidad, producido por la variación de la componente de la velocidad normal a la superficie en que la energía potencial cambia discontinuamente. El efecto de la discontinuidad en la función de energía potencial es equivalente a un impulso de energía  $Fv\Delta t$  en la dirección normal a la superficie de discontinuidad. Este impulso hace que se modifique la energía cinética de la partícula en la cantidad  $\Delta T = Fv\Delta t = U_1 - U_2$ , lo que origina una variación en la componente de la velocidad normal a la superficie de discontinuidad. Pero la componente tangencial permanece invariable, de modo que

$$v_1 \text{ sen } \theta_1 = v_2 \text{ sen } \theta_2$$

donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los ángulos que forman los vectores velocidad de las dos regiones con la normal a la superficie (fig. 6-11).

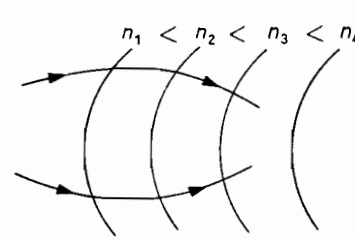


FIG. 6-12. Medio convergente.

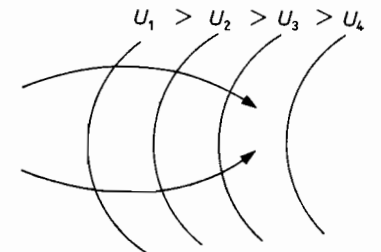


FIG. 6-13. Región convergente para las trayectorias de dos partículas.

La magnitud del vector velocidad en las dos regiones se halla utilizando el principio de conservación de la energía, que nos dará la ecuación

$$\sqrt{E - U_1} \text{ sen } \theta_1 = \sqrt{E - U_2} \text{ sen } \theta_2$$

Se debe entender claramente que, en los problemas en que el índice de refracción,  $n(x, y, z)$ , y la función  $\sqrt{E - U(x, y, z)}$  tienen la misma dependencia funcional de la posición, la trayectoria de un rayo de luz cuya posición inicial y cuya dirección de propagación coinciden con las de una partícula de energía total  $E$  será la misma que la trayectoria de la partícula.

Cualitativamente, por ejemplo, encontramos que los rayos de luz de un frente de ondas que se propagan en una región en que las superficies de índice constante son curvas, y varían como se indica en la figura 6-12, se curvarán uno hacia el otro. Un medio de este tipo recibe el nombre de medio convergente.

Análogamente en una región en que las superficies de energía potencial constante varían como se muestra en la figura 6-13, las trayectorias próximas seguidas por partículas que salen de un punto dado con la misma velocidad, se curvarán, también, una hacia la otra. Observaremos que éste es el principio en que se basa la construcción de lentes electrostáticas para el enfoque de haces de partículas cargadas.

### 6-17 Óptica geométrica, mecánica y mecánica ondulatoria

Los notables descubrimientos de este siglo nos proporcionan innumerables ejemplos de fenómenos inexplicables para la mecánica clásica. La estabilidad de los átomos, el efecto fotoeléctrico y el experimento de Davisson-Germer sobre la difracción de electrones, por no citar más que unos pocos, son ejemplos de este tipo, todos los cuales han servido para el progreso de nuestra visión actual sobre el comportamiento de las partículas en pequeñas regiones del espacio. La falla de la física clásica en la explicación del comportamiento aparentemente extraño de las partículas en pequeñas regiones del espacio, no es tan sorprendente si se tiene en cuenta que dicha ciencia supone naturaleza que es continua y que cuando tratamos del comportamiento de los bloques fundamentales que forman la naturaleza, las partículas fundamentales, estamos investigando aquellas partes de la misma que son discontinuas. Por esta razón, y por otras que se exponen extensamente en los libros de mecánica cuántica, la física clásica no se puede aplicar al estudio de la creación, destrucción e interacción de las partículas fundamentales.

Las partículas de las pequeñas regiones del espacio exhiben propiedades ondulatorias. Por otra parte, la radiación electromagnética que, en física clásica, se describe como una onda, tiene características corpusculares (o de partículas). El punto de vista actual de la mecánica cuántica, sugerido por primera vez en 1924 por Luis de Broglie, es que es natural que las partículas, en ambiente apropiado, muestren propiedades ondulatorias y que, a su vez, las ondas exhiban propiedades corpusculares. Existe, entonces, una dualidad de onda y partícula en la naturaleza, siendo la descripción corpuscular el límite de la ondulatoria. La descripción corpuscular es buena, cuando el movimiento ondulatorio se desarrolla en una región en que las propiedades que influyen en la propagación de la onda no varían apreciablemente en distancias iguales a la longitud de onda. Desde este punto de vista, la analogía entre óptica geométrica y mecánica, es más fundamental de lo que podemos inferir de la exposición de la sección anterior.

Habiendo llegado tan cerca del enfoque histórico de la mecánica ondulatoria, no podemos resistir la tentación de extender algo más nuestro estudio anterior sobre la analogía entre la óptica y la mecánica.

Se define el frente de una onda electromagnética por una superficie en que todos sus puntos tienen la misma fase. La fase relativa de los frentes de onda en diferentes puntos a lo largo de la trayectoria de un rayo, en un instante determinado, viene dada por el *iconal* o *eikonal*, que se define por la relación

$$\chi = \int n ds, \quad (6-154)$$

donde  $n$  es el índice de refracción y la integral se evalúa a lo largo de la trayectoria del rayo. Las superficies de  $\chi$  constante son normales a dicha trayectoria.

Análogamente al tratar del movimiento de una partícula, podemos definir la función

$$\mathcal{W} = \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{s} = \int \sqrt{2m(E - U)} ds, \quad (6-155)$$

que se puede considerar como una medida de la diferencia de fase entre dos frentes de onda corpusculares, que pasan por dos puntos de la trayectoria de la partícula. Debemos aclarar para nuestra analogía, que aunque la ecuación (6-155) no es suficiente por sí misma para determinar las superficies de  $\mathcal{W}$  constante, tales superficies existen y son normales a la dirección de la trayectoria de la partícula. Se deduce, entonces, de la definición de  $\mathcal{W}$  que podemos establecer

$$\mathbf{p} = \nabla \mathcal{W};$$

y de ella, como

$$d\mathcal{W} = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^3 p_i dq_i,$$

que

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}. \quad (6-156)$$

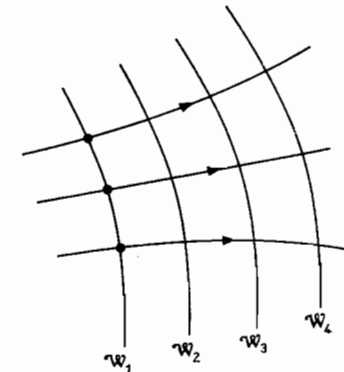


Fig. 6-14. Trayectorias de partículas determinadas por las superficies de  $\mathcal{W}$  constante.

Una exposición del método analítico para hallar las superficies de  $\mathcal{W}$  constante está fuera del propósito de este libro. Sin embargo, queremos indicar que dichas superficies son las soluciones de la *ecuación diferencial parcial de Hamilton-Jacobi* para la *función característica de Hamilton*,  $\mathcal{W}$ ,



$$\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i^2} \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i} \right)^2 + U(q_1, q_2, q_3) = E, \quad (6-157)$$

que se obtiene introduciendo  $p_i$ , como está expresado en la ecuación (6-156), en el hamiltoniano.

Observaremos que una partícula similar con la misma energía total que se mueva en cualquier instante normalmente a la superficie de  $\mathcal{W}$  constante, continuará moviéndose a lo largo de la trayectoria normal a todas las superficies siguientes de  $\mathcal{W}$  constante (fig. 6-14).

En conclusión, podemos definir la longitud de onda de De Broglie para ondas corpusculares. Se define en analogía con la relación entre el índice de refracción y la longitud de las ondas electromagnéticas. Para las ondas electromagnéticas tenemos la relación

$$n = \lambda_0 / \lambda, \quad (6-158)$$

donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda constante de la radiación en el espacio libre o vacío. Para ondas corpusculares, tenemos similarmente

$$\sqrt{2m(E - U)}\lambda = \text{const.}$$

Experimentalmente se halla que

$$\lambda = h/p, \quad (6-159)$$

donde  $h$  es la constante de Planck. Para ondas electromagnéticas en las que la relación entre la energía de una "partícula de luz" (llamada fotón) y la frecuencia  $\nu$  es

$$E = h\nu, \quad (6-160)$$

y la relación entre la cantidad de movimiento y la energía es

$$p = E/c \quad (6-161)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz, se halla la misma relación que existe para una partícula entre su longitud de onda y la cantidad de movimiento

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{h}{h\nu/c} = \frac{h}{p}. \quad (6-162)$$

## Problemas

6-1. Hállese la función de energía potencial de las fuerzas conservativas que hay entre las funciones de fuerza siguientes:

$$\begin{aligned} a) \quad F_x &= f_1(x), & F_y &= f_2(y), & F_z &= f_3(z) \\ b) \quad F_x &= \frac{a}{x^2 + y^2}, & F_y &= \frac{b}{x^2 + y^2}, & F_z &= 0 \\ c) \quad F_x &= \frac{ax}{x^2 + y^2 + z^2}, & F_y &= \frac{ay}{x^2 + y^2 + z^2}, & F_z &= \frac{az}{x^2 + y^2 + z^2} \\ d) \quad F_x &= xy^2z, & F_y &= x^2yz, & F_z &= \frac{1}{2}x^2y^2 \\ e) \quad F_x &= \frac{a+x}{x^2 + y^2 + z^2} e^{-ax}, & F_y &= \frac{b+y}{x^2 + y^2 + z^2} e^{-by}, & F_z &= \frac{c+z}{x^2 + y^2 + z^2} e^{-cz} \end{aligned}$$

6-2. Encontrar las fuerzas conservativas para las que las siguientes son las funciones de energía potencial escalares:

$$\begin{aligned} a) \quad U &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2) \\ b) \quad U(r, \theta, \phi) &= \frac{a \cos \theta}{r^2} \\ c) \quad U &= \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2) \\ d) \quad U(r, \theta, \phi) &= \frac{e^{-kr}}{r} \end{aligned}$$

6-3. Calcular el trabajo realizado por las siguientes fuerzas a lo largo de las trayectorias indicadas:

a)  $\mathbf{F} = 4y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + k\mathbf{k}$  a lo largo de la hélice

$$x = 4 \cos \theta, \quad y = 4 \sin \theta, \quad z = 2\theta$$

desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = 2\pi$ .

b)  $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} + 3z^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$  a lo largo de la recta  $x = 2y = 4z$  desde el origen hasta el punto (4, 2, 1).

6-4. Considerando un oscilador armónico isotrópico cargado y bidimensional, sometido al campo magnético uniforme constante  $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ , perpendicular al plano en que se mueve el oscilador bajo la acción del campo eléctrico

$$\mathbf{E} = E_0 \cos \omega t \mathbf{i}.$$

Demuéstrese que si expresamos el campo eléctrico por la suma de dos campos giratorios

$$\mathbf{E}_+ = \frac{1}{2}E_0(\cos \omega t \mathbf{i} + \text{sen } \omega t \mathbf{j})$$

y

$$\mathbf{E}_- = \frac{1}{2}E_0(\cos \omega t \mathbf{i} - \text{sen } \omega t \mathbf{j}),$$

y despreciamos los términos en  $B^2$ , se puede hallar la resonancia del primer campo,  $\mathbf{E}_+$ , a una frecuencia

$$\omega = \omega_0 - \omega_L,$$

y la del segundo  $\mathbf{E}_-$  a otra

$$\omega = \omega_0 + \omega_L,$$

donde

$$\omega_L = \frac{eB}{2m}.$$

6-5. Repetir el problema 6-4 para el caso de un oscilador armónico isotrópico amortiguado en que

$$\mathbf{F}_{\text{amort}} = -2\mu m(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}).$$

6-6. Una partícula de carga positiva,  $e$ , y masa  $m$  pasa por un filtro de velocidades compuesto por un campo eléctrico uniforme,  $\mathbf{E}$ , dirigido a lo largo del sentido positivo del eje  $y$ ,

$$\mathbf{E} = E\mathbf{j},$$

y un campo magnético uniforme dirigido a lo largo del eje  $z$ ,

$$\mathbf{B} = B\mathbf{k}.$$

a) ¿Para qué velocidad inicial dirigida a lo largo del eje  $x$  pasará la partícula cargada por dicho filtro sin desviarse? b) Demuéstrese que una partícula cuya velocidad inicial esté en el plano  $xy$  y forme cierto pequeño ángulo,  $\alpha$ , con el sentido positivo de  $x$ , volverá a cortar nuevamente al eje  $x$  al cabo de cierto tiempo. Hállese el punto en que ocurre este nuevo cruce de la partícula que tenga la velocidad deseada hallada en la parte a) (fig. 6-15).

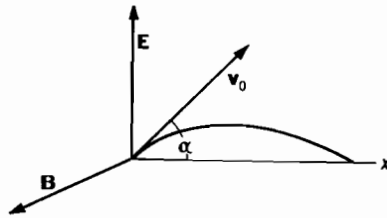


FIG. 6-15

6-7. En un espectrómetro de masas, se acelera un ion positivo de una sola carga ( $q = 1.602 \times 10^{-19}$  coulombs) por medio de una diferencia de potencial de 1000 voltios. Luego pasa por un campo magnético uniforme en el que  $B = 0.1$  weber/m<sup>2</sup>, y se desvía en una trayectoria circular de 0.182 m de radio. Determinar: a) la velocidad del ion; b) la masa del ion en kilogramos y unidades de masa atómica; c) el número de masa del ion.

6-8. Un proyectil disparado desde la Tierra tiene un alcance de  $l$  y la altura máxima de la trayectoria es  $h$ , ¿cuáles son la velocidad inicial y el ángulo de elevación del proyectil en función de  $h$ ,  $l$  y  $g$  (despreciando el rozamiento en el aire)?

6-9. En la posición  $x = 0$ ,  $y = 0$ , un cañón tiene un alcance máximo  $l_m$ . Determinar los dos ángulos de elevación para hacer blanco en el punto

$$x = l_m/2, \quad y = l_m/4.$$

6-10. Una partícula positiva de carga  $e$  (fig. 6-16) se mueve en el campo eléctrico central

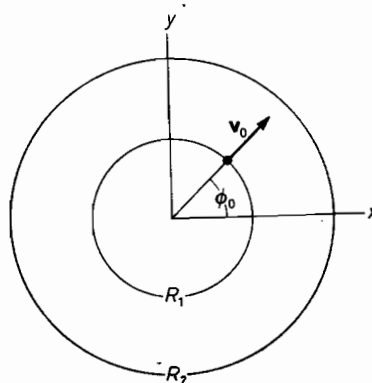


FIG. 6-16

$$\mathbf{E} = -\frac{\alpha}{\rho} \mathbf{e}_\rho,$$

que hay entre las placas de un condensador cilíndrico, y un campo magnético uniforme

$$\mathbf{B} = B\mathbf{k},$$

paralelo al eje del condensador.

a) Establecer las ecuaciones de movimiento de la partícula en coordenadas cilíndricas. b) Demostrar que la ecuación de movimiento, en función de la variable angular  $\phi$ , que es una coordenada que se puede no considerar, se resuelve fácilmente y da como integral del movimiento

$$m\rho^2\dot{\phi} + \frac{1}{2}e\rho^2B = h = \text{constante}.$$

c) Demostrar que, utilizando el resultado hallado en b), la ecuación radial se puede reducir a una ecuación de movimiento unidimensional, que nos dará una segunda integral del movimiento que expresa la conservación de la energía total. d) Si la partícula es emitida del cilindro interior con una velocidad inicial

$$\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}_\rho,$$

¿cuál debe ser el valor mínimo de  $v_0$  para que la partícula llegue al otro cilindro cuyo radio es  $R_2$ ? [Sugerencia: el valor mínimo de  $v_0$  se obtendrá cuando  $R_2$  sea un punto de retorno.]

6-11. Demostrar que, partiendo de que el vector de inducción magnética se expresa generalmente por el rotacional del potencial vectorial magnético,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

se deduce que la lagrangiana

$$L = T - U(x, y, z) + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

da las ecuaciones de movimiento correctas para una partícula cargada dentro de un campo electromagnético si el campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},$$

donde  $U = e\phi$ .

6-12. Consideremos el movimiento amortiguado de un momento magnético en un campo magnético uniforme constante,  $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ , y un pequeño campo magnético sinusoidal,  $\mathbf{b} = b_0 \cos \omega t \mathbf{j}$ , en el que el momento de amortiguamiento se tiene en cuenta por la adición de un término de amortiguación de la forma

$$\mathbf{N}_{\text{amort}} = \alpha \left( \frac{\boldsymbol{\mu}}{\mu} \right) \times \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt}$$

a las ecuaciones de movimiento del momento magnético,  $\boldsymbol{\mu}$ . Hállese la solución de estado estacionario de  $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$  de la ecuación de movimiento que resulta por el método de aproximaciones sucesivas, siendo

$$\boldsymbol{\mu}^{(1)} = \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^{(0)}.$$

Hállese también la frecuencia a la que  $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$  es máxima.

6-13. a) Sea un oscilador armónico anisotrópico bidimensional cuya energía potencial es

$$U = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2).$$

¿Para qué valores de  $k_1$  y  $k_2$  serán las órbitas cerradas? Dibujar algunas de estas órbitas (llamadas figuras de Lissajous). b) Obtener la función hamiltoniana de este problema, y a partir de ella, las ecuaciones de movimiento de Hamilton.

6-14. a) Consideremos un oscilador armónico anisotrópico cargado, cuyo movimiento está restringido a un plano, bajo la acción adicional de un campo magnético perpendicular a dicho plano. Demuéstrese que las ecuaciones de su movimiento son dos ecuaciones diferenciales lineales simultáneas homogéneas de la forma

$$L_1 x + L_2 y = 0 \quad y \quad L_3 x + L_4 y = 0,$$

donde  $L_1, L_2, \dots$  son operadores lineales con coeficientes constantes. b) Obtener la función hamiltoniana de este problema a partir de las ecuaciones de movimiento de Hamilton.

6-15. a) Demostrar que dos ecuaciones diferenciales simultáneas de la forma

$$L_1 x + L_2 y = 0 \quad y \quad L_3 x + L_4 y = 0 \quad (\text{A})$$

pueden, si los operadores  $L_i$  son operadores lineales con coeficientes constantes, reducirse a dos ecuaciones unidimensionales de la forma

$$(L_1 L_4 - L_2 L_3)x = 0 \quad y \quad (L_1 L_4 - L_2 L_3)y = 0. \quad (\text{B})$$

b) El resultado de la parte a) se deduce del hecho de que los operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes se pueden conmutar; esto es

$$L_i L_j = L_j L_i.$$

¿Pueden las dos ecuaciones simultáneas (A) reducirse todavía a dos ecuaciones unidimensionales, si los operadores  $L_i$  no son conmutativos? Si es así, ¿cómo? c) Demostrar que si los  $L_i$  son operadores diferenciales con coeficientes constantes, entonces el operador diferencial  $L_1 L_4 - L_2 L_3$  es, también, un operador diferencial con coeficientes constantes. d) Del resultado de la parte c) podemos conjeturar que la solución de las ecuaciones (B) se puede expresar en la forma

$$x = C_1 e^{\alpha t}, \quad y = C_2 e^{\alpha t}.$$

Demuéstrese que utilizando tal solución de tanteo para  $x$  y  $y$  en las ecuaciones (A), se halla que una solución no trivial de esta forma sólo es posible si  $\alpha$  es una raíz de la ecuación en forma de determinante

$$\begin{vmatrix} L_1(\alpha) & L_2(\alpha) \\ L_3(\alpha) & L_4(\alpha) \end{vmatrix} = 0,$$

donde  $L_i(\alpha)$  es  $L_i(d/dt)$  con  $d/dt$  reemplazado por  $\alpha$ . e) Utilícese este resultado para encontrar las frecuencias normales del oscilador armónico anisotrópico en un campo magnético (problema 6-14). Empléense

$$k_1 = 8m, \quad k_2 = 3m \quad y \quad eB = \sqrt{3}m.$$

6-16. En una primera aproximación, se halla empíricamente que las ecuaciones dinámicas del movimiento de un electrón en un cristal son

$$F_x = m_1 \ddot{x}, \quad F_y = m_2 \ddot{y} \quad y \quad F_z = m_3 \ddot{z}.$$

El efecto del potencial periódico cristalino sobre el movimiento del electrón se podrá representar entonces, empíricamente, asignando al electrón una masa tensorial representada en notación matricial por

$$(\mathbf{m}) = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}.$$

En función de esta masa tensorial, las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$|\mathbf{F}\rangle = \mathbf{m}|\mathbf{a}\rangle,$$

donde

$$|\mathbf{F}\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad y \quad |\mathbf{a}\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}.$$

a) Demuéstrese que el trabajo, en función de los elementos diagonales de la masa tensorial, es

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = T_2 - T_1,$$

donde  $T = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_3 \dot{z}^2$ . b) Demostrar que si sobre el electrón actúan fuerzas conservativas adicionales, la energía total es una constante del movimiento. c) Hállense las ecuaciones de movimiento de un electrón en un cristal, sometido a la acción de un campo eléctrico uniforme y otro magnético también uniforme. d) Demostrar que las ecuaciones de movimiento de c) se pueden encontrar a partir de la lagrangiana

$$L = T - U - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A},$$

donde  $-e$  es la carga electrónica. e) Hallar la hamiltoniana y las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Comprobar que la hamiltoniana se conserva siempre que  $(\partial L / \partial t) = 0$ .

6-17. Consideremos el movimiento plano de un electrón en un cristal bajo la acción de un campo magnético uniforme perpendicular al plano de su movimiento (problema 6-16). La lagrangiana de este problema es

$$L = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{y}^2 - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A},$$

con

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}, \quad \mathbf{A} = -\frac{By}{2}\mathbf{i} + \frac{Bx}{2}\mathbf{j},$$

y  $-e$  es la carga del electrón. Demuéstrese que sólo es posible hallar una solución

físicamente significativa (en la cual la energía se conserva) de las ecuaciones simultáneas de la forma  $e^{i\omega t}$  para

$$\omega = \omega_c = \pm \frac{eB}{\sqrt{m_1 m_2}},$$

donde  $\omega_c$  se llama frecuencia del ciclotrón.

6-18. Establecer y resolver las ecuaciones del movimiento plano de un electrón con masa tensorial (problema 6-16) bajo la acción de un campo magnético uniforme perpendicular al plano de su movimiento y un campo eléctrico sinusoidal dirigido a lo largo del eje  $x$  de dicho plano.

6-19. Considérese el problema tridimensional de un electrón que se mueve en un cristal sometido a un campo magnético que está en el plano  $xz$  formando un ángulo  $\theta$  con el eje  $z$ , la energía cinética del electrón en el cristal está dada por

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{z}^2.$$

Comprobar que sólo se puede obtener una solución con sentido físico de la forma  $e^{i\omega t}$  si

$$\omega = \frac{eB}{m^*},$$

donde la masa efectiva,  $m^*$ , está dada por

$$\left(\frac{1}{m^*}\right)^2 = \frac{\cos^2 \theta}{m_1^2} + \frac{\sin^2 \theta}{m_1 m_2}.$$

6-20. Una partícula cargada se mueve en un campo eléctrico y otro magnético, y está sometida a una fuerza amortiguadora proporcional a la primera potencia de la velocidad. Demostrar que la densidad de la corriente de estado estacionario,

$$\mathbf{J} = N e \mathbf{v},$$

está relacionada linealmente al campo  $\mathbf{E}$  por la expresión

$$[\mathbf{J}] = \boldsymbol{\sigma} [\mathbf{E}],$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el operador de conductividad tensorial de corriente continua. Obtener la expresión para los elementos de la representación matricial de la conductividad tensorial.

6-21. Repítase el problema 6-20 para el campo eléctrico complejo de corriente alterna  $E = E_0 e^{i\omega t}$ .

6-22. Consideremos el movimiento de una partícula cargada dentro de un campo magnético uniforme y otro gravitacional uniforme ( $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ ) dirigido perpendicularmente al primero. Comprobar que las partículas cargadas positiva y negativamente tienen velocidades de desplazamiento directamente opuestas en una dirección perpendicular al plano de los dos campos.

6-23. Comprobar que la ecuación (6-123) se deduce de la (6-122). [Sugerencia: Recuérdese que  $L$  es función de  $x_i$  y  $\dot{x}_i$ , o de  $q_i$  y  $\dot{q}_i$ , y que el tiempo  $t$  se considera fijo en  $\partial L / \partial x_i$ , etc.]

## 7

## Movimiento en un campo de fuerzas centrales

El movimiento de una partícula en un campo de fuerzas centrales es uno de los problemas más importantes de la física puesto que en una primera aproximación, es el tipo de movimiento efectuado por los planetas con respecto al Sol, los satélites alrededor de los planetas, y el de dos partículas cargadas una con respecto a la otra.

### 7-1 Características generales del movimiento: solución formal

Dos de las características del movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza central han sido mencionadas ya en el capítulo anterior. Estas dos características son los dos teoremas de conservación: la conservación de la energía total y la conservación de la cantidad de movimiento angular orbital.

La energía total se conserva puesto que una fuerza central,

$$\mathbf{F} = f(r)\mathbf{e}_r = f(r) \left( \frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j} + \frac{z}{r}\mathbf{k} \right), \quad (7-1)$$

cuya magnitud es función de la distancia radial al centro de la fuerza, se puede expresar por el gradiente negativo de la función escalar  $U(r)$ ,

$$\mathbf{F} = -\nabla U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r, \quad (7-2)$$

donde  $f(r) = -\partial U / \partial r$ .

El rotacional del gradiente de una función escalar es nulo,

$$\nabla \times \nabla U = 0. \quad (7-3)$$

De aquí que  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ , lo que comprueba que una fuerza central cuya magnitud es función de la distancia al centro de fuerzas es una fuerza conservativa que cumple con el principio de conservación de la energía total.

El principio de conservación de la cantidad de movimiento angular orbital se deduce del hecho de que una fuerza central no ejerce ningún momento rotacional sobre la partícula. Para los problemas en que el momento rotacional,

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

es nulo, la cantidad de movimiento angular orbital es una constante del movimiento.

Debemos recordar al lector que estos teoremas de conservación se desprenden directamente de las ecuaciones de movimiento. No es, sin embargo, necesario atacar un problema para el que se verifican estos teoremas de conservación, empezando por las ecuaciones de movimiento, con lo que volveríamos invariablemente a deducir estos teoremas de conservación en la misma forma. El lector deberá adquirir el hábito de utilizar los teoremas de conservación, siempre que sean aplicables, con tanta confianza como emplea las ecuaciones de movimiento.

En el problema que consideramos, es posible hallar una solución formal utilizando los dos teoremas de conservación sin ningún empleo de las ecuaciones de movimiento.

Como una fuerza central es función de la distancia radial al centro de fuerzas, nos inclinaremos a utilizar coordenadas esféricas para el análisis cinemático del movimiento de la partícula. Sin embargo, el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular orbital,  $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ , nos dice que los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{v}$  son, en todo momento, perpendiculares al vector de cantidad de movimiento angular,  $\mathbf{L}$ . El movimiento en un campo de fuerzas centrales, se desarrolla, por lo tanto, en un plano determinado por los valores iniciales de los vectores de posición y de velocidad, que determinan también la dirección y sentido del vector de cantidad de movimiento angular. Si elegimos el sentido de  $\mathbf{L}$  como el positivo del eje  $z$ , entonces, el movimiento se desarrolla en el plano  $xy$ , en el que la descripción del movimiento en coordenadas esféricas es idéntica a su descripción en coordenadas cilíndricas.

La energía cinética para  $\theta = \pi/2$  se expresa por

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2, \quad (7-4)$$

y la energía total por

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + U(r), \quad (7-5)$$

donde  $r$  es la distancia radial al centro de fuerzas y  $\phi$ , el ángulo que el radio vector del plano  $xy$  forma con el eje fijo  $x$ .

La componente  $z$  de la cantidad de movimiento angular orbital, para esta elección del eje  $z$ , es la magnitud de la cantidad de movimiento angular orbital total. Tenemos, por consiguiente,

$$L_z = p_\phi = mr^2\dot{\phi} = h. \quad (7-6)$$

Despejando  $\dot{\phi}$  de la ecuación (7-6) e introduciendo la dependencia de  $\dot{\phi}$  con respecto a  $r$  en la ecuación (7-5), tenemos

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{h^2}{2mr^2} + U(r). \quad (7-7)$$

De esta ecuación puede despejarse  $\dot{r}$ , e integrándola después se tiene

$$\sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0) = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\pm \sqrt{E - U(r) - h^2/2mr^2}}. \quad (7-8)$$

Como el tiempo es una variable que crece continuamente, deberemos emplear la raíz cuadrada positiva cuando  $r$  crece y la negativa cuando  $r$  disminuye.

La ecuación (7-8) nos da formalmente  $t$  en función de  $r$  o, si se invierte,  $r$  en función del tiempo  $t$ . El conocimiento de  $r(t)$  nos permite luego, empleando la ecuación (7-6), obtener  $\phi(t)$ . De

$$d\phi = \frac{h}{mr^2} dt$$

obtenemos

$$\phi - \phi_0 = \int_{t_0}^t \frac{h dt}{mr^2(t)}. \quad (7-9)$$

En muchas aplicaciones no se desea conocer la dependencia de las coordenadas  $r$  y  $\phi$  con respecto al tiempo, sino que, en su lugar, se necesita conocer la órbita a partir de la dependencia de  $r$  respecto a  $\phi$ ; la cual se puede obtener directamente sin integrar primero las ecuaciones (7-8) y (7-9) y eliminar  $t$  entre ellas. Si recordamos que

$$dt = \frac{\sqrt{m/2} dr}{\pm \sqrt{E - U(r) - (h^2/2mr^2)}},$$

obtenemos

$$d\phi = \frac{h}{mr^2} dt = \pm \frac{h}{mr^2} \frac{\sqrt{m/2} dr}{\sqrt{E - U(r) - (h^2/2mr^2)}} \quad (7-10)$$

$$\begin{aligned} \phi - \phi_0 &= \int_{r_0}^r \frac{h(dr/r^2)}{\pm \sqrt{2m[E - U(r) - (h^2/2mr^2)]}} \\ &= \int_{u_0}^u \frac{h du}{\pm \sqrt{2m(E - U) - h^2u^2}}. \end{aligned} \quad (7-11)$$

En el último paso hemos hecho  $u = 1/r$ . Como  $u$  disminuye cuando  $r$  crece, y viceversa (mientras que para nuestra elección del eje  $z$  ( $h$  positiva),  $\phi$  siempre aumenta [ecuación (7-9)], tenemos que elegir el signo más para  $u$  decreciente y el menos para  $u$  creciente. La ecuación (7-11) nos da formalmente  $\phi$  en función de  $r$  o, cuando se invierte, la solución buscada,  $r$  en función de  $\phi$ .

Habiendo hallado  $r$  en función de  $\phi$ , podemos, si lo deseamos, proceder a encontrar la dependencia de  $t$  de las variables  $r$  y  $\phi$  a partir de

$$dt = \frac{mr^2(\phi) d\phi}{h}$$

$$t - t_0 = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{mr^2(\phi)}{h} d\phi. \quad (7-12)$$

Observaremos que la ecuación (7-10) puede ser escrita en la forma

$$U(r) = E - \frac{h^2}{2mr^2} - \frac{h^2}{2mr^4} \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = E - \frac{h^2}{2m} u^2 - \frac{h^2}{2m} \left( \frac{du}{d\phi} \right)^2, \quad (7-13)$$

que nos dice que, en general, podemos esperar obtener la dependencia de  $r$  de la función de la energía potencial a partir del conocimiento de la órbita,  $u = u(\phi)$ . Una excepción es el caso de una órbita circular, la cual es una órbita posible para muchas funciones de fuerza diferentes.

La energía potencial nos permite, a su vez, determinar la dependencia de  $r$  de la fuerza central por

$$f(r) = - \frac{dU(r)}{dr}.$$

En función de  $u$  encontramos que

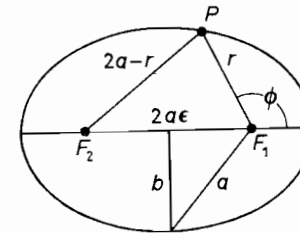
$$\begin{aligned} f(r) &= - \frac{dU\left(\frac{1}{u}\right) du}{du dr} = -u^2 \frac{d}{du} \left[ \frac{h^2 u^2}{2m} + \frac{h^2}{2m} \left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 \right] \\ &= - \frac{h^2}{m} u^3 - \frac{h^2}{m} u^2 \frac{d^2 u}{d\phi^2}, \end{aligned} \quad (7-14)$$

puesto que

$$\frac{d}{du} \left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 = \frac{d}{d\phi} \left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 \frac{d\phi}{du} = 2 \frac{d^2 u}{d\phi^2}.$$

La ecuación (7-14) se llama *ecuación diferencial de la órbita*.

Como ilustración, vamos a hallar la fuerza central bajo la cual una partícula se mueve en una órbita elíptica con el centro de fuerzas en uno de los focos de la órbita. Esta es la clase de órbita que siguen los planetas en su movimiento alrededor del Sol. (*Primera ley de Kepler del movimiento planetario*).



$$\begin{aligned} 4a^2 - 4ar + r^2 &= r^2 + 4a^2\epsilon^2 + 4a\epsilon r \cos \phi \\ r &= \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon \cos \phi} \end{aligned}$$

FIG. 7-1. Geometría de la elipse.

Recordemos que una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos, sus focos, es constante. Si esta constante es  $2a$ , entonces, para la elipse mostrada en la figura 7-1, con los focos sobre el eje  $x$ , el semieje mayor es  $a$  y las distancias apsidales (la más corta y la más larga a uno de los focos) son, respectivamente,  $a(1 - \epsilon)$  y  $a(1 + \epsilon)$ . El semieje menor está dado por

$$b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}.$$

La ecuación de la elipse en coordenadas polares se obtiene aplicando la ley de los cosenos al triángulo formado por el punto  $P$  y los dos focos. Se halla que

$$(2a - r)^2 = r^2 + (2a\epsilon)^2 + 2(2a\epsilon)r \cos \phi,$$

lo que nos da

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \phi},$$

o sea,

$$u = \frac{1 + \epsilon \cos \phi}{a(1 - \epsilon^2)}. \quad (7-15)$$

Esta última ecuación da

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{\epsilon^2 \operatorname{sen}^2 \phi}{a^2(1-\epsilon^2)^2} = \frac{\epsilon^2(1-\cos^2 \phi)}{a^2(1-\epsilon^2)^2},$$

por lo que, de la ecuación (7-13), obtenemos

$$U\left(\frac{1}{u}\right) = E - \frac{h^2}{2m} \left[ \frac{(1 + \epsilon \cos \phi)^2 + \epsilon^2(1 - \cos^2 \phi)}{a^2(1 - \epsilon^2)^2} \right] \\ = E + \frac{h^2}{2m} \left[ \frac{1}{a^2(1 - \epsilon^2)} - \frac{2u}{a(1 - \epsilon^2)} \right]. \quad (7-16)$$

Con  $U(1/u) = U(r)$  hallamos la magnitud de la fuerza central

$$f(r) = -\frac{dU}{dr} = -\frac{h^2}{ma(1-\epsilon^2)} \frac{1}{r^2}. \quad (7-17)$$

Esta es, en esencia, la *ley de la gravitación universal de Newton*, que indica que la fuerza gravitacional con que se atraen mutuamente dos cuerpos, varía inversamente al cuadrado de la distancia que los separa.

Como veremos en las secciones siguientes, una órbita elíptica no es, por supuesto, la única órbita posible bajo la acción de una fuerza central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Observemos, además, que al tratar problemas atómicos en los que la órbita no se pueda observar directamente, deberemos buscar otras formas para probar la ley fundamental de la fuerza entre partículas atómicas. Esto se expondrá en la sección 7-8.

### 7-2 Características generales de las órbitas

En esta sección estudiaremos algunas de las características cualitativas comunes a las órbitas posibles de una partícula en un campo de fuerzas centrales.

Notemos que la ecuación (7-13), que expresa el principio de conservación de la energía total del movimiento bidimensional de una partícula en un campo de fuerza central, es, también, el teorema de conservación de la energía para el movimiento unidimensional de una partícula en el campo de la energía potencial efectiva

$$U_{\text{ef}}(r) = U(r) + \frac{h^2}{2mr^2}. \quad (7-18)$$

El movimiento radial de una partícula en un campo de fuerza central es, por tanto, esencialmente idéntico al movimiento unidimensional de una partícula en el campo de la energía potencial efectiva. La distinción entre

los dos es que, para el problema del campo de fuerza central la distancia radial al origen,  $r$ , se define como positiva,

$$r \geq 0.$$

Siguiendo nuestro estudio de la sección 4-7 para el movimiento unidimensional de una partícula, nos damos cuenta de que el movimiento en la dirección radial es similarmente acotado o sin acotar, o sea, limitado o ilimitado. Se considera ilimitado si

$$E \geq U_{\text{ef}} \quad (7-19)$$

para todo

$$r \geq r_{\text{máx}}$$

donde  $r_{\text{máx}}$  es la raíz real máxima de la ecuación

$$E = U_{\text{ef}}(r). \quad (7-20)$$

Por ejemplo, este es el caso en la región III de la figura 7-2.

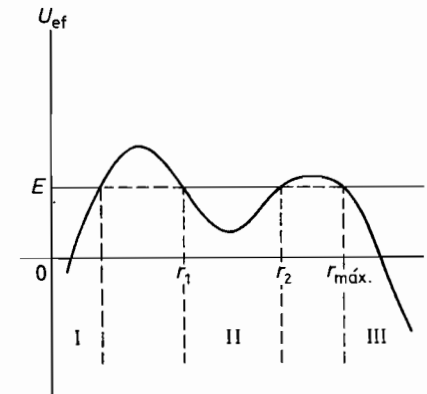


FIG. 7-2. Diagrama de energía-energía potencial efectiva.

Por el contrario, el movimiento es limitado si la partícula está situada inicialmente en un valor de  $r$  entre las dos raíces reales positivas  $r_1$  y  $r_2$ ,  $r_1 \leq r \leq r_2$ , de la ecuación (7-20) y la energía total satisface la relación

$$U_{\text{ef}}(r) \leq E = U_{\text{ef}}(r_1) = U_{\text{ef}}(r_2).$$

Este es el caso en la región II de la figura 7-2.

Si para uno u otro de los casos mencionados, la partícula se encuentra en una región físicamente accesible que incluye el origen, tal como la región I de la figura 7-2, entonces, se deduce que la partícula puede pasar por el origen. Pero si puede pasar por el origen, entonces su cantidad de movimiento angular tiene que ser necesariamente cero, a menos, por supuesto, que  $\dot{\phi}$  y, en consecuencia,  $v$  se hagan infinitas. Por consiguiente, no podemos

tratar el problema de una manera clásica siempre que la partícula pase por el origen o se acerque excesivamente a éste. Por ejemplo, consideremos una partícula que se mueve en un campo de fuerzas de atracción que tiene una singularidad en el origen tal que, para pequeños valores de  $r$ , la energía potencial efectiva llegue a ser también negativamente infinita,

$$U(r) + \frac{h^2}{2mr^2} \rightarrow -\infty.$$

Tal partícula adquirirá necesariamente una velocidad muy grande al acercarse al origen. Por esta única razón, excluirémos a tal movimiento de importantes consideraciones clásicas, pues las partículas que se mueven a altas velocidades requieren un análisis relativista de su movimiento. No obstante, encontramos que una descripción relativista clásica es, también, insuficiente. Las partículas altamente energéticas, radian energía y esta radiación que deberá incluirse de alguna manera en el problema, no puede ser tratada clásicamente. Por último, las energías potenciales que tienen singularidades en el origen, producen una fuerza que actúa sobre la partícula y puede variar considerablemente sobre las dimensiones del cuerpo en que actúa. Los cuerpos que se mueven en tales campos que varían rápidamente, no pueden ser tratados como partículas puntuales.

Aun los cuerpos de dimensiones atómicas, que podemos ser tentados a tratarlos como partículas en todo momento, encontramos que no pueden suponerse como tales si el campo de fuerzas que actúa sobre ellos varía considerablemente sobre sus dimensiones. Esta situación ocurre cuando los cuerpos se encuentran muy cerca uno del otro. La mecánica clásica se ha visto que realmente es inadecuada para la descripción de problemas atómicos en los que debiera emplearse la mecánica cuántica.

Por lo tanto, habrá de tenerse mucho cuidado al interpretar una descripción clásica de tal problema. En general, no la consideraremos en absoluto.

Si el movimiento es acotado o limitado, la partícula estará confinada a la región limitada por los dos valores radiales  $r_1$  y  $r_2$ , los puntos de retorno en el problema unidimensional equivalente. Para estos valores radiales apsidales, la componente radial de la velocidad se anula y la partícula se mueve en esos puntos tangencialmente a las circunferencias de radios  $r_1$  y  $r_2$  que limitan la región en que se confina su movimiento.

Puesto que un cambio de la componente radial de la velocidad en un punto originará que la partícula retorne en su movimiento radial quedando, sin embargo, la misma velocidad angular,

$$\dot{\phi} = \frac{h}{mr^2} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\phi}{r},$$

se deduce que las órbitas serán simétricas con respecto a los vectores de posición de los puntos de retorno (fig. 7-3).

El movimiento ilimitado, o no acotado, de una partícula en un campo de fuerzas centrales, como no tiene más que un punto de retorno, tendrá

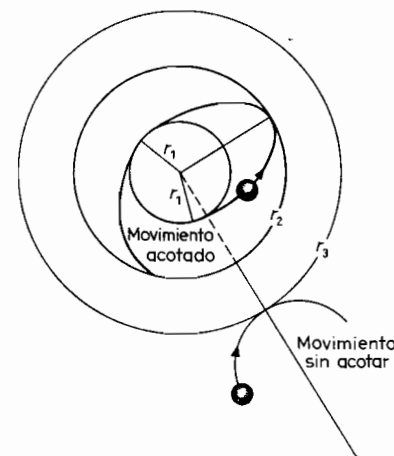


FIG. 7-3. Ilustración de la simetría de las órbitas respecto a los puntos de retorno.

únicamente un eje de simetría, mientras que el movimiento limitado puede tener tanto un número finito como un número infinito de ejes de simetría, según que la órbita sea cerrada o no. En la figura 7-4, indicamos algunos casos especiales en que la órbita tiene 1, 2 o 3 ejes de simetría. Si la órbita es cerrada, lo que ocurre siempre que el ángulo  $\psi$  entre dos ejes de simetría sucesivos satisfagan la ecuación

$$n\psi = 2m\pi, \quad n, m \text{ enteros,}$$

existe entonces un número finito de ejes de simetría. Cuando esta condición no se satisface, el movimiento no se repetirá. Tal movimiento aperiódico tendrá un número infinito de ejes de simetría.

En los problemas con órbitas cerradas podemos hablar del área de la órbita cerrada y de un período del movimiento. El período del movimiento,  $\tau$ , el tiempo para que la partícula complete una órbita cerrada, se puede hallar con la ecuación (7-6).

Dentro de los infinitesimales de primer orden, el área infinitesimal barrida por el vector radial (fig. 7-5) está dada por

$$\Delta A = \frac{1}{2} r(r + \Delta r) \Delta \phi = \frac{1}{2} r^2 \Delta \phi = \frac{h}{2m} \Delta t. \quad (7-21)$$



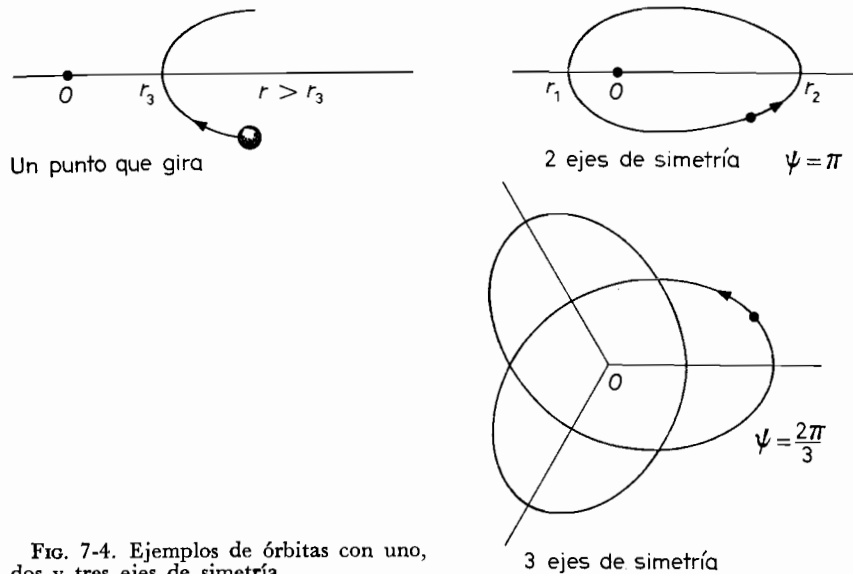


FIG. 7-4. Ejemplos de órbitas con uno, dos y tres ejes de simetría.

Por tanto, obtenemos, para el período del movimiento, la relación

$$\tau = \int \frac{2m \, dA}{h} = \frac{2mA}{h} \tag{7-22}$$

La ecuación (7-21) nos dice que la velocidad areolar, o sea, el área barrida en la unidad de tiempo por el vector de posición, es constante

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2m}$$

Esta es la *segunda ley de Kepler del movimiento planetario*.

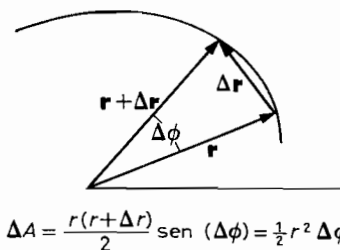


FIG. 7-5. Area barrida por el vector radial.

### 7-3 Estabilidad de las órbitas circulares

Las órbitas circulares son posibles siempre que la energía potencial efectiva

$$U_{\text{ef}}(r) = U(r) + \frac{h^2}{2mr^2}$$

tenga un máximo o un mínimo. De nuestro análisis del movimiento unidimensional de una partícula en un campo de energía potencial, resulta claro que una órbita circular será estable si su valor radial nos da un valor mínimo para la energía potencial efectiva. Será inestable, si nos da un máximo.

En una órbita circular debemos tener, por supuesto,

$$\frac{dU_{\text{ef}}}{dr} = \frac{dU}{dr} - \frac{h^2}{mr^3} = 0$$

o

$$f(r) = -\frac{h^2}{mr^3} = -mr\dot{\phi}^2 \tag{7-23}$$

Esta es la ecuación radial de movimiento, que nos dice que, para una partícula que se mueve en una órbita circular, la fuerza debe ser igual a la masa multiplicada por la aceleración centrípeta.

Si provocamos una perturbación en una órbita circular, entonces, si la perturbación es pequeña es probable que el movimiento radial efectúe oscilaciones armónicas simples a un lado y otro del valor radial de la órbita circular estable. La frecuencia de esta oscilación, tanto en éste como en el problema unidimensional equivalente, dependerá del valor de la segunda derivada de la energía potencial efectiva, calculado para el valor radial de la órbita circular estable. Concretamente,

$$m \left( \frac{2\pi}{\tau} \right)^2 = \frac{d^2U_{\text{ef}}}{dr^2}$$

o sea,

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{d^2U_{\text{ef}}/dr^2}} \tag{7-24}$$

El problema de órbitas circulares estables o, en general, de órbitas estables, tiene un interés más que académico. Es un problema que invariablemente ha de considerarse en el proyecto de instrumentos en que intervenga el movimiento de partículas cargadas. Como ilustración, consideremos el movimiento de partículas de carga  $e$  entre las placas de un condensador

(fig. 7-6). El campo eléctrico entre sus placas varía inversamente con la distancia  $r$  medida desde el eje del condensador

$$\mathbf{E} = + \frac{k}{r} \mathbf{e}_r. \quad (7-25)$$

El sentido del campo eléctrico es tal que produce una fuerza  $\mathbf{F} = e\mathbf{E} = (-\alpha/r)\mathbf{e}_r$  sobre la partícula dirigida hacia el eje del condensador; esto es  $\alpha > 0$ .

Una partícula cargada que entra a la región entre las placas del condensador en el punto  $P_1$  (fig. 7-6), perpendicularmente al radio en ese punto, se moverá en una circunferencia de radio  $r$  si la fuerza radial satisface la ecuación

$$-f(r) = \frac{\alpha}{r} = mr\dot{\phi}^2; \quad \text{siendo} \quad \alpha = ek,$$

de donde, obtenemos la relación

$$T = \frac{1}{2}m(r\dot{\phi})^2 = \frac{1}{2}\alpha \quad (7-26)$$

para la energía cinética de la partícula.

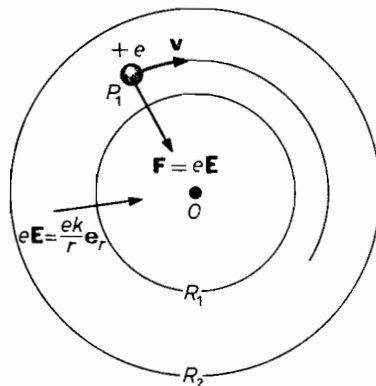


FIG. 7-6. Movimiento sobre una órbita circular en un campo eléctrico radial.

Cualquier partícula cargada en igual forma con una energía ligeramente diferente, no seguirá, por supuesto, la misma órbita circular. Un sector de un condensador cilíndrico puede ser, por lo tanto, utilizado como un filtro de energía, es decir, un aparato que es capaz de seleccionar, de entre una multitud de partículas, aquellas que tengan una energía determinada.

En principio, esto parece muy sencillo. En la práctica, no obstante, no es posible tener todas las partículas que entren en el campo magnético moviéndose en la misma dirección o con la misma energía. La mayoría de ellas se desviarán un ligero ángulo de la dirección ideal y tendrán una energía algo distinta de la deseada. Naturalmente, cualquier partícula con esta condición no pasaría por el filtro ideal. Este, por consiguiente, no es muy práctico, puesto que la intensidad de las partículas que pasen por él será muy pequeña. Sin embargo, por medio de una selección apropiada de la ranura de salida, podremos aumentar dicha intensidad, al permitir que las partículas que entren en la ranura en el punto  $P_1$  con un ángulo ligeramente distinto de la dirección ideal puedan salir también.

Que esto es posible se deduce del hecho de que la órbita circular para este problema es estable. Todas las partículas cuyo vector de velocidad forma un pequeño ángulo con la dirección ideal oscilarán a un lado u otro de la órbita circular estable y la cruzarán un corto tiempo después (fig. 7-7). En una primera aproximación, este cruce ocurrirá en el mismo

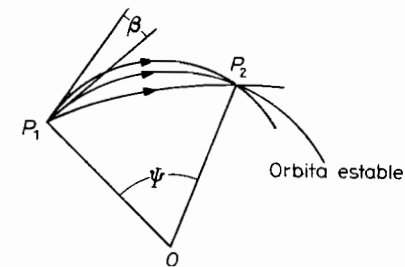


FIG. 7-7. Movimiento respecto a una órbita circular estable.

tiempo y en el mismo punto para todas las partículas cuya dirección de entrada forme cierto ángulo pequeño  $\beta$  con la dirección ideal. Eligiendo la ranura de salida en el punto de cruce podemos aumentar la intensidad del haz de partículas salientes. Las anchuras de las ranuras de entrada y de salida controlarán la incertidumbre en la energía y la dirección de las partículas salientes.

Procederemos a hallar el ángulo,  $\Psi$ , en que deberá situarse la ranura de salida. Este es el ángulo que el vector de posición del punto  $P_2$ , al que se enfocarán las partículas que entran en  $P_1$ , con una ligera divergencia, forma con el vector de posición del punto de entrada  $P_1$ .

Para hallar  $\Psi$  necesitaremos el tiempo que tardan las partículas en ir desde el punto  $P_1$  al  $P_2$ . Este tiempo es igual a la mitad del período del movimiento oscilatorio a un lado y otro de la órbita circular estable y, por tanto, está dado por

$$t = \frac{1}{2}\tau = \pi \sqrt{\frac{m}{d^2 U_{ef}/dr^2}}. \quad (7-27)$$

Para la energía potencial efectiva que tienen las partículas entre las placas

$$\frac{dU_{ef}}{dr} = \frac{\alpha}{r} - \frac{h^2}{mr^3}$$

y

$$\frac{d^2 U_{ef}}{dr^2} = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{3h^2}{mr^4}. \quad (7-28)$$

Por la ecuación (7-26) tenemos

$$\frac{h^2}{mr^4} = \frac{(mr\dot{\phi})^2 r^2}{mr^4} = \frac{\alpha}{r^2},$$

de donde obtenemos

$$\frac{d^2 U_{ef}}{dr^2} = \frac{2\alpha}{r^2} = \frac{2mv^2}{r^2}, \quad (7-29)$$

y, en consecuencia, por la ecuación (7-27)

$$t = \pi \sqrt{\frac{r^2}{2v^2}} = \frac{\pi r}{\sqrt{2}v}. \quad (7-30)$$

En este tiempo, las partículas recorren en la órbita circular una distancia

$$d = vt = \pi r / \sqrt{2}.$$

Por lo que el punto  $P_2$  se encuentra en un ángulo

$$\Psi = \frac{d}{r} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{radianes} \quad (7-31)$$

con respecto al punto  $P_1$ .

#### 7-4 Ley de Newton para órbitas giratorias

Observaremos que la energía potencial efectiva para el movimiento radial de una partícula en un campo de fuerzas centrales,

$$U_{ef}(r) = U(r) + \frac{h^2}{2mr^2},$$

es también la energía potencial efectiva para el movimiento en campo de fuerzas centrales de una partícula de masa  $m$  en el campo de energía potencial,

$$U'(r) = U(r) + \frac{\kappa}{2mr^2},$$

que tiene una cantidad de movimiento angular orbital  $h'$ , tal que

$$h'^2 = h^2 - \kappa. \quad (7-32)$$

La solución radial del último problema se halla a partir del teorema de conservación de la energía,

$$E = U(r) + \frac{\kappa}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{h'^2}{2mr^2}, \quad (7-33)$$

y de la cantidad de movimiento angular,

$$mr^2\dot{\phi}' = h', \quad (7-34)$$

donde  $\phi'$  es el ángulo variable para este último problema. Mientras que \*

$$h'^2 + \kappa > 0, \quad (7-35)$$

esta solución radial en función del tiempo es igual a la solución radial para una partícula que tiene una cantidad de movimiento angular orbital  $h$  al moverse en el campo de energía potencial  $U(r)$ .

Las soluciones en función de los ángulos variables  $\phi$  y  $\phi'$  no serán iguales. Esto se deduce del hecho de que

$$d\phi' = \frac{h' dt}{mr^2} = \frac{h'}{h} \frac{h dt}{mr^2} = \frac{h'}{h} d\phi$$

y de que  $r(t)$  es la misma en los dos problemas. Por consiguiente, hemos hallado que

$$d\phi' = \frac{h'}{h} d\phi$$

o sea,

$$\phi' = \frac{h'}{h} \phi. \quad (7-36)$$

Si la ecuación de la órbita de la partícula que se mueve en el campo de energía potencial  $U(r)$  con la cantidad de movimiento angular orbital  $h$ , es

$$r = r(\phi),$$

entonces para la partícula que se mueve en el campo de energía potencial

$$U(r) + \frac{\kappa}{2mr^2}$$

con una cantidad de movimiento angular orbital  $h'$ , donde  $h'^2 = h^2 - \kappa$ , la ecuación de la órbita estará dada por

$$r = r\left(\frac{h\phi'}{h'}\right) = r\left[\frac{\sqrt{\kappa + h'^2}}{h'}\phi'\right]. \quad (7-37)$$

Lo cual se puede ver comparando las ecuaciones (7-13) para las dos órbitas, o sea:

\* Matemáticamente esta restricción no es necesaria, pues  $h$  y  $h'$  pueden ser imaginarias.

$$\frac{du}{d\phi} = \pm \frac{1}{h} \sqrt{2m \left[ E - U(u) + \frac{h^2}{2m} u^2 \right]}$$

y

$$\frac{du}{d\phi'} = \pm \frac{1}{h'} \sqrt{2m \left[ E - U(u) + \frac{h^2}{2m} u^2 \right]}$$

Como ejemplo, consideremos la órbita elíptica que vimos que podía seguir una partícula en un campo de fuerzas que varían con el inverso del cuadrado de la distancia. Si el movimiento de esta partícula fuera a tener lugar bajo la acción adicional de un campo central de fuerzas que varían con el inverso del cubo de la distancia radial, entonces, la ecuación de la órbita de una partícula que tenga la cantidad de movimiento angular  $h'$  estaría dada por

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos [(\sqrt{\kappa} + h'^2/h')\phi]} \quad (7-38)$$

Esta órbita con respecto a un sistema de coordenadas que en el instante o tiempo  $t$  está girando con una velocidad angular

$$\omega = \lambda\phi'k, \quad (7-39)$$

donde

$$\lambda = 1 - \frac{\sqrt{\kappa + h'^2}}{h'}, \quad (7-40)$$

y con respecto al cual el movimiento de la partícula está descrito en función de las coordenadas polares  $r$  y  $\theta$ , es la misma que seguiría la partícula bajo la acción de únicamente la ley de la fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}; \quad (7-41)$$

de aquí el título de *órbitas giratorias*.

### 7-5 Movimiento en un campo de fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia

El movimiento de una partícula en un campo de fuerzas que varían con el inverso del cuadrado de la distancia, es el más importante de los problemas sobre campos de fuerzas centrales. La fuerza gravitacional entre cuerpos y la fuerza eléctrica entre partículas cargadas son ejemplos de este tipo. Mientras que la fuerza gravitacional es, siempre, de atracción; la fuerza eléctrica puede ser tanto de atracción como de repulsión, según sean las cargas de las partículas que actúan entre sí.

Antes de proseguir para hallar la ecuación de la órbita de una partícula que se mueve en un campo de fuerzas inversamente proporcionales al cua-

drado de la distancia, investigaremos cualitativamente las órbitas posibles de tal movimiento.

Para una fuerza de repulsión, la energía potencial efectiva del problema unidimensional equivalente está dada por

$$U_{ef} = U(r) + \frac{h^2}{2mr^2} = -\frac{k}{r} + \frac{h^2}{2mr^2}, \quad k < 0. \quad (7-42)$$

Una gráfica de  $U_{ef}(r)$  en función de  $r$  (fig. 7-8) nos muestra que sólo existe un punto de retorno  $r = r_1$ , en el cual  $E = U_{ef}(r)$ . El movimiento para todos los valores posibles de la energía total, que para la energía potencial efectiva anterior se define positivo, no está, por tanto, limitado. Por consiguiente, la órbita sólo tiene un eje de simetría que pasa por el punto de aproximación máxima  $r = r_1$  (fig. 7-9). Para valores grandes

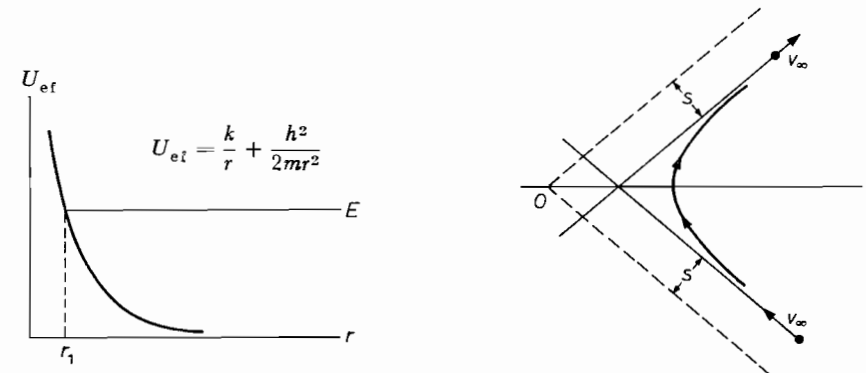


FIG. 7-8. Energía potencial efectiva para una fuerza de repulsión que varía con el inverso del cuadrado de la distancia.

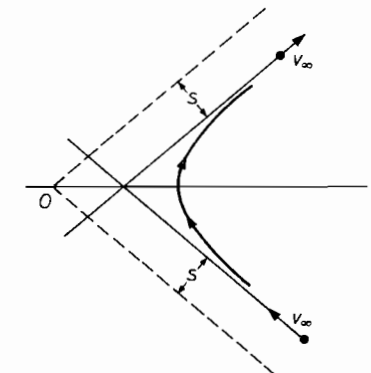


FIG. 7-9. Órbita hiperbólica en un campo de fuerzas de repulsión que varían con el inverso del cuadrado de la distancia.

de  $r$ , en los que la magnitud de la fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia se aproxima a cero, la órbita se aproximará asíntoticamente a una recta cuya distancia  $s$  desde el centro de la fuerza está dada por

$$mv_{\infty}s = h, \quad (7-43)$$

que expresa la conservación de la cantidad de movimiento angular orbital, siendo  $v_{\infty}$  la velocidad de la partícula para valores grandes de  $r$ . Por la conservación de la energía,  $v_{\infty}$  está dada por

$$\frac{1}{2}mv_{\infty}^2 = E. \quad (7-44)$$

Si la fuerza central proporcional al inverso del cuadrado es de atracción, la energía potencial efectiva será

$$U_{ef}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h^2}{2mr^2}, \quad k > 0. \quad (7-45)$$

Una gráfica de esta función de la energía potencial efectiva (fig. 7-10) revela que el movimiento es ilimitado para todos los valores positivos de la energía,  $E \geq 0$ , y es limitado para valores negativos de la energía total,

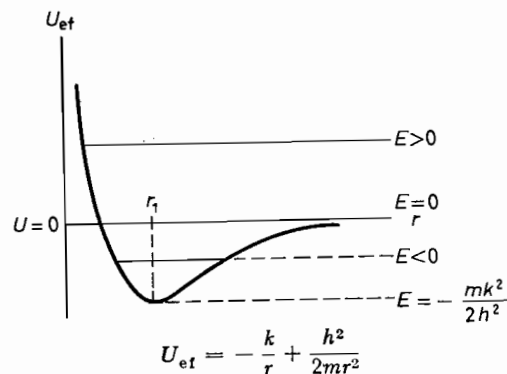


FIG. 7-10. Energía potencial efectiva para una fuerza de atracción que varía con el inverso del cuadrado de la distancia.

$E < 0$ . Para el mínimo de la energía total que puede tener la partícula, el movimiento sigue una órbita circular. El valor de la energía total para el que sucede esto está dado por

$$E_{\text{mín}} = [U_{ef}(r)]_{\text{mín}} = U_{ef}(r_1),$$

donde  $r_1$  es el valor de  $r$  en que la energía potencial efectiva tiene un mínimo. Encontramos que  $r_1$  es la raíz de la ecuación

$$\frac{dU_{ef}}{dr} = 0 = \frac{k}{r^2} - \frac{h^2}{mr^3}. \quad (7-46)$$

Esto es,

$$r_1 = \frac{h^2}{mk}, \quad (7-47)$$

lo que da, para el mínimo de energía admitida,

$$E_{\text{mín}} = U_{ef}\left(\frac{h^2}{mk}\right) = -\frac{mk^2}{2h^2}. \quad (7-48)$$

Vamos ahora a demostrar que las órbitas que puede seguir una partícula bajo la acción de una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia son secciones cónicas.

Concretamente, hallaremos que la órbita para una fuerza de atracción es:

una hipérbola para  $E > 0$ ,

una parábola para  $E = 0$ ,

una elipse para  $-\frac{mk^2}{2h^2} \leq E < 0$ .

Estos resultados se pueden obtener de la solución del problema dada por la ecuación (7-11). Para la fuerza proporcional al inverso del cuadrado de la distancia para la que  $U(r) = -k/r$ , la ecuación (7-11) se convierte en

$$\begin{aligned} \phi - \phi_0 &= \int_{u_0}^u \frac{h \, du}{\pm \sqrt{2m(E + ku) - h^2u^2}} \\ &= \int_{u_0}^u \frac{du}{\pm \sqrt{(mke/h^2)^2 - [u - (mk/h^2)]^2}}, \end{aligned} \quad (7-49)$$

donde hemos hecho

$$\left(\frac{mke}{h^2}\right)^2 = \frac{2mE}{h^2} + \frac{m^2k^2}{h^4}. \quad (7-50)$$

Ahora hacemos la sustitución normal para simplificar el integrando, estableciendo

$$u - \frac{mk}{h^2} = +\frac{mke}{h^2} \cos \theta \quad \text{y} \quad du = -\frac{mke}{h^2} \sin \theta \, d\theta.$$

Veremos que con una elección adecuada de  $\theta_0$  (sección 4-9)  $\theta$  aumentará continuamente al crecer  $\phi$ . Entonces, con esta sustitución, la ecuación (7-49) se reduce a

$$\phi - \phi_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \theta - \theta_0$$

o

$$\cos^{-1} \left[ \frac{h^2}{mke} \left( u - \frac{mk}{h^2} \right) \right] = \phi - \phi_0 + \theta_0.$$

Despejando  $u$  tenemos

$$u = \frac{mk}{h^2} [1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0 + \theta_0)], \quad (7-51)$$

donde  $\epsilon$  se definió en la ecuación (7-50) por

$$\epsilon = \sqrt{1 + (2Eh^2/mk^2)}. \quad (7-52)$$

Si preferimos medir  $\phi$  desde un eje de simetría, en cuyo caso  $r(\phi) = r(-\phi)$ , entonces, obviamente debemos tener  $\phi_0 = \theta_0$  de tal forma que

$$u = \frac{mk}{h^2} (1 + \epsilon \cos \phi)$$

$$r = \frac{h^2/mk}{1 + \epsilon \cos \phi} \quad (7-53)$$

La ecuación (7-53) es la general de una cónica \* en coordenadas cilíndricas.

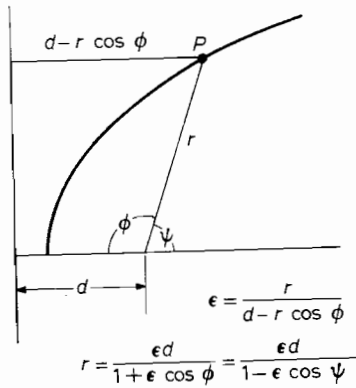


FIG. 7-11. Representación geométrica de una sección cónica.

Si la excentricidad  $\epsilon > 1$ , que se presenta cuando  $E > 0$ , la órbita es una hipérbola. Si  $\epsilon = 1$  o  $E = 0$ , la órbita es una parábola, mientras que para

$$0 < \epsilon < 1 \quad \text{o} \quad -mk^2/2h^2 < E < 0,$$

la órbita es una elipse. Cuando  $E = -mk^2/2h^2$ ,  $\epsilon = 0$  y la órbita, como vimos anteriormente, es una circunferencia.

### 7-6 Movimiento limitado: tercera ley de Kepler del movimiento planetario

El hecho de que las órbitas del movimiento limitado de los planetas alrededor del Sol sean elipses y que el radio vector barra áreas iguales en

\* Una sección cónica es el lugar geométrico de todos los puntos cuya relación de sus distancias a una recta y a un punto fijo es constante. En la figura 7-11 podemos ver que esta definición da

$$\epsilon = \frac{r}{d - r \cos \phi} \quad \text{o} \quad r = \frac{\epsilon d}{1 + \epsilon \cos \phi},$$

según la definición del ángulo  $\phi$ .

tiempos iguales fue deducido por Kepler observando el movimiento de los planetas. También enunció una tercera ley del movimiento planetario, que demostraremos que es satisfecha para una partícula que se mueve en una órbita elíptica bajo la acción de un campo de fuerzas centrales proporcionales al inverso del cuadrado de la distancia.

La *tercera ley de Kepler* nos dice que el período del movimiento es proporcional al semieje mayor elevado a la potencia 3/2.

El semieje mayor de una elipse es la media aritmética de los desplazamientos mínimo y máximo de la partícula desde el centro de las fuerzas (fig. 7-12):

$$a = \frac{1}{2}(\tau_{\text{mín}} + \tau_{\text{máx}}).$$

De la ecuación (7-53) de la elipse, vemos que el semieje mayor se puede expresar por

$$a = \frac{h^2}{2mk} \left( \frac{1}{1 + \epsilon} + \frac{1}{1 - \epsilon} \right) = \frac{h^2}{mk} \frac{1}{1 - \epsilon^2}. \quad (7-54)$$

El período del movimiento para una órbita cerrada en un campo de fuerzas centrales se determinó, en la sección 7-2, que está dado por  $\tau = 2\pi A/h$ . Como el área de una elipse es  $A = \pi ab$ , donde el semieje mayor  $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$  (fig. 7-1), se halla con la ecuación (7-54) que realmente

$$\tau = \frac{2\pi m}{h} a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{2\pi m a^2}{h} \sqrt{\frac{h^2}{mka}} = \frac{2\pi m^{1/2}}{k^{1/2}} a^{3/2}. \quad (7-55)$$

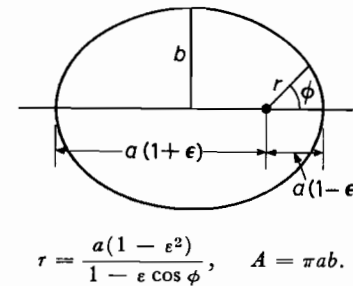


FIG. 7-12. Representación geométrica de una órbita elíptica.

### 7-7 El teorema virial

Otro resultado muy útil para el movimiento limitado de una partícula que sigue la ley del inverso de los cuadrados, es el hecho de que la magnitud de la energía potencial media es el doble de la energía cinética media.

Existen diferentes maneras de demostrar esto. En este caso, lo haremos determinando los promedios. Por la ecuación (7-13), la energía cinética se expresa por

$$T = E - U = \frac{h^2}{2mr^2} \left[ 1 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 \right] = \frac{h^2}{2m} \left[ u^2 + \left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 \right], \quad (7-56)$$

o bien, empleando la ecuación (7-53), por

$$T = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{mk}{h^2} \right)^2 [(1 - \epsilon \cos \phi)^2 + \epsilon^2 \sin^2 \phi]. \quad (7-57)$$

La energía cinética media  $\langle T \rangle$  está dada por la ecuación

$$\langle T \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau T dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{2\pi} T \frac{dt}{d\phi} d\phi. \quad (7-58)$$

Luego, como

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{dt/d\phi} = \frac{hu^2}{m},$$

se sigue que

$$\langle T \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{2\pi} \frac{mT}{hu^2} d\phi = \frac{h}{2\tau} \int_0^{2\pi} \left[ 1 + \frac{\epsilon^2 \sin^2 \phi}{(1 - \epsilon \cos \phi)^2} \right] d\phi.$$

Integrando por partes el segundo término tendremos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon^2 \sin^2 \phi}{(1 - \epsilon \cos \phi)^2} d\phi &= - \frac{\epsilon \sin \phi}{1 - \epsilon \cos \phi} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon \cos \phi}{1 - \epsilon \cos \phi} d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{1 - \epsilon \cos \phi} - 1 \right) d\phi. \end{aligned}$$

En consecuencia, hallamos que

$$\langle T \rangle = \frac{h}{2\tau} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1 - \epsilon \cos \phi} = \frac{h}{2\tau} \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}. \quad (7-59)$$

De la misma manera se halla la energía potencial media

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau U dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{2\pi} U \frac{dt}{d\phi} d\phi = - \frac{k}{\tau} \int_0^{2\pi} \frac{um}{hu^2} d\phi \\ &= - \frac{h}{\tau} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1 - \epsilon \cos \phi} = - \frac{h}{\tau} \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}. \end{aligned} \quad (7-60)$$

Comparando la ecuación (7-59) con la (7-60) comprobamos que

$$2\langle T \rangle = -\langle U \rangle. \quad (7-61)$$

Este resultado se obtiene también del teorema virial más general que re-

laciona las energías cinética y potencial medias del movimiento de una partícula en una región finita del espacio bajo la acción de una fuerza conservativa. La ecuación (7-61) es conocida como del teorema virial para la fuerza central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

### 7-8 Movimiento ilimitado: dispersión

Vimos en la sección 7-1 que es posible determinar la dependencia de la función de la energía potencial con respecto a la distancia radial,  $r$ , cuando se conoce la órbita seguida por una partícula que se mueve en dicho campo de fuerzas conservativas. Al igual que Newton, dedujimos la dependencia de la fuerza gravitacional de  $r$  a partir del conocimiento de las órbitas planetarias como, lo formuló Kepler.

Desafortunadamente, cuando tratamos con partículas atómicas, no podemos observar las órbitas. Por lo tanto, para tales partículas nos será imposible utilizar el método de las órbitas para determinar la ley de la fuerza. En lo referente a partículas atómicas se empleará otro método, *el de dispersión*, para probar la dependencia de la función de la energía potencial a la distancia de la partícula al centro de fuerzas o de dispersión.

En un experimento de dispersión, una partícula se dispara hacia otra partícula (que en este análisis se considerará fija), y se mide la desviación de la primera partícula o partícula proyectil. Estando inicialmente muy lejos (en el infinito) del centro de fuerzas esta partícula, seguirá, naturalmente, una órbita no limitada. En consecuencia, en algún tiempo o instante posterior, tomará en el punto  $r_{\text{mín}}$  de máxima cercanía al centro de fuerzas, una velocidad radial cero. El movimiento subsiguiente llevará la partícula lejos del centro de fuerza en una órbita sobre la cual tomará, finalmente, una velocidad cuya magnitud será igual a su magnitud inicial y cuya dirección formará un ángulo  $\theta$  con su dirección inicial de movimiento (fig. 7-13).

El ángulo  $\theta$  se llama *ángulo de dispersión* y como se ve en la figura 7-13, que muestra la órbita debida a una fuerza repulsiva, se puede expresar en función de la magnitud del ángulo  $\phi_0$  que forman los radios vectores inicial y final del centro de la fuerza con el eje de simetría. Esto es

$$\theta = \pi - 2\phi_0. \quad (7-62)$$

Se puede demostrar\* que un conocimiento de la dependencia del ángulo de dispersión,  $\theta$ , en función de la cantidad de movimiento angular,  $h$ , o *parámetro de choque*

\* Landau y Lifshitz, *Mechanics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1960, página 50, problema 7.

$$s = \frac{h}{mv_0}, \quad (7-63)$$

donde  $v_0$  es la velocidad inicial de la partícula proyectil, es suficiente para darnos la dependencia de la energía potencial como función de  $r$  para todos los valores de  $r > r_{\text{mín}}$ .

Un experimento de dispersión, requiere, por consiguiente, el disparo de partículas de la misma energía pero con diferentes valores del parámetro de choque en la partícula blanco. En cualquier experimento, estas par-

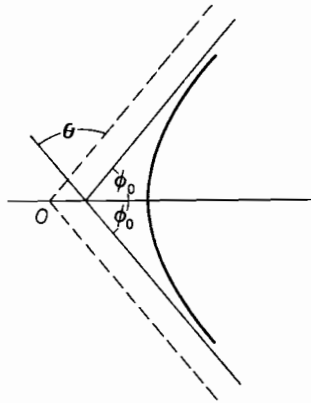


Fig. 7-13. Órbita hiperbólica en un campo de fuerzas de repulsión que varían con el inverso del cuadrado de la distancia.

tículas son disparadas simultáneamente hacia el blanco en forma de un haz de partículas, de intensidad  $I$  por unidad de área y por segundo, que han sido filtradas previamente para que tengan la misma energía cinética.

Cuando se realiza un experimento de dispersión con muchas partículas simultáneamente, no se mide directamente  $\theta$  en función de  $s$ , sino más bien la distribución de partículas dispersadas por unidad de ángulo sólido y por unidad de tiempo. Esta información está contenida en la cantidad  $\sigma(\theta, \varphi)$ , llamada *sección diferencial de la dispersión*. Se define por el número de partículas dispersadas por unidad de ángulo sólido y por unidad de tiempo en la dirección especificada por los ángulos esféricos  $\theta$  y  $\varphi$ , dividido por la intensidad  $I$  del haz incidente de partículas.

Para una fuerza central, la distribución, como se puede ver por consideraciones de simetría, no depende de  $\varphi$ . La distribución de partículas dispersas será, por tanto, la misma dentro de un anillo, o zona esférica de área

$$2\pi R^2 \text{sen } \theta \, d\theta$$

de una gran esfera de radio  $R$  cuyo centro se encuentre en el centro de dispersión (fig. 7-14).

Suponiendo que las partículas sigan órbitas estables, será probable que las partículas dispersas dentro de esta zona provengan de un anillo, o corona

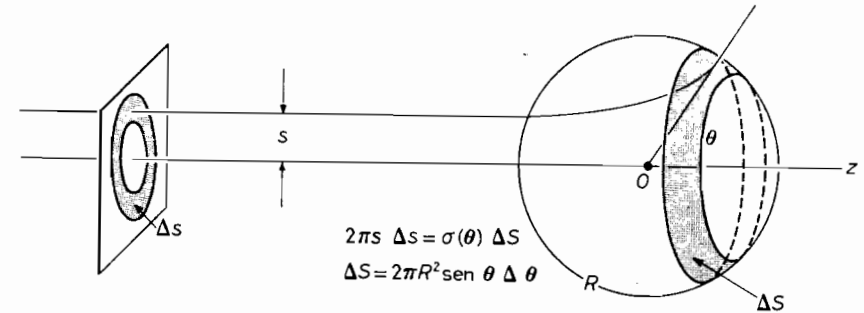


Fig. 7-14

circular, de radio  $s$  y ancho  $\Delta s$ , esto es, de un área  $2\pi s \Delta s$  del rayo o haz incidente. Por tanto, podemos poner

$$I(2\pi s \Delta s) = -I\sigma(\theta) \Delta\Omega$$

o sea,

$$\sigma(\theta) = -\frac{s}{\text{sen } \theta} \frac{ds}{d\theta}, \quad (7-64)$$

donde  $\Delta\Omega$ , el ángulo sólido subtendido por el área  $\Delta S$  en el origen, es

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S}{R^2} = \frac{2\pi R^2 \text{sen } \theta \, d\theta}{R^2}.$$

Se pone el signo menos porque  $\theta$  disminuye generalmente cuando  $s$  aumenta; esto es, cuanto más grande sea el parámetro de choque, menor será el ángulo en el cual se dispersan las partículas (fig. 7-15).

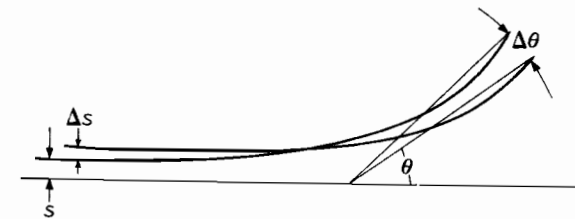


Fig. 7-15. Dos órbitas para valores ligeramente diferentes del parámetro de choque.



Estamos, por consiguiente, en principio, en posición de hallar el parámetro de choque,  $s$ , en función del ángulo de dispersión,  $\theta$ , midiendo  $\sigma(\theta)$ .

Notemos que, como se expuso anteriormente, para un potencial de atracción con una fuerte singularidad en el origen, las partículas con  $s = 0$  o  $h = 0$  no pueden ser tratadas en la forma clásica. Por tanto, no consideraremos tales fuerzas de atracción.

En la práctica, no se obtiene  $s$  en función de  $\theta$  partiendo de la sección diferencial de la dispersión medida, sino más bien se compara la sección diferencial de dispersión medida experimentalmente, con las secciones calculadas teóricamente para varias fuerzas centrales. Como ilustración, calcularemos la sección diferencial de la dispersión que es probable para partículas que se mueven sometidas a una fuerza central de repulsión inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Como las partículas incidentes, o que entran, tienen cierta energía cinética, la energía total se considera positiva y las órbitas resultantes son hipérbolas.

La ecuación de la órbita está dada por la (7-53), con la cual hallamos los valores del ángulo  $\phi_0$  para el que la partícula tendrá una distancia radial muy grande. Estos valores son las raíces de la ecuación

$$1 - \epsilon \cos \phi = 0;$$

esto es

$$\phi_0 = \cos^{-1} \left( \frac{1}{\epsilon} \right). \quad (7-65)$$

La relación entre el ángulo de dispersión y  $\phi_0$  se halló anteriormente que es

$$\theta = \pi - 2\phi_0.$$

Por consiguiente, se tiene que

$$\frac{1}{\epsilon} = \cos \phi_0 = \sin \frac{\theta}{2},$$

o bien, empleando la ecuación (7-52), que

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 2mv_0^2 E s^2}}. \quad (7-66)$$

Derivando esta última ecuación con respecto a  $\theta$  nos da

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{-2kmv_0^2 E s (ds/d\theta)}{(k^2 + 2mv_0^2 E s^2)^{3/2}}$$

o sea,

$$\frac{ds}{d\theta} = -\frac{k^2 \cos(\theta/2)}{4s mv_0^2 E} \epsilon^3.$$

Luego, por la ecuación (7-64) obtenemos la sección diferencial de la dispersión

$$\sigma(\theta) = \frac{k^2 \epsilon^3}{4mv_0^2 E} \frac{\cos(\theta/2)}{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} = \frac{k^2}{8mv_0^2 E} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (7-67)$$

Como en este problema  $E = \frac{1}{2}mv_0^2$ , este resultado se reduce a

$$\sigma(\theta) = \frac{k^2}{16E^2} \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}. \quad (7-68)$$

Este resultado para la sección diferencial de la dispersión, fue aplicado por Rutherford para interpretar sus experimentos sobre la dispersión de partículas  $\alpha$  por núcleos atómicos. Afortunadamente, la sección diferencial de la dispersión clásica de Rutherford que se da por (7-68) concuerda con el resultado de la mecánica cuántica para la misma sección. Así pues, Rutherford fue capaz de obtener la concordancia con sus experimentos y, por consiguiente, conclusiones correctas sobre la estructura del átomo y el tamaño de su núcleo (problema 7-13).

### Problemas

7-1. Una partícula sigue una órbita circular bajo la acción de una fuerza central de atracción que está dirigida hacia un punto de la circunferencia. Demuéstrese que la magnitud de la fuerza varía con el inverso de la quinta potencia de la distancia.

7-2. Hállense las fuerzas centrales bajo cuya acción una partícula seguirá las órbitas

$$a) r = a(1 + \cos \theta) \quad b) r = a \exp(b\theta) \quad c) \frac{1}{r} = A \cosh \alpha(\theta - \theta_0)$$

7-3. Una partícula se mueve bajo la acción de la fuerza central que se desprende de la función de energía potencial

$$U(r) = -\frac{k}{r} e^{-\alpha r}; \quad k, \alpha > 0.$$

Analizar cualitativamente la naturaleza de las órbitas e investigar la existencia de órbitas estables.

7-4. Investíguese el movimiento de una partícula de masa  $m$  en un campo de fuerzas de repulsión que varían con el inverso del cubo de la distancia.

7-5. Repetir el problema 7-4 para un campo de fuerzas de atracción que varían con el inverso del cubo de la distancia.

7-6. Hállense la sección diferencial de la dispersión  $\sigma(\theta)$  para el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas de repulsión inversamente proporcionales al cubo de la distancia. [Sugerencia: úsese la ley de Newton para órbitas giratorias.]

7-7. a) Obtener las condiciones de las  $k$  para las que serán estables las órbitas circulares correspondientes a los siguientes campos de fuerzas centrales.

- i)  $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$
- ii)  $U(r) = (k_1/r^2) + (k_2/r^4)$
- iii)  $U(r) = -a/r^k, a > 0$

b) Hállese el período de las pequeñas oscilaciones respecto a las órbitas circulares estables.

7-8. Hállese el alcance de un proyectil que tiene una velocidad inicial  $v_0$  en el plano ecuatorial, teniendo en cuenta la rotación de la Tierra. Considérese el problema a) en el marco de referencia de un sistema de coordenadas que gira con la Tierra y b) con respecto a un sistema de coordenadas estacionario fijo en el centro de la Tierra.

7-9. Una partícula se deja caer desde una altura  $h$  por encima de la Tierra, siendo  $h \ll R$ , el radio terrestre (fig. 7-16). Localizar el punto en que la partícula chocará con la Tierra. a) Considérese el problema con respecto a un sistema de coordenadas fijo, tratándolo como el movimiento de la partícula en un campo de fuerzas centrales. [Obsérvese que la velocidad relativa de la partícula con respecto a la Tierra era inicialmente cero.] b) Considérese el movimiento con respecto a un sistema de coordenadas que gira con la Tierra.

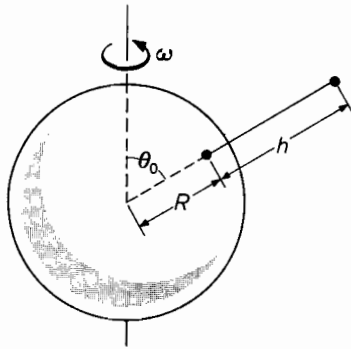


FIG. 7-16

7-10. Hállese la velocidad de escape de una partícula de la superficie de la Tierra, dado que la constante gravitacional es

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{n-m}^2}{\text{Kg}^2}.$$

7-11. Un pequeño satélite de masa  $m$ , despreciable en relación con la de la Tierra, se lanza con una velocidad  $v$  paralela a la superficie terrestre a una altura de 320 kilómetros. a) Calcúlese el valor de  $v$  necesario para poner el satélite en una órbita circular. b) ¿Cuál es la velocidad de escape del satélite?

Dado que el satélite es lanzado a una altura de 320 Km y, más tarde, se le observa a una altura de 1,000 Km cuando está más lejos de la superficie de la Tierra, calcúlese c) la excentricidad de su órbita, d) su velocidad de lanzamiento y e) la energía total del satélite en su órbita elíptica. Considérese que la masa de la Tierra es  $5.98 \times 10^{24}$  Kg; su radio,  $6.38 \times 10^6$  m, y la constante gravitacional,  $G$ , es  $6.67 \times 10^{-11}$  n-m<sup>2</sup>/Kg<sup>2</sup>.

7-12. Un satélite artificial se mueve en la órbita elíptica

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon \cos \phi}.$$

Hállese en función de  $r$  y  $\phi$ , el incremento mínimo de la velocidad del satélite que le permitirá escapar. ¿Para qué valores de  $r$  y  $\phi$  será mínima esta velocidad de escape?

7-13. a) Hállese la distancia de aproximación más corta de una partícula  $\alpha$  de masa  $m$  y velocidad inicial  $v_0$  a un núcleo de carga  $Ze$ . b) ¿Cuál es esta distancia de máximo acercamiento para una partícula  $\alpha$  de masa  $6 \times 10^{-27}$  Kg y velocidad  $v_0 = 1.6 \times 10^7$  m/seg que incide sobre un pan de oro ( $Z = 79$ )? [Tómese  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  coulombs,  $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \times 10^9$  n-m<sup>2</sup>/c<sup>2</sup>.]

7-14. Hállese la distancia de máximo acercamiento de una partícula en un campo de fuerza de repulsión inversamente proporcional al cuadrado de la distancia en función del ángulo de dispersión.

7-15. Considérese el movimiento de un péndulo simple en la superficie de la Tierra y, teniendo en cuenta la rotación de ésta, demuéstrese que el plano de oscilación del péndulo tiene un movimiento de precesión (péndulo de Foucault).

7-16. Un potencial de fuerza central encontrado frecuentemente en física nuclear es el llamado pozo rectangular definido por el potencial:

$$U(r) = \begin{cases} 0 & r > a, \\ -U_0 & r \leq a. \end{cases}$$

Demuéstrese que en la mecánica clásica la dispersión producida por tal potencial es idéntica a la refracción de los rayos luminosos por una esfera de radio  $a$  e índice relativo de refracción:

$$n = \sqrt{(E + U_0)/E}.$$

(Esta equivalencia demuestra por qué fue posible explicar los fenómenos de refracción tanto por las ondas de Huygens como por los corpúsculos mecánicos de Newton.) Demuéstrese también que la sección diferencial  $\sigma(\theta)$  está dada por

$$\sigma(\theta) = \frac{n^2 a^2}{4 \cos(\theta/2)} \frac{[n \cos(\theta/2) - 1][n - \cos(\theta/2)]}{[1 + n^2 - 2n \cos(\theta/2)]^2}.$$

¿Cuál es la sección total?

## Dinámica de un sistema de partículas

El problema general del movimiento de un sistema de partículas bajo la acción de fuerzas externas y de sus propias interacciones, es muy complicado. Generalmente, no se puede llegar a una solución analítica a menos que se simplifique suficientemente el problema con la introducción de restricciones o suposiciones adicionales.

Al tratar el movimiento de un sistema de partículas, es costumbre distinguir entre las fuerzas internas, que las propias partículas del sistema ejercen entre sí, y las fuerzas externas, debidas a la interacción de dicho sistema con otro u otros sistemas. Debe quedar perfectamente claro que la existencia de fuerzas externas implica la existencia de otras partículas que interactúan con las del sistema en consideración. El movimiento de estas otras partículas tiene que suponerse conocido para que se puedan especificar las fuerzas que ejercen sobre las del sistema considerado.

En un problema que trate del movimiento de un gran número de partículas, la labor necesaria para determinar el movimiento de cada partícula, aun suponiendo que dicho problema fuera soluble, es de tal naturaleza que nos incitaría a buscar las características medias o globales del movimiento.

En este capítulo y en los siguientes, estudiaremos los casos solubles de sistemas limitados de  $N$  partículas y los teoremas de conservación de los mismos bajo la acción de fuerzas externas determinadas. Comenzaremos con el estudio de un sistema de dos partículas, cuyo movimiento no restringido, o no sujeto a condiciones, puede resolverse a menudo.

### 8-1 El sistema de dos partículas: centro de masa y masa reducida

Suponiendo que las fuerzas internas que las partículas ejercen entre sí satisfagan la tercera ley del movimiento de Newton,\* es decir,  $\mathbf{F}_2^{\text{int}} = -\mathbf{F}_1^{\text{int}} = \mathbf{F}^{\text{int}}$ , las ecuaciones del movimiento de cada una de las dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  son, respectivamente,

$$\mathbf{F}_1^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{int}} = m_1 \mathbf{a}_1 \quad (8-1)$$

y

$$\mathbf{F}_2^{\text{ext}} + \mathbf{F}^{\text{int}} = m_2 \mathbf{a}_2, \quad (8-2)$$

donde  $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$  representa la fuerza externa que actúa sobre la  $i$ -ésima partícula.

Como en el caso de una sola partícula, es importante escoger adecuadamente las seis coordenadas en función de las cuales se ha de describir el movimiento del sistema de las dos partículas; y, en la mayoría de los casos, esta selección es sugerida por las fuerzas que actúan sobre éstas. Una elección apropiada será la que simplifique el trabajo matemático necesario para llegar a una solución.

Por ejemplo, en problemas en que cada partícula del sistema se mueva bajo la acción de una fuerza externa uniforme constante, podemos obtener tres ecuaciones de movimiento unidimensionales e independientes, empleando las tres coordenadas que describen la posición del punto que denominaremos *centro de masa*. El vector de posición  $\mathbf{R}$  del centro de masa de un sistema de dos partículas queda definido por la ecuación:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (8-3)$$

donde  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son los vectores de posición de las partículas 1 y 2 (fig. 8-1).

La ecuación del movimiento en función de las coordenadas del centro de masa, se puede obtener sumando las ecuaciones (8-1) y (8-2), lo que nos lleva a la ecuación

\* Observaremos que la fuerza magnética entre dos partículas cargadas en movimiento, no sigue la ley de la acción y la reacción de Newton. Sin embargo, al tratar el movimiento de partículas cargadas, la cantidad de movimiento lineal total del sistema incluye la cantidad de movimiento lineal del campo electromagnético producido por las partículas. Desde este punto de vista, un sistema de dos partículas cargadas no es, estrictamente hablando, un sistema de dos partículas. Cuando se incluye la cantidad de movimiento lineal del campo electromagnético en la cantidad de movimiento lineal total de un sistema de partículas cargadas, encontramos que se verifican los resultados de este capítulo referentes a la conservación de la cantidad de movimiento lineal total de un sistema de partículas cargadas aislado y estable. Puesto que, para velocidades de las partículas que sean pequeñas en relación con la velocidad de la luz, las fuerzas magnéticas serán pequeñas en comparación con las eléctricas entre las partículas, despreciaremos las fuerzas magnéticas entre las partículas cargadas.

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{F}_1^{\text{ext}} + \mathbf{F}_2^{\text{ext}} = \frac{d^2}{dt^2} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) = M \ddot{\mathbf{R}}, \quad (8-4)$$

donde

$$M = m_1 + m_2 \quad (8-5)$$

es la masa total del sistema.

La ecuación (8-4) nos indica que el vector de posición del centro de masa se comporta como si fuera el vector de posición de una partícula de masa  $M$  sobre la que actúa una fuerza igual a la suma de todas las fuerzas externas que obran sobre el sistema.

La ecuación (8-4) no es generalmente independiente de las tres ecuaciones dinámicas del movimiento que también son necesarias para la descripción completa del movimiento del sistema. Esto es debido a que las fuerzas externas  $y$ , por lo tanto, su suma, son, generalmente, funciones de todas las seis coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$  que determinan las posiciones de las partículas. Luego, en general, la ecuación (8-4) contendrá explícitamente las seis coordenadas utilizadas para describir el movimiento de las partículas. Sólo si la suma de las fuerzas externas se reduce a una función de  $\mathbf{R}$ ,  $\dot{\mathbf{R}}$  y  $t$ , la (8-4) será una ecuación independiente del movimiento y equivaldrá a la ecuación del movimiento de una partícula de masa  $M$  bajo la acción de una fuerza que sea función de su posición, su velocidad y del tiempo.

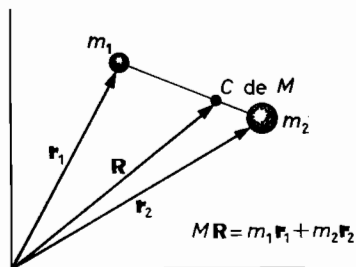


FIG. 8-1. Centro de masa de un sistema de dos partículas.

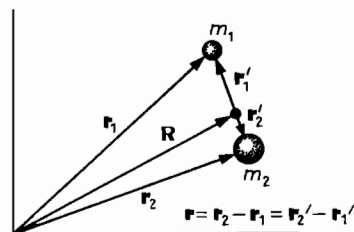


FIG. 8-2

Un ejemplo de la clase de fuerzas que satisfacen esta condición es el de las externas uniformes que no sean función de las coordenadas de las partículas. Otro ejemplo es proporcionado por fuerzas amortiguadoras que sean proporcionales a la primera potencia de la velocidad de las partículas y cuya constante de amortiguación sea igual para las dos partículas. Las últimas fuerzas nos dan una externa total de amortiguamiento

$$\mathbf{F}_{\text{amort}}^{\text{ext}} = -\kappa(m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = -\kappa M \mathbf{V}, \quad (8-6)$$

donde

$$M \mathbf{V} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2.$$

En problemas relacionados con el movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos y magnéticos uniformes, en que las partículas del sistema tienen la misma relación carga-masa,  $k$ , la fuerza total externa es función de  $\mathbf{R}$  y  $\dot{\mathbf{R}}$  solamente. En tales casos, la fuerza magnética externa total es

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{magnética}}^{\text{ext}} &= Q_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B} + Q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B} = k(m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) \times \mathbf{B} \\ &= k M \mathbf{V} \times \mathbf{B} = Q \mathbf{V} \times \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (8-7)$$

donde

$$k = \frac{Q_1}{m_1} = \frac{Q_2}{m_2}$$

y  $Q = k(m_1 + m_2) = Q_1 + Q_2$ , es la carga total del sistema.

En los problemas en que la ecuación (8-4) se pueda resolver independientemente de las tres ecuaciones restantes del movimiento del sistema de dos partículas, las tres últimas son generalmente las del movimiento de las coordenadas que nos dan una descripción del movimiento de las partículas con respecto al centro de masa. A veces, esta última descripción se da en función del vector de posición relativa  $\mathbf{r}$ , de una de las partículas con respecto a la otra.

Podemos encontrar la posición de las partículas con respecto al centro de masa (fig. 8-2) en función del vector de posición relativa

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad (8-8)$$

por medio de

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = -\frac{m_2}{M} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = \frac{m_1}{M} \mathbf{r}. \quad (8-9)$$

Con estas ecuaciones se hallan, a su vez, las expresiones de las velocidades y aceleraciones de las partículas con respecto al centro de masa, en función de sus propias velocidades y aceleraciones relativas

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \dot{\mathbf{R}} = -\frac{m_2}{M} \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \dot{\mathbf{R}} = \frac{m_1}{M} \dot{\mathbf{r}}, \quad (8-10)$$

y

$$\mathbf{a}'_1 = -\frac{m_2}{M} \ddot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{a}'_2 = \frac{m_1}{M} \ddot{\mathbf{r}}. \quad (8-11)$$

Para obtener la ecuación restante del movimiento de  $\mathbf{r}$ , sustituimos  $\mathbf{a}_1$  en la ecuación (8-1) por  $\ddot{\mathbf{R}} - (m_2/M)\ddot{\mathbf{r}}$ , y tendremos la ecuación

$$\mathbf{F}_1^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{int}} = m_1 \ddot{\mathbf{R}} - \frac{m_1 m_2}{M} \ddot{\mathbf{r}}$$

o por la ecuación (8-4)

$$\frac{m_1 \mathbf{F}_2^{\text{ext}} - m_2 \mathbf{F}_1^{\text{ext}}}{M} + \mathbf{F}^{\text{int}} = \frac{m_1 m_2}{M} \ddot{\mathbf{r}} \quad (8-12)$$

Observamos que para los tipos especiales de fuerzas externas mencionados antes, para los cuales la fuerza externa total sólo es función de  $\mathbf{R}$  y  $\dot{\mathbf{R}}$ , el término  $(m_1 \mathbf{F}_2^{\text{ext}} - m_2 \mathbf{F}_1^{\text{ext}})/M$  de la ecuación (8-12) resulta ser función de  $\mathbf{r}$  y  $\dot{\mathbf{r}}$  solamente. Luego, si la fuerza interna entre las partículas es también función de la posición y la velocidad relativas de las partículas, la (8-12) es la ecuación del movimiento de una partícula de masa

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M} \quad (8-13)$$

bajo la acción de la fuerza

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m_1 \mathbf{F}_2^{\text{ext}} - m_2 \mathbf{F}_1^{\text{ext}}}{M} + \mathbf{F}^{\text{int}}.$$

La masa  $\mu$  se conoce como *masa reducida* del sistema de dos partículas.

Hemos hallado así que las coordenadas del centro de masa y las que indican la posición relativa de dos partículas entre sí, son apropiadas para describir el movimiento de un sistema de dos partículas sometido a las fuerzas externas mencionadas y a una fuerza interna que depende de la posición y la velocidad relativas de las partículas. Un ejemplo importante de tal tipo de fuerza interna es la fuerza central que es función de la distancia radial entre las partículas y que está dirigida a lo largo de la recta que las une.

Observaremos que, con respecto al sistema de coordenadas del centro de masa, o sea, el sistema de coordenadas que se mueve con el centro de masa y tiene su origen en este mismo centro, el vector de posición  $\mathbf{R}'$  del centro de masa siempre se anula. Esto es  $\mathbf{R}' = 0$ . De lo que se desprende que  $\dot{\mathbf{R}}' = 0$ , o, equivalentemente,

$$m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = 0. \quad (8-14)$$

Esta ecuación nos indica que, con respecto al sistema de coordenadas del centro de masa, la cantidad de movimiento lineal total del sistema es nula.

### 8-2 Energía cinética: conservación de la energía

Indiferentemente de que las ecuaciones de movimiento del centro de masa y de la masa reducida sean independientes la una de la otra, podemos aplicar el principio del trabajo y la energía a estas ecuaciones equivalentes del movimiento de una simple partícula. El trabajo desarrollado por todas las

fuerzas externas sobre la partícula de masa  $M$ , cuyo movimiento es idéntico al del centro de masa, se considerará en lo sucesivo como el trabajo sobre el centro de masa,\* y es definido por

$$W_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2} = \int_{\mathbf{R}_1}^{\mathbf{R}_2} \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{R}, \quad (8-15)$$

el cual aplicando la ecuación (8-4) da

$$W_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 \right) dt = \Delta \left( \frac{1}{2} M V^2 \right). \quad (8-16)$$

Análogamente, si definimos el trabajo sobre la masa reducida por

$$W_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \left( \mathbf{F}^{\text{int}} + \frac{m_1 \mathbf{F}_2^{\text{ext}} - m_2 \mathbf{F}_1^{\text{ext}}}{M} \right) \cdot d\mathbf{r}, \quad (8-17)$$

se halla, utilizando la ecuación (8-12) que

$$W_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mu v^2 \right) dt = \Delta \left( \frac{1}{2} \mu v^2 \right). \quad (8-18)$$

La cantidad

$$T_0 = \frac{1}{2} M V^2 \quad (8-19)$$

será entonces la energía cinética del centro de masa, y la cantidad

$$T' = \frac{1}{2} \mu v^2 \quad (8-20)$$

la energía cinética de la masa reducida, o sea, como se demuestra a continuación, la energía cinética del sistema con respecto al centro de masa. Procederemos a verificar lo apropiado de estos términos demostrando que  $\frac{1}{2} \mu v^2$  es realmente la energía cinética con respecto al centro de masa y que  $\frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \mu v^2$  es la energía cinética total del sistema. La demostración se sigue muy fácilmente. Para la energía cinética total del sistema, empleando las ecuaciones (8-10), tenemos

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left| \frac{-m_2 \mathbf{v}}{M} + \mathbf{V} \right|^2 + \frac{1}{2} m_2 \left| \frac{m_1 \mathbf{v}}{M} + \mathbf{V} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} v^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2. \end{aligned} \quad (8-21)$$

\* En la misma forma, nos podemos referir simplemente a  $\frac{1}{2} M V^2$  como la energía cinética del centro de masa,  $\mathbf{R} \times M \mathbf{V}$  como la cantidad de movimiento angular del centro de masa, etc.

Para la energía cinética con respecto al centro de masa, se halla que

$$T' = \frac{1}{2}m_1(v'_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(v'_2)^2 \\ = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{-m_2v}{M}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1v}{M}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M}v^2. \quad (8-22)$$

Esto verifica que la energía cinética total se puede separar en dos partes: la energía cinética del centro de masa y la energía cinética con respecto al centro de masa.

Es probable que la energía cinética total del sistema sea una constante del movimiento en los problemas en que las fuerzas internas y externas que actúan sobre las partículas sean conservativas y, por consiguiente, deducibles de una función de energía potencial.

Las fuerzas deducibles de una función de energía potencial

$$U = U^{\text{ext}} + U^{\text{int}} \quad (8-23)$$

se expresan por

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i U = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \mathbf{F}_i^{\text{int}},$$

donde

$$\mathbf{F}_i^{\text{ext}} = -\nabla_i U^{\text{ext}} = -\left(\frac{\partial U^{\text{ext}}}{\partial x_i}\mathbf{i} + \frac{\partial U^{\text{ext}}}{\partial y_i}\mathbf{j} + \frac{\partial U^{\text{ext}}}{\partial z_i}\mathbf{k}\right) \quad (8-24)$$

y

$$\mathbf{F}_i^{\text{int}} = -\nabla_i U^{\text{int}}.$$

Que la energía de un sistema de partículas que se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas es una constante del movimiento se desprende del principio del trabajo y la energía aplicado a las ecuaciones (8-1) y (8-2). Tendremos así

$$\int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \int \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = -\int (d\mathbf{r}_1 \cdot \nabla_1 U + d\mathbf{r}_2 \cdot \nabla_2 U) \\ = -\Delta U = \Delta\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2\right) + \Delta\left(\frac{1}{2}m_2v_2^2\right) = \Delta T.$$

Luego  $-\Delta U = \Delta T$ , o sea,

$$T + U = \text{constante}. \quad (8-25)$$

Además, en los problemas en que la fuerza externa conservativa total sólo es función de las coordenadas del centro de masa, tendremos

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = -\nabla_1 U^{\text{ext}} - \nabla_2 U^{\text{ext}} = -\left(\frac{\partial U^{\text{ext}}}{\partial X}\mathbf{i} + \frac{\partial U^{\text{ext}}}{\partial Y}\mathbf{j} + \frac{\partial U^{\text{ext}}}{\partial Z}\mathbf{k}\right),$$

donde  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  son las componentes cartesianas del vector de posición  $\mathbf{R}$ . Es decir, que, en tales casos, el centro de masa satisface un teorema independiente de la conservación de la energía expresado por

$$T_0 + U^{\text{ext}} = \text{constante}. \quad (8-26)$$

Si las ecuaciones (8-25) y (8-26) son satisfechas simultáneamente es natural concluir que la diferencia entre estas dos ecuaciones

$$T' + U^{\text{int}} = \text{constante}, \quad (8-27)$$

expresa la conservación de la energía total de las dos partículas con respecto al centro de masa.

### 8-3 Colisión entre dos partículas

El problema de la colisión de dos partículas constituye un caso en que la utilización del sistema de coordenadas del centro de masa simplifica mucho la labor necesaria para hallar la solución.

Consideremos el choque o colisión de dos partículas esféricas uniformes (fig. 8-3). El objeto de escoger las partículas esféricas y uniformes es que,

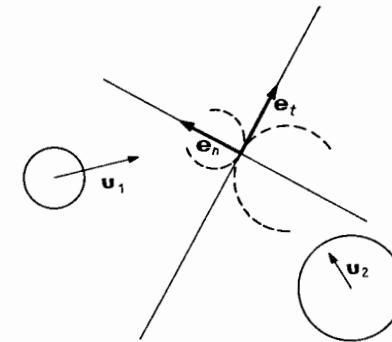


FIG. 8-3. Colisión de dos partículas.

de esta manera, el choque no dependerá de las formas ni de la orientación de los cuerpos que chocan. Sólo de este modo será posible considerarlos como partículas.

En función de las velocidades de las partículas inicialmente observadas,  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$ , sus velocidades iniciales con respecto al centro de masa (fig. 8-4) son

$$\mathbf{u}'_1 = \mathbf{u}_1 - \frac{m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2}{M} = \frac{m_2(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)}{M} \quad (8-28)$$

y

$$\mathbf{u}'_2 = \frac{m_1}{M}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1). \quad (8-29)$$

Como la cantidad de movimiento lineal total del sistema con respecto al sistema de coordenadas del centro de masa se anula, se desprende que tendremos

$$m_1 \mathbf{u}'_1 = -m_2 \mathbf{u}'_2. \quad (8-30)$$

Análogamente, las velocidades  $\mathbf{v}'_i$  que tienen las partículas después de la colisión, con respecto al centro de masa, satisfacen la relación.

$$m_1 \mathbf{v}'_1 = -m_2 \mathbf{v}'_2. \quad (8-31)$$

No obstante, esta relación no es suficiente por sí misma para llegar a la solución que buscamos, la cual sólo puede obtenerse con el conocimiento de las fuerzas que las partículas ejercen entre sí (y éstas no se han consi-

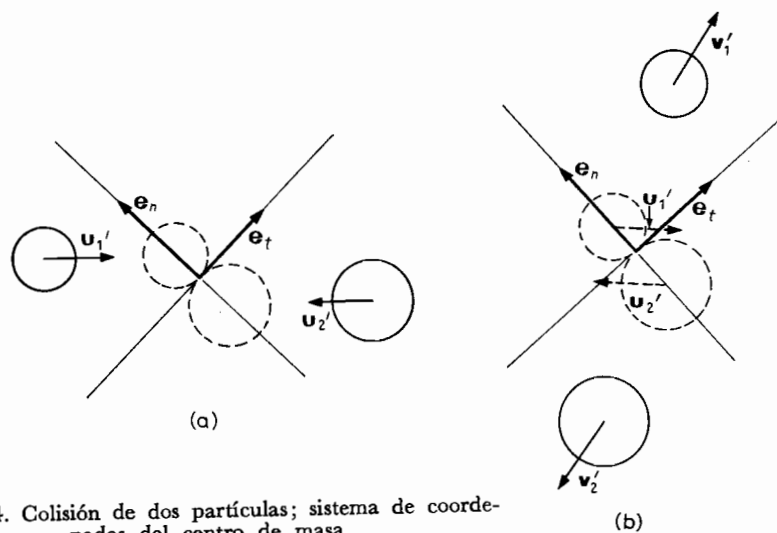


FIG. 8-4. Colisión de dos partículas; sistema de coordenadas del centro de masa.

derado todavía.) En un choque real entre dos cuerpos, colisión en que éstos se ponen en contacto, las fuerzas son desconocidas y de carácter complicado. Por consiguiente, para una descripción más detallada del movimiento de las partículas se tendrá que recurrir al análisis de datos experimentales relacionados con la colisión.

Si se observa que la colisión es *elástica*, o sea, si no hay energía disipada, se tendrá una segunda relación en la ecuación de la conservación de la energía,

$$\frac{1}{2} m_1 (v'_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v'_2)^2 = \frac{1}{2} m_1 (u'_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (u'_2)^2. \quad (8-32)$$

Generalmente, las 4 relaciones proporcionadas por las ecuaciones (8-31) y (8-32) no son todavía suficientes para determinar las 6 componentes de las velocidades finales,  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , de las dos partículas. Sin embargo, si suponemos

además que la fuerza entre las partículas en contacto actúa a lo largo de la recta que une sus centros, entonces, con respecto al centro de masa, las partículas permanecerán en el plano determinado por este centro y su dirección inicial de propagación con respecto al mismo centro (fig. 8-4). Esta condición se encarga de dos componentes de las velocidades finales y nos permitirá encontrar las otras 4 componentes de ellas.

Observaremos que, de acuerdo con la suposición anterior respecto a la fuerza entre partículas uniformes esféricas, la única componente de las velocidades de las dos que chocan, con respecto al centro de masa, que puede cambiar es la componente a lo largo de la recta que une sus centros en el instante de la colisión, es decir, las componentes a lo largo de  $e_n$  de la figura 8-4. Las otras componentes no cambiarán,

$$u'_1 \cdot e_t = u'_{1t} = v'_{1t} \quad \text{y} \quad u'_{2t} = v'_{2t}. \quad (8-33)$$

De la conservación de la energía cinética en el sistema de coordenadas del centro de masa y con la ecuación que expresa la anulación de la componente de la cantidad de movimiento lineal con respecto al centro de masa a lo largo de  $e_n$ ,

$$m_1 \mathbf{v}'_1 \cdot e_n + m_2 \mathbf{v}'_2 \cdot e_n = 0, \quad \text{o sea} \quad m_1 v'_{1n} = -m_2 v'_{2n}, \quad (8-34)$$

hallamos la solución para una colisión elástica

$$v'_{1n} = \pm u'_{1n} \quad \text{y} \quad v'_{2n} = \pm u'_{2n}.$$

Para una colisión real entre dos partículas deberá quedar claro que la solución que describe la situación está dada por

$$v'_{1n} = -u'_{1n} \quad \text{y} \quad v'_{2n} = -u'_{2n}. \quad (8-35)$$

Las velocidades con respecto al sistema de coordenadas del laboratorio, o sea del observador, serán

$$\mathbf{v}_1 = u'_{1t} e_t - u'_{1n} e_n + \mathbf{V} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = u'_{2t} e_t - u'_{2n} e_n + \mathbf{V}. \quad (8-36)$$

Del mismo modo, si se nos proporciona la pérdida de energía, o bien, se da la constante empírica  $\epsilon$ , que es el *coeficiente de restitución*, podemos resolver el problema suponiendo, como anteriormente, que mientras dura el contacto entre los cuerpos, la fuerza entre las partículas actúa a lo largo de la recta que une sus centros. El coeficiente de restitución se define por la razón, con signo negativo, entre las componentes de las velocidades relativas normales a las superficies de las partículas que chocan, después y antes de la colisión. Esto es

$$\epsilon = - \frac{v'_{2n} - v'_{1n}}{u'_{2n} - u'_{1n}}. \quad (8-37)$$

En este caso obtenemos semejantemente, con la anulación de la cantidad de movimiento lineal con respecto al centro de masa, el resultado de que

$$m_1 v'_{1n} = -m_2 v'_{2n} \quad \text{y} \quad m_1 u'_{1n} = -m_2 u'_{2n}.$$

Con esto y con la ecuación (8-37), hallamos las soluciones

$$v'_{1n} = -\varepsilon u'_{1n} \quad \text{y} \quad v'_{2n} = -\varepsilon u'_{2n}. \quad (8-38)$$

En el sistema de coordenadas del observador, las velocidades finales serán

$$\mathbf{v}_1 = u'_{1t} \mathbf{e}_t - \varepsilon u'_{1n} \mathbf{e}_n + \mathbf{V} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = u'_{2t} \mathbf{e}_t - \varepsilon u'_{2n} \mathbf{e}_n + \mathbf{V}. \quad (8-39)$$

La pérdida de energía cinética se halla fácilmente que es

Pérdida en  $T =$  pérdida en  $T'$

$$\begin{aligned} &= \frac{m_1}{2} [(u'_{1t})^2 - (v'_{1t})^2] + \frac{m_2}{2} [(u'_{2t})^2 - (v'_{2t})^2] \\ &= \left[ \frac{m_1}{2} (u'_{1n})^2 + \frac{m_2}{2} (u'_{2n})^2 \right] (1 - \varepsilon^2). \end{aligned} \quad (8-40)$$

Observaremos que nuestra suposición sobre la dirección de la fuerza entre los cuerpos que chocan no es real. En la práctica, es probable que haya además una componente tangencial que haga girar a los cuerpos (sección 9-14) y cambie su cantidad de movimiento en la dirección tangencial. Esto complica considerablemente el problema. De todas formas, aun así, se conservará la cantidad de movimiento lineal del sistema y, como veremos más adelante, también su cantidad de movimiento angular. La conservación de la cantidad de movimiento lineal se expresa por

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2,$$

y, como se mencionó anteriormente, esta ecuación no será suficiente para determinar las velocidades finales de las partículas a partir de sus condiciones iniciales.

#### 8-4 Movimiento por cohete

La ecuación del movimiento de un vehículo impulsado por cohete se podrá hallar si consideramos el vehículo y el chorro de gas que expulsa como dos partículas que interactúan. Como tales, en un instante  $t$ , el vehículo y el combustible (o mejor dicho el producto de la combustión) expulsado tendrán una masa total  $M$  y una velocidad  $\mathbf{v}$  (fig. 8-5a).

Un tiempo infinitesimal  $\Delta t$  después, cuando se haya expulsado una cantidad de gases de masa  $\Delta m$  con una velocidad  $-\mathbf{c}$  con respecto al

vehículo, se observará que éste se mueve con una velocidad  $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$  y el gas expulsado con la velocidad  $\mathbf{c} - \mathbf{v}$ , como se indica en la figura 8-5 (b). Si no actúa ninguna fuerza externa, la cantidad de movimiento lineal total del sistema se conservará, y, por lo tanto, se deduce que

$$(M - \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + \Delta m(\mathbf{c} - \mathbf{v}) = M\mathbf{v},$$

o sea, dentro de cantidades infinitesimales de primer orden,

$$M \Delta \mathbf{v} = \Delta m \mathbf{c} = -\Delta M \mathbf{c},$$

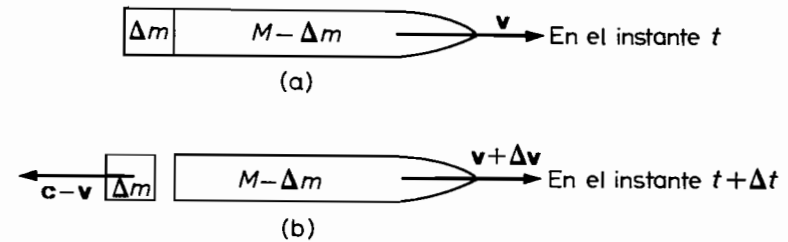


FIG. 8-5

en la que hemos puesto al final  $\Delta m = -\Delta M$ . En el límite, cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  la ecuación del movimiento rectilíneo del cohete es

$$M \frac{dv}{dt} = -c \frac{dM}{dt} \quad \text{o} \quad M = -c \frac{dM}{dv} \quad (8-41)$$

la cual se integra fácilmente y da

$$v - v_0 = -c \ln \frac{M(t)}{M_0}. \quad (8-42)$$

Si el combustible es expulsado con gasto uniforme durante un tiempo fijo,  $\tau$ , la variación de la masa del cohete en función del tiempo se expresa por

$$M(t) = \begin{cases} M_V + M_F \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) & 0 \leq t \leq \tau, \\ M_V & \tau < t, \end{cases}$$

donde  $M_V$  es la masa del vehículo y  $M_F$  la del combustible en el instante inicial  $t = 0$ .

El conocimiento de la variación de la masa con el tiempo nos permitirá integrar la ecuación (8-42) y, por consiguiente, obtener la posición del vehículo en función del tiempo. En un lapso  $t < \tau$ , la ecuación (8-42) es

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - c \ln \frac{M_V + M_F - M_F(t/\tau)}{M_V + M_F} = v_0 - c \ln(1 - at),$$



donde

$$a = \frac{M_F}{M_V + M_F} \frac{1}{\tau}$$

Esta ecuación tiene la solución

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t - c \int_0^t \ln(1 - at) dt \\ &= x_0 + v_0 t - c \left[ \left( t - \frac{1}{a} \right) \ln(1 - at) - t \right]. \end{aligned} \quad (8-43)$$

Si el cohete arrancó del reposo en el instante  $t = 0$ , la velocidad máxima que puede alcanzar en un tiempo  $t = \tau$ , queda determinada por la cantidad de combustible,  $M_F$ , que llevaba inicialmente y por la relación entre esta cantidad y la masa del vehículo en el instante  $t = 0$ . Esta velocidad máxima se halla con la ecuación (8-42) poniendo  $M(\tau) = M_V$ . Se obtiene así

$$v_{\text{máx}} = -c \ln \frac{M_V}{M_V + M_F} = c \ln \left( 1 + \frac{M_F}{M_V} \right). \quad (8-44)$$

Esta expresión nos indica que para que el cohete alcance altas velocidades la relación  $M_F/M_V$  deberá ser tan grande como sea posible.

Si sobre el vehículo actúa además una fuerza externa, la ecuación de movimiento se encontrará considerando el cambio en la cantidad de movimiento lineal del centro de masa del sistema producido por el impulso de la fuerza externa durante el corto intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Suponemos que la fuerza actúa en la dirección del movimiento del cohete.

En el tiempo  $t$ , la cantidad de movimiento lineal total del sistema es

$$MV = Mv,$$

y un corto tiempo después,  $\Delta t$ , se halla que es

$$M(V + \Delta V) = (M - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v - c).$$

Igualando el cambio o variación de la cantidad de movimiento del sistema al impulso que recibe, se halla, dentro de infinitesimales de primer orden, que la ecuación de movimiento es

$$F \Delta t = M(V + \Delta V) - MV = M \Delta v - c(\Delta m) = M \Delta v + c \Delta M$$

o sea,

$$F = M \frac{dv}{dt} + c \frac{dM}{dt}. \quad (8-45)$$

### 8-5 Cantidad de movimiento angular

La cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas es una cantidad física muy importante, igual que en el caso del movimiento de una sola partícula. Siguiendo la definición dada en la ecuación (5-30) para la cantidad de movimiento angular orbital de una partícula, definiremos la cantidad de movimiento angular orbital del centro de masa por

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}}. \quad (8-46)$$

También, como en el caso de una partícula simple, el producto vectorial de la ecuación (8-4) con  $\mathbf{R}$  nos da la ecuación del movimiento para la cantidad de movimiento angular del centro de masa,

$$\mathbf{R} \times \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} (M\dot{\mathbf{R}}) = \frac{d}{dt} (\mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}})$$

o sea,

$$\dot{\mathbf{N}}_0 = \frac{d}{dt} \mathbf{L}_0, \quad (8-47)$$

donde el producto vectorial

$$\mathbf{N}_0 = \mathbf{R} \times \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (8-48)$$

se considera como el momento rotacional (o del par) sobre el centro de masa. La ecuación (8-47) nos indica que la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular,  $\mathbf{L}_0$ , del centro de masa es igual al momento rotacional ejercido sobre el mismo. Obviamente, si el momento rotacional sobre el centro de masa se anula, la cantidad de movimiento angular del mismo será una constante del movimiento.

Análogamente, poniendo

$$\mathbf{f} = \frac{m_1 \mathbf{F}_2^{\text{ext}} - m_2 \mathbf{F}_1^{\text{ext}}}{M} + \mathbf{F}^{\text{int}},$$

y efectuando el producto vectorial de la ecuación (8-12) por el vector de posición relativa  $\mathbf{r}$  definido por la (8-8), tenemos

$$\mathbf{r} \times \mathbf{f} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt} (\mu \dot{\mathbf{r}}) = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}}),$$

o sea,

$$\dot{\mathbf{N}}' = \frac{d}{dt} \mathbf{L}', \quad (8-49)$$

donde

$$\mathbf{N}' = \mathbf{r} \times \mathbf{f} \quad (8-50)$$

$$y \quad \mathbf{L}' = \mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}}. \quad (8-51)$$

Definiremos la cantidad  $\mathbf{N}'$  como el momento rotacional total respecto al centro de masa y  $\mathbf{L}'$  como la cantidad de movimiento angular orbital total del sistema, con respecto al mismo centro. Procederemos a demostrar que dichos conceptos son apropiados.

Comenzaremos por calcular la cantidad de movimiento angular total con respecto al centro de masa que está dada por la suma

$$\mathbf{r}'_1 \times m_1 \mathbf{v}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times m_2 \mathbf{v}'_2.$$

Vemos que esta suma, en función del vector de posición relativa,  $\mathbf{r}$ , y del de la velocidad relativa,  $\dot{\mathbf{r}}$ , de la partícula 2 con respecto a la 1, es igual a la cantidad de movimiento angular definida por la ecuación (8-51). Esto es

$$m_1 \left[ -\frac{m_2 \mathbf{r}}{M} \right] \times \left[ -\frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}}{M} \right] + m_2 \left[ \frac{m_1 \mathbf{r}}{M} \right] \times \left[ \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}}{M} \right] = \frac{m_1 m_2}{M} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{L}'.$$

El momento rotacional con respecto al centro de masa está dado por la suma

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{F}_2 &= -\frac{m_2}{M} \mathbf{r} \times [\mathbf{F}_1^{\text{ext}} - \mathbf{F}_1^{\text{int}}] + \frac{m_1}{M} \mathbf{r} \times [\mathbf{F}_2^{\text{ext}} + \mathbf{F}_2^{\text{int}}] \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \mathbf{N}' \end{aligned}$$

Y sumando las ecuaciones (8-47) y (8-49) se tiene

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 + \mathbf{N}' = \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_0 + \mathbf{L}') = \frac{d}{dt} \mathbf{L}, \quad (8-52)$$

donde  $\mathbf{N}$  se define como el momento rotacional total del sistema y  $\mathbf{L}$  como la cantidad de movimiento angular orbital total del mismo. Se puede comprobar que estas definiciones de dichas cantidades vectoriales son correctas, expresando el momento rotacional total y la cantidad de movimiento angular orbital total en función de las coordenadas del centro de masa y las coordenadas relativas de las dos partículas. Se halla entonces para el momento rotacional total que actúa sobre el sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 \\ &= \left( -\frac{m_2}{M} \mathbf{r} + \mathbf{R} \right) \times (\mathbf{F}_1^{\text{ext}} - \mathbf{F}_1^{\text{int}}) + \left( \frac{m_1}{M} \mathbf{r} + \mathbf{R} \right) \times (\mathbf{F}_2^{\text{ext}} + \mathbf{F}_2^{\text{int}}) \\ &= \mathbf{R} \times (\mathbf{F}_1^{\text{ext}} + \mathbf{F}_2^{\text{ext}}) + \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \mathbf{N}_0 + \mathbf{N}', \end{aligned}$$

y para la cantidad de movimiento angular orbital total

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r}_1 \times (m_1 \mathbf{v}_1) + \mathbf{r}_2 \times (m_2 \mathbf{v}_2) \\ &= m_1 \left( -\frac{m_2}{M} \mathbf{r} + \mathbf{R} \right) \times \left( -\frac{m_2}{M} \mathbf{v} + \mathbf{V} \right) + m_2 \left( \frac{m_1}{M} \mathbf{r} + \mathbf{R} \right) \\ &\quad \times \left( \frac{m_1}{M} \mathbf{v} + \mathbf{V} \right) \\ &= M \mathbf{R} \times \mathbf{V} + \frac{m_1 m_2}{M} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}'. \end{aligned}$$

Observaremos que si uno cualquiera de los momentos  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{N}_0$  o  $\mathbf{N}'$  se anula, la cantidad de movimiento angular correspondiente será constante.

► Como ejemplo de aplicación de la ecuación del movimiento del vector de cantidad de movimiento angular orbital, consideraremos el problema de la máquina simple de Atwood, que como se ve en la figura 8-6, es un sistema de dos partículas unidas por una cuerda inextensible y ligera de longitud  $l$  que pasa por una polea de radio  $R$ .

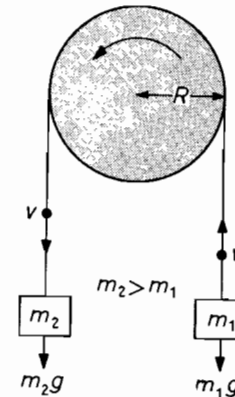


FIG. 8-6. Máquina de Atwood.

Por el momento no consideramos el efecto de la polea sobre el movimiento. Esto es, supondremos que las masas son de tal magnitud que hagan que dicho efecto sea despreciable. En esta forma, el problema se reduce al movimiento de dos partículas bajo la acción de las fuerzas externas gravitacionales  $m_1 g$  y  $m_2 g$ , como se ve en la figura 8-6, y de la fuerza interna transmitida de una partícula a otra por la cuerda. Tendremos entonces un sistema restringido que sólo requiere una coordenada para el análisis o descripción de su movimiento; luego sólo será necesaria una ecuación del movimiento, que obtendremos utilizando la ecuación (8-52).

Tomando momentos con respecto al centro geométrico de la polea, hallamos que todos los momentos rotacionales son paralelos al eje de ella y su magnitud resultante es dada por

$$|\mathbf{N}| = (m_2 - m_1)gR, \quad m_2 > m_1.$$

La cantidad de movimiento angular total del sistema con respecto al centro de la polea es también paralela al eje de la misma y su magnitud será

$$L = (m_1 + m_2)Rv,$$

donde  $v$  es la velocidad de las partículas. Utilizando la ecuación (8-52) se halla la siguiente igualdad

$$(m_2 - m_1)gR = (m_1 + m_2)R\dot{v},$$

que nos da para la aceleración constante de las partículas

$$a = \dot{v} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g.$$

Un problema muy importante es el del movimiento de un sistema de dos partículas que actúan entre sí con una fuerza que estará sobre la recta que las une (fuerza central). Si además, se mueven bajo la acción de fuerzas externas que satisfagan la ecuación

$$m_2\mathbf{F}_1^{\text{ext}} - m_1\mathbf{F}_2^{\text{ext}} = 0,$$

entonces, se halla que el momento rotacional con respecto al centro de masa se anula

$$\mathbf{N}' = \mathbf{r} \times \mathbf{F}^{\text{int}} = 0,$$

y la cantidad de movimiento angular orbital con respecto al centro de masa será una constante del movimiento.

### 8-6 Dispersión: relaciones entre los ángulos de dispersión en los sistemas de coordenadas del centro de masa y del laboratorio (o sea de un observador)

En la sección 7-8, explicamos la dispersión (o desviación) producida por un campo de fuerzas centrales sobre una partícula, suponiendo entonces que el centro de dispersión permanecía fijo. La solución obtenida allí, substituyendo la  $m$  de las ecuaciones de dicha sección por la masa reducida,  $\mu$ , representa la dispersión de la partícula 2 con respecto a la 1, y como

$$\mathbf{r}'_2 = \frac{m_1}{M} \mathbf{r} \quad (8-53)$$

y

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{M} \mathbf{r}, \quad (8-54)$$

también representará la dispersión de las dos partículas tal como la observaría con respecto al sistema de coordenadas del centro de masa (fig. 8-7).

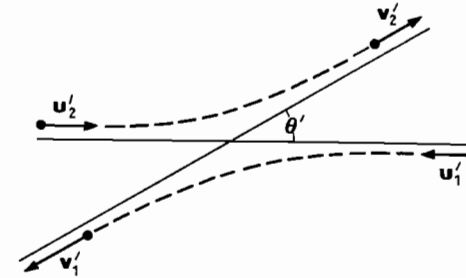


Fig. 8-7. Dispersión o desviación en el sistema de coordenadas del centro de masa.

Sean  $\mathbf{u}_i$  y  $\mathbf{v}_i$  las velocidades inicial y final, respectivamente, medidas en el sistema de referencia del laboratorio de un observador y consideremos el caso en que la partícula 1 se observa que inicialmente está en reposo  $\mathbf{u}_1 = 0$ , que es la situación corriente en un experimento de este tipo. Entonces, como se ve en la figura 8-8, el ángulo  $\theta$  con que la partícula 2 se dispersa

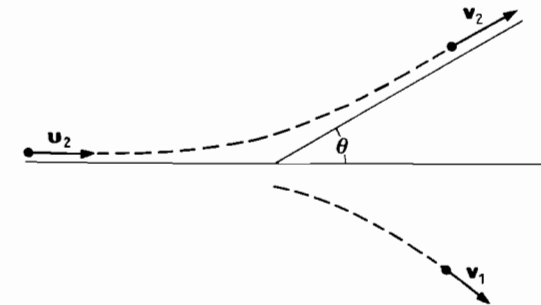


Fig. 8-8. Dispersión o desviación en el sistema de coordenadas del laboratorio del observador.

(la cual se movía inicialmente en la dirección y sentido del eje  $x$  positivo con una velocidad  $\mathbf{u}_2$ ) está dado por

$$\text{tg } \theta = \frac{v_{2y}}{v_{2x}}. \quad (8-55)$$

Por otra parte, con respecto al sistema de coordenadas del centro de masa, el ángulo  $\theta'$  con que la partícula 2 se dispersa (fig. 8-7) es

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{v'_{2y}}{v'_{2x}}, \quad (8-56)$$

donde  $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ . Con las condiciones iniciales dadas ( $\mathbf{u}_1 = 0$ ,  $\mathbf{u}_2 = u_2 \mathbf{i}$ ), se verifican las siguientes relaciones

$$\mathbf{V} = \frac{m_2 \mathbf{u}_2}{M} \quad (8-57)$$

o sea,

$$V_x = \frac{m_2 u_2}{M}, \quad V_y = 0, \quad (8-58)$$

y

$$\mathbf{u}'_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{V} = \frac{m_1}{M} \mathbf{u}_2 \quad \text{o} \quad u_2 = \frac{M}{m_1} u'_2. \quad (8-59)$$

Ahora bien, como en este caso es aplicable el principio de la conservación de energía, deducimos de éste, como se vio en la sección 8-3, que las velocidades antes y después de la colisión son iguales. Luego,  $v'_2 = u'_2$ , de donde obtendremos la relación entre los ángulos de dispersión medidos en los sistemas de coordenadas del centro de masa y del laboratorio del observador:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = \frac{v'_{2y}}{v'_{2x} + V_x} = \frac{u'_2 \operatorname{sen} \theta'}{u'_2 \cos \theta' + (m_2/m_1) u'_2},$$

o sea,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta'}{\cos \theta' + (m_2/m_1)}. \quad (8-60)$$

Si la partícula que hace de blanco, que estaba inicialmente en reposo con respecto al sistema de coordenadas del laboratorio del observador, es mucho más pesada que la partícula incidente, la ecuación (8-60) nos da el resultado que era de esperar, de que los ángulos de dispersión en los dos sistemas son muy aproximadamente iguales:

$$\theta \approx \theta'.$$

Ahora bien, es claro que en todos los demás casos, la cantidad de movimiento lineal y la energía cinética comunicadas al núcleo "blanco" pueden representar una gran fracción de la cantidad de movimiento y la energía cinética iniciales del "proyectil" o partícula dispersada; y, entonces, los ángulos y las secciones eficaces de dispersión en los sistemas de coordenadas del centro de masa y del laboratorio serán notablemente diferentes.

La relación entre las secciones eficaces de dispersión en los dos sistemas de referencia se obtendrá por su relación con el parámetro de choque que es el mismo en ambos sistemas. Hallamos así que

$$\sigma(\theta) \operatorname{sen} \theta d\theta = -s ds = \sigma(\theta') \operatorname{sen} \theta' d\theta' \quad (8-61)$$

o sea,

$$\sigma(\theta) = \sigma(\theta') \frac{\operatorname{sen} \theta'}{\operatorname{sen} \theta} \frac{d\theta'}{d\theta}, \quad (8-62)$$

donde  $\theta$  y  $\theta'$  son los ángulos de dispersión en los dos sistemas del centro de masa y del laboratorio, respectivamente.

### 8-7 Dinámica de un sistema de $N$ partículas: teoremas de conservación

En esta sección, estudiaremos los teoremas de conservación de uso más común en el análisis de un sistema de  $N$  partículas. Concretamente, estos son los teoremas de conservación relacionados con: la energía total, la cantidad de movimiento lineal total y la cantidad de movimiento angular orbital total del sistema.

a) *Conservación de la cantidad de movimiento total: centro de masa.* Comenzaremos, igual que en el caso de dos partículas que interactúan distinguiendo entre fuerzas internas y externas del sistema. Con esta distinción y suponiendo solamente fuerzas internas de dos cuerpos entre las partículas del mismo que satisfagan la ley de la acción y la reacción de Newton, hallaremos que la ecuación del movimiento para la  $i$ -ésima partícula, es

$$\mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} = m_i \mathbf{a}_i. \quad (8-63)$$

Aquí  $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$  es la fuerza externa total sobre la partícula  $i$  y  $\mathbf{F}_{ij}^{\text{int}}$ , la fuerza interna que la partícula  $j$  ejerce sobre la  $i$ . Sumando las ecuaciones (8-63) sobre todas las partículas, la suma de las fuerzas internas se anula,

$$\sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} = \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ji}^{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} (\mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} + \mathbf{F}_{ji}^{\text{int}}) = 0,$$

puesto que, por la tercera ley de Newton,  $\mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} = -\mathbf{F}_{ji}^{\text{int}}$ . Esto nos conduce a la ecuación

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i. \quad (8-64)$$

con la que se halla que la cantidad de movimiento lineal total del sistema,

$$M\mathbf{V} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i, \quad (8-65)$$

será una constante del movimiento si la fuerza externa total que actúa sobre las partículas se anula. Si sólo se anularan algunas componentes de dicha fuerza, entonces, evidentemente, sólo se conservarían las componentes correspondientes de la cantidad de movimiento lineal total.

Observaremos que  $\mathbf{V}$  es la velocidad del centro de masa, cuya posición queda definida por la ecuación

$$M\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad (8-66)$$

con

$$M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (8-67)$$

Si la suma de las fuerzas externas no se anula, entonces la ecuación (8-64), que puede ponerse en la forma

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = M\ddot{\mathbf{R}}, \quad (8-68)$$

expresa que la ecuación de movimiento del vector de posición del centro de masa es la misma que la de una partícula de masa

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (8-69)$$

que se mueve bajo la acción de todas las fuerzas externas. Observaremos, una vez más, que la ecuación (8-68) es independiente de las restantes ecuaciones de movimiento del sistema sólo si la fuerza externa total se reduce a ser función de  $t$ ,  $\mathbf{R}$  y sus derivadas con respecto al tiempo. En estas circunstancias, la (8-68) es, en todos sentidos, la ecuación de movimiento de una partícula, cuya resolución fue tratada en capítulos anteriores. Un ejemplo en que esta ecuación es resoluble así, es el de un sistema de partículas que se mueven sometidas a la acción de campos uniformes constantes.

b) *Conservación de la energía.* Si las fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas son conservativas, se puede contar con la conservación de la energía total del sistema. Se halló que tales fuerzas eran deducibles de una función de energía potencial, la cual, en este caso, se puede descomponer en dos partes y expresarse por

$$U = U^{\text{ext}} + U^{\text{int}}, \quad (8-70)$$

de tal modo que

$$\mathbf{F}_i^{\text{ext}} = -\nabla_i U^{\text{ext}} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_i^{\text{int}} = -\nabla_i U^{\text{int}},$$

donde

$$\nabla_i = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y_i} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Para que la función de energía potencial interna produzca fuerzas internas entre dos cuerpos que sigan la ley de Newton de la acción y la reacción, deberá ser función de la distancia relativa entre las dos partículas que interactúan y, como las fuerzas entre estas partículas son fuerzas entre dos cuerpos, se podrá expresar por

$$U^{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} U_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|), \quad (8-71)$$

donde  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ . Tal función de energía potencial da para la fuerza interna que ejerce la partícula  $j$  sobre la  $i$

$$\mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} = -\nabla_i U_{ij} = \nabla_j U_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}^{\text{int}}.$$

Observamos que podemos poner  $\nabla_i U_{ij} = \nabla_{ij} U_{ij}$ , donde

$$\nabla_{ij} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial (x_i - x_j)} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial (y_i - y_j)} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial (z_i - z_j)}. \quad (8-72)$$

El factor  $\frac{1}{2}$  que aparece en la ecuación 8-71 se debe a que  $U_{ij} = U_{ji}$  aparece dos veces en la suma.

Aplicando a la ecuación (8-63) el principio del trabajo y la energía, obtenemos, como en ocasiones anteriores,

$$\mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i = \Delta(\frac{1}{2} m_i v_i^2),$$

cuya suma da

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \Delta \mathbf{r}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} \cdot \Delta \mathbf{r}_i = \Delta \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \Delta T. \quad (8-73)$$

El primer término de esta ecuación es, evidentemente, el cambio negativo (o con signo menos) de la energía potencial externa

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \Delta \mathbf{r}_i = - \sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{r}_i \cdot \nabla_i U^{\text{ext}} = -\Delta U^{\text{ext}}.$$

También puede demostrarse que el segundo término del primer miembro de la ecuación (8-73) es el negativo del cambio o variación de la energía potencial interna. Tenemos además

$$\sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} \cdot \Delta \mathbf{r}_i = \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ji}^{\text{int}} \cdot \Delta \mathbf{r}_j = - \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} \cdot \Delta \mathbf{r}_j.$$

De lo que se deduce que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} \cdot \Delta \mathbf{r}_i &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} (\Delta \mathbf{r}_i - \Delta \mathbf{r}_j) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} \cdot \Delta \mathbf{r}_{ij} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} \Delta \mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla_{ij} U_{ij}^{\text{int}} = -\Delta U^{\text{int}}. \end{aligned}$$

La ecuación 8-73 queda, por tanto, convertida en

$$\Delta(T + U^{\text{ext}} + U^{\text{int}}) = 0,$$

o sea, como queríamos deducir,  $T + U = \text{constante}$ .

Del hecho de que, para ciertas fuerzas externas, la ecuación (8-68) puede ser independiente de las demás ecuaciones de movimiento del sistema, será probable que la energía cinética total del sistema se pueda expresar por la suma de la energía cinética del centro de masa más la energía cinética con respecto al mismo centro. La demostración será análoga a la que se hizo para el sistema de dos partículas. Tenemos la relación

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{V},$$

en la que  $\mathbf{v}'_i$  es la velocidad de la partícula  $i$  con respecto al centro de masa. Introduciendo esta relación en la expresión de la energía cinética total del sistema y utilizando el hecho de que la cantidad de movimiento lineal total con respecto al centro de masa del sistema se anula, obtenemos el resultado esperado

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (v_i'^2 + V^2 + 2\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{V}) \\ &= \frac{1}{2} M V^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i'^2. \end{aligned} \quad (8-74)$$

c) *Conservación de la cantidad de movimiento angular orbital.* Para determinar la condición bajo la cual se conserva la cantidad de movimiento angular orbital total de un sistema, necesitamos conocer la ecuación de movimiento de dicha cantidad de movimiento del sistema. Igual que en el problema de una sola partícula en un campo de fuerzas centrales, tomaremos el producto vectorial de la ecuación (8-63) por  $\mathbf{r}_i$  para hallar la ecuación de movimiento para la cantidad de movimiento angular orbital de la partícula  $i$ . La suma de las ecuaciones resultantes nos dará

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \right). \quad (8-75)$$

Ahora bien, si la fuerza interna entre las partículas  $i$  y  $j$  actúa a lo largo de la recta que las une, tendremos que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} &= \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}^{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}^{\text{int}}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} = 0. \end{aligned}$$

El último paso se desprende del supuesto de que  $\mathbf{F}_{ij}^{\text{int}}$  y  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_{ij}$  son paralelos. En consecuencia, el momento total debido a las fuerzas internas será nulo y la ecuación (8-75) se reduce a

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt} \mathbf{L}, \quad (8-76)$$

donde

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \quad (8-77)$$

es el momento rotacional total externo que actúa sobre el sistema y

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (8-78)$$

es la cantidad de movimiento angular orbital total del sistema. La (8-76) es la ecuación de movimiento para la cantidad de movimiento angular orbital total, y de ella deducimos que dicha cantidad es una constante del movimiento si se anula el momento rotacional externo.

Lo mismo que en el sistema de dos partículas, vemos, en este caso, que la cantidad de movimiento angular orbital total se podrá descomponer en la suma de la cantidad de movimiento angular orbital del centro de masa y la cantidad de movimiento angular orbital del sistema con respecto a dicho centro. Concretamente, utilizando las coordenadas del centro de masa y las de las partículas con respecto a éste, hallamos que la cantidad de movimiento angular orbital total es

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \\ &= \sum_i \mathbf{r}'_i \times (m_i \mathbf{v}'_i) + \sum_i m_i \mathbf{R} \times \mathbf{V} + \sum_i \mathbf{R} \times (m_i \mathbf{v}'_i) + \sum_i (m_i \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{V}, \end{aligned}$$

puesto que

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{V}.$$

Sin embargo

$$\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = 0;$$

por consiguiente, la expresión de la cantidad de movimiento angular total se reducirá al resultado esperado

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}'_i \times (m_i \mathbf{v}'_i) + \mathbf{R} \times M\mathbf{V} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}_0, \quad (8-79)$$

en la que

$$\mathbf{L}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \quad (8-80)$$

se define por la cantidad de movimiento angular orbital del sistema con respecto al centro de masa, y  $\mathbf{L}_0 = \mathbf{R} \times M\mathbf{V}$  es la cantidad de movimiento angular orbital del centro de masa con respecto al origen. De la ecuación (8-68) se deduce que la de movimiento para la cantidad de movimiento angular,  $\mathbf{L}_0$ , del centro de masa es

$$\mathbf{N}_0 = \mathbf{R} \times \mathbf{F}^{\text{ext}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{R} \times M\mathbf{V}). \quad (8-81)$$

Luego, como el momento rotacional total se puede expresar por

$$\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \sum_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}) \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \mathbf{N}' + \mathbf{N}_0, \quad (8-82)$$

donde  $\mathbf{N}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}}$  es el momento rotacional externo total con respecto al centro de masa, se deduce de las ecuaciones (8-76) y (8-81) que la cantidad de movimiento angular orbital total con respecto al centro de masa satisface la ecuación

$$\mathbf{N}' = \frac{d}{dt} \mathbf{L}'. \quad (8-83)$$

Al tratar el movimiento de un sistema de partículas restringidas o condicionadas a permanecer a distancias fijas entre sí, encontraremos que estas ecuaciones dan la orientación para las de movimiento de un sistema restringido, o cuerpo rígido, como se le llama. Concretamente, emplearemos la ecuación (8-76) para el estudio del movimiento de un cuerpo rígido (Capítulo 9), con uno o más de sus puntos fijos en el espacio; mientras que las ecuaciones (8-68) y (8-83) se utilizarán cuando el cuerpo rígido no tenga ningún punto condicionado a permanecer fijo en el espacio.

### 8-8 Ecuaciones de Lagrange para un sistema de dos partículas \*

Un sistema de dos partículas tiene seis grados de libertad, es decir, su movimiento más general se puede describir en función de seis coordenadas independientes (3 por cada partícula). Estas pueden ser las seis coordenadas cartesianas que indican la posición de las dos partículas en el espacio. Por otra parte, pueden ser seis coordenadas cualesquiera que tengan una correspondencia biunívoca con las de los conjuntos de dos puntos  $(x_a, y_a, z_a)$  y  $(x_b, y_b, z_b)$ , de las partículas  $a$  y  $b$ . Es decir, para cada conjunto de valores de las coordenadas generalizadas,  $q_1, q_2, \dots, q_6$ , existirá uno y sólo un conjunto de valores  $(x_a, y_a, z_a)$  y  $(x_b, y_b, z_b)$ , y viceversa. Esto significa que las coordenadas cartesianas de las partículas son funciones univalentes de las seis coordenadas generalizadas, las cuales, a su vez, son funciones univalentes de dichas coordenadas cartesianas. Las tres coordenadas que indican la posición del centro de masa y las tres coordenadas que describen la posición relativa de una respecto a otra, de las partículas de un sistema de dos, constituyen un ejemplo de un conjunto de seis coordenadas generalizadas frecuentemente empleadas.

Antes de entrar en el estudio del método de Lagrange para obtener las ecuaciones generalizadas de movimiento, vamos a introducir un ligero cambio en nuestra notación, que nos indicará la analogía entre el proceso que seguiremos en la deducción de las ecuaciones de Lagrange para un sistema de dos partículas y el que hemos visto ya para una sola partícula. Además, aclarará la generalización a un mayor número de partículas.

En la nueva notación, las seis coordenadas cartesianas de las dos partículas  $a$  y  $b$ , se indicarán por  $x_i$ , siendo

$$\begin{aligned} x_1 &= x_a, & x_2 &= y_a, & x_3 &= z_a, \\ x_4 &= x_b, & x_5 &= y_b, & x_6 &= z_b. \end{aligned} \quad (8-84)$$

Usaremos una notación similar para las componentes cartesianas de los demás vectores. Por ejemplo, las componentes cartesianas de las fuerzas  $\mathbf{F}_a$  y  $\mathbf{F}_b$  que actúan sobre las dos partículas, respectivamente, se representarán por  $F_i$ , siendo que

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{ax}, & F_2 &= F_{ay}, & F_3 &= F_{az}, \\ F_4 &= F_{bx}, & F_5 &= F_{by}, & F_6 &= F_{bz}. \end{aligned} \quad (8-85)$$

\* Las ecuaciones obtenidas en esta sección para el sistema de dos partículas, son igualmente aplicables a un sistema de  $N$  partículas, con sólo aumentar los índices de  $\Sigma$  de 6 a  $3N$ .

Al especificar las componentes cartesianas de cualquier par de vectores similares que correspondan, respectivamente, a las dos partículas  $a$  y  $b$ , encontraremos conveniente disponer las seis componentes cartesianas de estos dos vectores en una matriz columna de seis elementos. Así, los dos vectores de posición  $\mathbf{r}_a$  y  $\mathbf{r}_b$ , se representarán simultáneamente por la matriz

$$(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad (8-86)$$

y, análogamente, las dos fuerzas,  $\mathbf{F}_a$  y  $\mathbf{F}_b$ , por

$$(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}. \quad (8-87)$$

En esta notación, las componentes cartesianas de las ecuaciones de movimiento de Newton para las dos partículas se representarán por los elementos de la ecuación matricial

$$(\mathbf{F}) = (\mathbf{m})(\mathbf{a}), \quad (8-88)$$

donde  $(\mathbf{m})$  es la matriz cuadrada diagonal definida por

$$(\mathbf{m}) = \begin{bmatrix} m_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_b \end{bmatrix}. \quad (8-89)$$

Desde un punto de vista matemático, lo que hemos hecho es establecer un espacio vectorial de seis dimensiones, en el que los vectores hexadimensionales están representados por una matriz hexadimensional. El vector más general,  $\mathbf{A}$ , de este espacio hexadimensional representa simultáneamente dos vectores tridimensionales que pertenecen, respectivamente, a cada una de las dos partículas. Un espacio vectorial hexadimensional de este tipo se considera como la suma directa de dos espacios tridimensionales, lo cual se indica por

$$|\mathbf{A}\rangle = |\mathbf{A}_a \oplus \mathbf{A}_b\rangle. \quad (8-90)$$

Con esta notación, también podemos, si lo deseamos, referirnos a uno solo de los vectores tridimensionales. Por ejemplo, el vector

$$|\mathbf{A}_a \oplus \mathbf{0}\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

especifica el vector tridimensional  $\mathbf{A}_a$  en la notación hexadimensional.

El álgebra de vectores en el espacio hexadimensional es igual a la de vectores en el espacio vectorial tridimensional.

Se dice que dos vectores  $|\mathbf{A}\rangle$  y  $|\mathbf{B}\rangle$  son iguales si los elementos correspondientes de sus representaciones matriciales lo son

$$A_i = B_i. \quad (8-91)$$

El vector nulo es aquel cuya representación matricial tiene ceros en todos sus elementos.

Dos vectores se pueden sumar para obtener otro vector. Luego si  $|\mathbf{C}\rangle$  es la suma de dos vectores  $|\mathbf{A}\rangle$  y  $|\mathbf{B}\rangle$ ,

$$|\mathbf{C}\rangle = |\mathbf{A}\rangle + |\mathbf{B}\rangle, \quad (8-92)$$

luego, los elementos de la matriz que representa a  $|\mathbf{C}\rangle$  están dados por

$$C_i = A_i + B_i. \quad (8-93)$$

También, se pueden multiplicar dos vectores de un espacio hexadimensional. El *producto escalar o interior* de éstos, designado por  $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ , se define por la ecuación

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^6 A_i B_i. \quad (8-94)$$

(Observaremos que estamos trabajando en sistema de coordenadas cartesianas, por lo que no habrá distinción entre  $A_i$  y  $A_i^*$ .) Aquí, como en el caso de tres dimensiones,  $(\mathbf{A}|\mathbf{A})$  se refiere el mismo vector  $\mathbf{A}$ . Sin embargo, la representación matricial de  $(\mathbf{A}|\mathbf{A})$  es una matriz fila

$$(\mathbf{A}|\mathbf{A}) \leftrightarrow [A_1, A_2, \dots, A_6],$$

mientras que el vector  $|\mathbf{A}\rangle$  siempre se representa por una matriz columna,

$$|\mathbf{A}\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix}.$$



Los vectores base ortogonales cartesianos unidad  $|\mathbf{e}_i\rangle$  de este espacio vectorial hexadimensional tienen representaciones matriciales cuyos elementos son las deltas de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases} \quad (8-95)$$

concretamente,

$$|\mathbf{e}_1\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{e}_2\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{etc.} \quad (8-96)$$

Un vector  $|\mathbf{A}\rangle$  se puede expresar en función de un conjunto de vectores base unidad ortogonales en la forma

$$|\mathbf{A}\rangle = \sum_{i=1}^6 A_i |\mathbf{e}_i\rangle, \quad (8-97)$$

donde

$$A_i = (\mathbf{e}_i | \mathbf{A}). \quad (8-98)$$

Este resultado se puede obtener haciendo el producto interior de la ecuación (8-97) por los vectores base unidad  $\langle \mathbf{e}_j |$ . La representación matricial de estos últimos es

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_1 | &\leftrightarrow [1, 0, 0, 0, 0, 0], \\ \langle \mathbf{e}_2 | &\leftrightarrow [0, 1, 0, 0, 0, 0], \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (8-99)$$

Como sucedía en el caso de los vectores tridimensionales (sección 1-5) no es, por supuesto, necesario expresar el vector  $|\mathbf{A}\rangle$  por una suma lineal de los vectores base unidad ortogonales  $|\mathbf{e}_i\rangle$ , si no que se podrán utilizar seis vectores cualesquiera  $|\mathbf{b}_i\rangle$  linealmente independientes. Es decir, que podemos establecer\*

$$|\mathbf{A}^*\rangle = \sum_{i=1}^6 \alpha_i^* |\mathbf{b}_i\rangle, \quad (8-100)$$

\* Recordemos que  $|\mathbf{A}\rangle$  y  $|\mathbf{A}^*\rangle$  se refieren al mismo vector  $\mathbf{A}$  (secciones 1-5 y 1-6). El asterisco, usado como superíndice, indica que estamos utilizando la descripción contravariante del vector  $\mathbf{A}$ . Si los vectores base que se emplean forman un conjunto ortonormal de vectores base, no habrá ninguna distinción entre  $|\mathbf{A}\rangle$  y  $|\mathbf{A}^*\rangle$ . También debemos observar que cuando se omite el asterisco en un producto escalar de dos vectores, éste se deberá evaluar utilizando las componentes de los vectores a lo largo de un conjunto de vectores base cartesianos y ortonormales.

donde las  $|\mathbf{b}_i\rangle$  constituyen un conjunto de vectores linealmente independientes determinados por sus representaciones de matrices columnas

$$|\mathbf{b}_i\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ b_{i3} \\ \vdots \\ b_{i6} \end{bmatrix}. \quad (8-101)$$

Los elementos  $b_{ij}$  de esta representación matricial del vector  $|\mathbf{b}_i\rangle$  son los productos interiores o escalares del vector  $|\mathbf{b}_i\rangle$  por los vectores base cartesianos  $\langle \mathbf{e}_j |$ . La ecuación (8-100) representa las seis ecuaciones

$$A_j = \sum_{i=1}^6 \alpha_i^* b_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (8-102)$$

que se obtendrían tomando el producto escalar de la ecuación (8-100) por  $\langle \mathbf{e}_j |$ . De la ecuación (8-102) se pueden despejar las  $\alpha_i^*$ . Una solución sólo es posible si el determinante de los coeficientes de las  $\alpha_i^*$  no se anula,

$$\det(b_{ij}) \neq 0. \quad (8-103)$$

Esta es también la condición necesaria y suficiente para que los  $|\mathbf{b}_i\rangle$  sean linealmente independientes.

Análogamente al caso de tres dimensiones, es posible expresar los escalares  $\alpha_i^*$  por el producto escalar de  $|\mathbf{A}\rangle$  y los vectores base recíprocos  $\langle \mathbf{b}_i |$ ,

$$\alpha_i^* = (\mathbf{b}_i | \mathbf{A}^*). \quad (8-104)$$

Los vectores  $\langle \mathbf{b}_i |$  son los recíprocos de los vectores base  $|\mathbf{b}_i\rangle$  y satisfacen la ecuación

$$\langle \mathbf{b}_i | \mathbf{b}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad (8-105)$$

cuya solución da las componentes de los vectores recíprocos. Por la simetría de esta ecuación, se desprende que los  $\langle \mathbf{b}_j |$  son, a su vez, los vectores recíprocos de los recíprocos  $\langle \mathbf{b}_i |$  y, por consiguiente, si ponemos

$$\langle \mathbf{A} | = \sum_{i=1}^6 \alpha_i \langle \mathbf{b}_i |, \quad (8-106)$$

entonces

$$\alpha_i = (\mathbf{A} | \mathbf{b}_i). \quad (8-107)$$

En otras palabras, como en el caso de los vectores tridimensionales, se halla que, en un espacio hexadimensional (o en general, en un espacio de  $n$  di-

mensiones), un vector queda determinado cuando se conoce su producto interior con seis (o  $n$ ) vectores linealmente independientes.

Estamos ahora en condiciones de establecer las ecuaciones generalizadas de movimiento. Igual que hicimos en el caso de tres dimensiones, al tratar con el conjunto de coordenadas generalizadas definidas por las ecuaciones de transformación

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_6)$$

o sus ecuaciones inversas

$$q_i = q_i(x_1, x_2, \dots, x_6), \quad (8-108)$$

definimos los vectores base generalizados por la ecuación

$$|\mathbf{b}_i\rangle = \frac{\partial}{\partial q_i} |\mathbf{r}\rangle. \quad (8-109)$$

Esto es, las componentes cartesianas del  $i$ -ésimo vector base están dadas por

$$b_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i}, \quad (8-110)$$

o bien, por

$$|\mathbf{b}_i\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_i} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_6}{\partial q_i} \end{bmatrix}. \quad (8-111)$$

La condición (8-103) de que estos seis vectores base sean linealmente independientes, expresa la no anulación del determinante jacobiano,

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_6)}{\partial(q_1, q_2, \dots, q_6)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial q_6} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial q_6} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_6}{\partial q_1} & \frac{\partial x_6}{\partial q_2} & \dots & \dots & \frac{\partial x_6}{\partial q_6} \end{vmatrix}. \quad (8-112)$$

Esta es también la condición necesaria y suficiente para que haya una correspondencia biunívoca entre el conjunto de valores de  $(x_1, x_2, \dots, x_6)$

de las componentes cartesianas del vector de posición y el conjunto de valores  $(q_1, q_2, \dots, q_6)$  de las seis coordenadas generalizadas.

Empleando la ecuación (8-105) se verifica fácilmente que, para transformaciones de las coordenadas generalizadas,  $q_i$ , independientes del tiempo, los vectores recíprocos están dados por

$$|\mathbf{b}_i\rangle \leftrightarrow \left[ \frac{\partial q_i}{\partial x_1}, \frac{\partial q_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial q_i}{\partial x_6} \right]. \quad (8-113)$$

El vector fuerza hexadimensional se puede representar, en función de las componentes cartesianas de los vectores base generalizados  $|\mathbf{b}_i\rangle$ , por medio de las fuerzas generalizadas que son los productos interiores del vector fuerza hexadimensional por los seis vectores base generalizados,

$$Q_i = (\mathbf{F}|\mathbf{b}_i) = \sum_{j=1}^6 b_{ij} F_j = \sum_{j=1}^6 F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}. \quad (8-114)$$

Las cantidades de movimiento generalizadas,  $p_i$ , que determinan la cantidad de movimiento lineal del sistema,

$$|\mathbf{p}\rangle = |m_a \mathbf{v}_a \oplus m_b \mathbf{v}_b\rangle,$$

son dadas por

$$p_i = (\mathbf{p}|\mathbf{b}_i) = \sum_{j=1}^6 m_{jj} \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}, \quad (8-115)$$

donde las  $m_{jj}$  son los elementos diagonales de la matriz de masas definida por la ecuación (8-89).

Igual que en la deducción que hicimos para obtener la ecuación (2-74) vemos que aquí también se verifica la relación

$$\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \quad (8-116)$$

lo que nos permite expresar las cantidades de movimiento generalizadas en la forma

$$p_i = \sum_{j=1}^6 m_{jj} \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{j=1}^6 \frac{1}{2} m_{jj} \dot{x}_j^2 = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} T, \quad (8-117)$$

siendo  $T$  la energía cinética total definida por

$$T = \sum_{j=1}^6 \frac{1}{2} m_{jj} \dot{x}_j^2. \quad (8-118)$$

De una manera semejante, las velocidades generalizadas o contravariantes de una transformación de coordenadas independientes del tiempo serán

$$v_i^* = (\mathbf{b}_i | \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \dot{x}_j = \dot{q}_i. \quad (8-119)$$

Finalmente, obtenemos las ecuaciones de movimiento generalizadas, que son los productos escalares de las ecuaciones de movimiento de Newton,

$$(\mathbf{F} | = \frac{d}{dt} (\mathbf{p} |, \quad (8-120)$$

por los vectores base  $|\mathbf{b}_i\rangle$ . Con lo que hallamos las ecuaciones de movimiento de Lagrange,

$$(\mathbf{F} | \mathbf{b}_i) = \frac{d}{dt} (\mathbf{p} | \mathbf{b}_i) - \left( \mathbf{p} \left| \frac{d}{dt} \mathbf{b}_i \right. \right),$$

o

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}. \quad (8-121)$$

El último término de la ecuación anterior se deduce de

$$\left( \mathbf{p} \left| \frac{d\mathbf{b}_i}{dt} \right. \right) = \sum_{j=1}^6 m_{jj} \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{j=1}^6 \frac{1}{2} m_{jj} \dot{x}_j^2 = \frac{\partial T}{\partial q_i}. \quad (8-122)$$

En el caso especial de fuerzas conservativas que son deducibles de una función de energía potencial

$$(\mathbf{F} | \leftrightarrow - \left[ \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_6} \right], \quad (8-123)$$

las fuerzas generalizadas serán expresadas por

$$Q_i = (\mathbf{F} | \mathbf{b}_i) = - \sum_{j=1}^6 \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Si las fuerzas son independientes de la velocidad, esta ecuación nos conduce a las ecuaciones de movimiento de Lagrange de la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_i} = 0. \quad (8-124)$$

En el caso de una sola partícula, esta ecuación representa también la de movimiento para fuerzas dependientes de la velocidad, tales como las magnéticas, que se pueden deducir de una función de energía potencial dependiente de la velocidad, como se expresa por

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial U}{\partial x_i}. \quad (8-125)$$

Análogamente al caso tridimensional para tales fuerzas dependientes de la velocidad que den las fuerzas generalizadas (sección 6-13)

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (8-126)$$

la ecuación (8-124) proporciona las ecuaciones de movimiento de un sistema de partículas.

### 8-9 Las ecuaciones de Lagrange y los teoremas de conservación

Las ecuaciones de Lagrange son apropiadas para reconocer las constantes del movimiento. En efecto, si el lagrangiano no es función de la coordenada generalizada  $q_i$  y si, además, la fuerza generalizada no conservativa  $Q_i^*$  se anula, entonces la ecuación de Lagrange para esta coordenada se reduce a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (8-127)$$

De esta ecuación deducimos que la  $i$ -ésima cantidad de movimiento generalizada del sistema es

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{constante}, \quad (8-128)$$

donde

$$L = T - U$$

es el *lagrangiano* del sistema. Llamaremos *coordenada despreciable* a la  $q_i$  para la cual  $\partial L / \partial q_i$  se anula. Un procedimiento para determinar la existencia de coordenadas despreciables, consiste en buscar las operaciones de simetría con las coordenadas que dejan la descripción del movimiento invariante.

La descripción del movimiento de un sistema de partículas queda invariante bajo una transformación de coordenadas, si la dependencia funcional del lagrangiano del nuevo sistema de coordenadas y de las nuevas velocidades generalizadas es la misma que su dependencia de las coordenadas antiguas y de las velocidades generalizadas antiguas.

Por ejemplo, consideremos una traslación del origen del sistema de coordenadas desde el punto  $O$  al punto  $O'$  que se encuentra a una distancia infinitesimal  $\Delta x_1$  de  $O$  sobre  $\mathbf{e}_1$ . Esta traslación del sistema de coordenadas se expresa por las ecuaciones de transformación

$$x'_1 = x_1 - \Delta x_1, \quad x'_i = x_i, \quad i \neq 1,$$

entre las componentes cartesianas,  $x_i$  y  $x'_i$ , que tiene el vector de posición,  $\mathbf{r}$  en los dos sistemas. El lagrangiano, en función de las nuevas coordenadas se relaciona con el lagrangiano expresado en función de las antiguas coordenadas en la forma siguiente

$$L'(x'_i, \dot{x}'_i, t) = L(x'_i + \Delta x_i, \dot{x}'_i, t) = L(x'_i, \dot{x}'_i, t) + \frac{\partial L}{\partial x_1} \Delta x_1,$$

puesto que

$$\Delta x_i = 0, \quad i \neq 1.$$

Por consiguiente,

$$L'(x'_i, \dot{x}'_i, t) = L(x'_i, \dot{x}'_i, t)$$

si  $\partial L / \partial x_1$  se anula. De esto, podemos establecer el principio de que el lagrangiano es invariante en una traslación del sistema de coordenadas a lo largo del eje  $x_i$ , que implique la anulación de la derivada parcial del lagrangiano con respecto a  $x_i$ , lo cual, a su vez, implica la conservación de la  $i$ -ésima componente de la cantidad de movimiento lineal, o sea de  $p_i$ .

Análogamente, si una rotación del sistema de coordenadas alrededor de un eje no influye en la descripción o expresión del movimiento del sistema, entonces la correspondiente componente de la cantidad de movimiento angular se conserva. Por ejemplo, en problemas en los que hay simetría esférica, tales como el movimiento de un sistema de partículas sometidas a una fuerza central y a fuerzas internas cuya forma es independiente de la orientación del sistema, el vector de cantidad de movimiento angular total es una constante del movimiento. Observemos que esta condición para las fuerzas internas es menos estricta o rigurosa que el requisito de que sean fuerzas entre dos cuerpos que satisfagan la tercera ley del movimiento de Newton, requisito que se invocó previamente para establecer la conservación de la cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas.

Otro teorema de conservación, el relativo a la conservación de la energía, se deduce de la anulación de la derivada del lagrangiano de un sistema conservativo con respecto al tiempo. Este resultado se puede obtener del teorema del trabajo y la energía. Concretamente, se halla a partir de la expresión siguiente

$$\sum_{i=1}^6 \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \Delta q_i = 0 \quad (8-129)$$

que (sección 6-14)

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^6 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \Delta t - \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \Delta t = 0$$

o bien

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^6 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) \Delta t + \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t = 0. \quad (8-130)$$

De donde, si  $\partial L / \partial t = 0$ , tendremos la función hamiltoniana, o hamiltoniano,

$$H(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^6 p_i \dot{q}_i - L \quad (8-131)$$

como una constante del movimiento.

Para transformaciones de coordenadas independientes del tiempo en las que

$$\sum_{i=1}^6 p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^6 p_i v_i^* = (\mathbf{p} | \mathbf{v}^*) = 2T,$$

el hamiltoniano representa la energía total

$$U = 2T - (T - U) = T + U. \quad (8-132)$$

Obsérvese que los teoremas de conservación están íntimamente ligados a la simetría del sistema.

Como ejemplo, consideraremos el movimiento de un sistema de electrones en un átomo bajo la acción combinada del campo eléctrico central debido al núcleo (considerado en reposo), su propia interacción coulombiana, y un campo magnético uniforme externo dirigido a lo largo del eje  $z$ . El lagrangiano de este sistema de electrones de carga  $-e$ , está dado por

$$L = \sum_{a=1}^z \frac{1}{2} m v_a^2 + \sum_{a=1}^z \frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0 r_a} - \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r_{ab}} + \frac{1}{2} \sum_a e \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{r}_a \times \mathbf{B}.$$

Si localizamos cada electrón empleando coordenadas esféricas, obtendremos la energía cinética total del sistema por medio de la expresión

$$\sum_a \frac{1}{2} m v_a^2 = \frac{1}{2} \sum_a m (\dot{r}_a^2 + r_a^2 \dot{\theta}_a^2 + r_a^2 \sin^2 \theta_a \dot{\phi}_a^2),$$

y para la distancia entre partículas, la expresión

$$r_{ab} = \sqrt{r_a^2 + r_b^2 + 2r_a r_b \cos \theta_{ab}},$$

donde

$$\cos \theta_{ab} = \cos \theta_a \cos \theta_b + \sin \theta_a \sin \theta_b \cos (\phi_a - \phi_b).$$

De la interacción entre el sistema y el campo magnético  $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ , obtenemos

$$\sum_a \frac{1}{2} e\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{r}_a \times \mathbf{B} = \frac{1}{2} eB \sum_a r_a^2 \sin^2 \theta_a \dot{\phi}_a.$$

Los ángulos azimutales,  $\phi$ , sólo aparecen en los términos  $\frac{1}{2} \sum_a e^2 / 4\pi\epsilon_0 r_{ab}$  del lagrangiano. Sin embargo, aparecen en tal forma que el término permanece invariante en un cambio o variación de la misma magnitud en todos los ángulos azimutales. Luego, el lagrangiano quedará invariante en una rotación alrededor del eje  $z$  y, por consiguiente, la cantidad de movimiento generalizada correspondiente se conservará. En una primera aproximación, despreciando los términos que contienen el campo magnético, la cantidad de movimiento generalizada es la componente  $z$  de la cantidad de movimiento angular orbital total del sistema de electrones.

Además, como  $L$  no es una función explícita del tiempo, la función hamiltoniana que representa la energía total del sistema es también una constante del movimiento.

Otra observación interesante fácil de verificar, empleando el lagrangiano, es la prueba del teorema de Larmor (sección 6-11) que establece que la descripción o expresión del movimiento de este sistema de partículas cargadas negativamente, con la misma razón de carga a masa, en el sistema de coordenadas que gira con una velocidad angular

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{e}{2m} \mathbf{B}$$

es, en una primera aproximación, la misma que la descripción en el sistema de referencia del laboratorio (del observador) si no hay campo magnético.

La transformación al nuevo sistema de coordenadas que gira con respecto al primero con la velocidad angular constante

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{e}{2m} \mathbf{B}$$

se representa por la relación entre las velocidades en los dos sistemas,

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_a.$$

Introduciendo este resultado en el lagrangiano, tendremos el nuevo lagrangiano para la descripción del movimiento en el sistema de coordenadas giratorio. Tendremos así

$$L' = \frac{1}{2} \sum_a m v_a'^2 + \sum_a \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_a} - \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{ab}} - \frac{1}{2} \sum_a m \left| \frac{e\mathbf{B}}{2m} \times \mathbf{r}_a \right|^2.$$

Para campos magnéticos pequeños y electrones que se mueven en órbitas limitadas dentro de una pequeña región del espacio, como sucede dentro de un átomo, el término en  $B^2$  es despreciable. Dentro de los primeros órdenes de  $B$ , la descripción del movimiento en el sistema giratorio es la misma que la del movimiento del sistema de electrones en el átomo en ausencia del campo magnético. Observaremos que este resultado sólo es válido en un sistema de partículas cargadas con igual relación carga-masa.

### 8-10 Ecuaciones de Lagrange para movimiento restringido de un sistema

La analogía entre la deducción de las ecuaciones generalizadas del movimiento de un sistema de dos partículas y la de las ecuaciones de movimiento de una sola partícula se presenta también en la modificación de las ecuaciones de movimiento de Lagrange cuando introducimos restricciones holónomicas de la forma

$$\Phi(q_1, q_2, \dots, q_6) = 0. \quad (8-133)$$

El hecho de introducir una fuerza restrictiva de la forma expresada por

$$\langle \mathbf{R} | \leftrightarrow \lambda \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_6} \right) \quad (8-134)$$

se apoya en que, para todos los desplazamientos posibles compatibles con las restricciones, estas fuerzas restrictivas no realizan trabajo. Este hecho se expresa por la ecuación

$$\Delta W_c = \langle \mathbf{R} | \Delta \mathbf{r} \rangle = \sum_{i=1}^6 R_i \Delta x_i = 0. \quad (8-135)$$

Como para cualesquiera de dichos desplazamientos compatibles,

$$\Delta \Phi = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Delta x_i = 0,$$

se deduce que las componentes de la fuerza restrictiva  $\langle \mathbf{R} |$  deben ser proporcionales a los elementos del gradiente de  $\Phi$  expresados por la ecuación (8-134).

La fuerza restrictiva generalizada introducida por medio de la ecuación de restricción

$$\Phi(q_1, q_2, \dots, q_6) = 0$$

se halla que está dada por

$$Q_i = \langle \mathbf{R} | \mathbf{b}_i \rangle = \sum_{j=1}^6 \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}. \quad (8-136)$$

Si hay más de una ecuación de restricción de la forma  $\Phi^{(k)}(q_1, \dots, q_6) = 0$ , la fuerza total restrictiva será

$$Q_i = \sum_k (\mathbf{R}^{(k)} | \mathbf{b}_i) = \sum_{k,j} R_j^{(k)} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \sum_{k,j} \lambda^{(k)} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \sum_k \lambda^{(k)} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial q_i}. \quad (8-137)$$

Con la introducción de fuerzas restrictivas generalizadas, las ecuaciones de Lagrange para fuerzas conservativas se convierten en

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_k \lambda^{(k)} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial q_i}. \quad (8-138)$$

Observaremos que el argumento que usamos para llegar a la ecuación (8-134) de la fuerza restrictiva introducida por una restricción holonómica se puede emplear también para obtener la modificación de las ecuaciones de Lagrange cuando el sistema satisface restricciones no holonómicas y no disipativas, las cuales se expresan en la forma no integrable

$$\sum_{i=1}^6 \eta_i \Delta x_i = \sum_{j=1}^6 \xi_j \Delta q_j = 0, \quad (8-139)$$

donde  $\eta_i$  y  $\xi_j$ , son funciones de las coordenadas y de sus derivadas con respecto al tiempo.

Si se supone que las fuerzas de restricción no holonómicas no realizan trabajo, entonces por una comparación de las ecuaciones (8-139) y (8-135) se puede establecer

$$R_i = \lambda \eta_i. \quad (8-140)$$

En el caso de la existencia de varias restricciones no holonómicas sobre el sistema, un hecho que se indica por el superíndice ( $k$ ),

$$\sum_i \eta_i^{(k)} \Delta x_i = \sum_j \xi_j^{(k)} \Delta q_j = 0, \quad (8-141)$$

expresaremos las componentes de la  $k$ -ésima fuerza restrictiva por

$$R_i^{(k)} = \lambda^{(k)} \eta_i^{(k)}. \quad (8-142)$$

Obtenemos así la fuerza restrictiva generalizada total

$$Q_j = \sum_k \lambda^{(k)} \xi_j^{(k)}, \quad (8-143)$$

que nos da las ecuaciones de Lagrange en la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_k \lambda^{(k)} \xi_i^{(k)}. \quad (8-144)$$

En este caso, también se verifican las observaciones que hicimos en la sección 5-4 sobre la reducción del número de coordenadas por el empleo de ecuaciones holonómicas de restricción. Si no nos interesa hallar las fuerzas restrictivas, podemos reducir el problema original al número mínimo de coordenadas independientes necesarias para la descripción del movimiento.

## 8-11 Aplicaciones de las ecuaciones de Lagrange

En esta sección ilustraremos el empleo del método de Lagrange para expresar las ecuaciones de movimiento, considerando varios problemas importantes solubles de sistemas de  $N$  partículas en que interviene el movimiento de éstas sobre una configuración estable. La teoría general de las oscilaciones pequeñas se tratará en el Capítulo 11.

a) *El péndulo doble.* Para determinar las ecuaciones de movimiento del péndulo plano doble de la figura 8-9, expresaremos primero las ener-

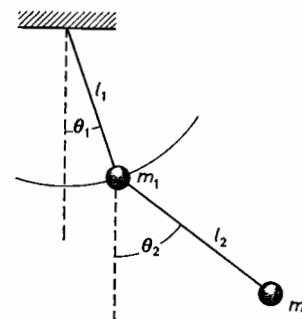


FIG. 8-9. Péndulo doble.

gías cinética y potencial en función de las coordenadas generalizadas y las velocidades.

La energía potencial en función de los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  que forman las cuerdas con la vertical, se halla fácilmente que es

$$U = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2),$$

donde hemos utilizado las ecuaciones de restricción,

$$r_1 = l_1 \quad \text{y} \quad r_2 = l_2$$

para eliminar  $r_1$  y  $r_2$  de  $U$ .

Similarmente, cuando utilizamos que  $\dot{r}_1 = \dot{r}_2 = 0$ , la energía cinética de la primera partícula, que se mueve en una circunferencia de radio constante  $l$ , será

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2,$$

y la energía cinética de la segunda partícula (problema 3-11) es

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (l_1 \dot{\theta}_1 \operatorname{sen} \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \operatorname{sen} \theta_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2.$$

En consecuencia, la energía cinética total del sistema se halla que es

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos (\theta_2 - \theta_1).$$

De ésta y la ecuación (8-124) deduciremos las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos (\theta_2 - \theta_1)]$$

$$+ (m_1 + m_2) l_1 g \operatorname{sen} \theta_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \operatorname{sen} (\theta_2 - \theta_1) = 0$$

y

$$\frac{d}{dt} [m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos (\theta_2 - \theta_1)]$$

$$+ m_2 l_2 g \operatorname{sen} \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \operatorname{sen} (\theta_2 - \theta_1) = 0.$$

La parte interesante de este ejemplo es el caso en que los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  sean tan pequeños que podamos despreciar todos los términos menos los de las primeras potencias de  $\theta_i$  y  $\dot{\theta}_i$ . Dentro de esta aproximación, las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) l_1 g \theta_1 = 0$$

y

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 g \theta_2 = 0.$$

Estas son las ecuaciones de movimiento de un par de osciladores armónicos simples acoplados, cuyas ecuaciones generales tienen la forma

$$L_1 x_1 + L_2 x_2 = 0, \quad L_3 x_1 + L_4 x_2 = 0, \quad (8-145)$$

siendo en este caso los  $L_i$  operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes. Un método general para resolver este par de ecuaciones simultáneas consiste en aplicar el operador  $L_3$  a la primera ecuación y el  $L_1$  a la segunda. Como los operadores lineales con coeficientes constantes son conmutativos, esto es, como

$$L_1 L_3 = L_3 L_1, \quad (8-146)$$

se sigue que restando las ecuaciones resultantes, se halla la ecuación

$$(L_3 L_2 - L_1 L_4) x_2 = 0. \quad (8-147)$$

Semejantemente, hallamos la ecuación

$$(L_3 L_2 - L_1 L_4) x_1 = 0. \quad (8-148)$$

[Pregunta: ¿Cómo podemos hallar las ecuaciones satisfechas por  $x_1$  y  $x_2$  cuando los operadores lineales de la ecuación (8-145) no son conmutativos?] Como los  $L_i$  son operadores diferenciales con coeficientes constantes, será claro que el operador  $(L_3 L_2 - L_1 L_4)$  es también uno diferencial con coeficientes constantes. Esto significa que es probable que las soluciones de la ecuación (8-145) sean expresables en la forma

$$x_1 = A e^{\alpha t}, \quad x_2 = B e^{\alpha t}, \quad (8-149)$$

donde  $\alpha$  es una raíz de la ecuación característica que se obtiene para el operador  $(L_3 L_2 - L_1 L_4)$ . Para hallar la relación entre las constantes  $A$  y  $B$  introduciremos la solución de ensayo o tanteo (8-149) en las ecuaciones (8-145), lo que nos da las

$$L_1(\alpha) A + L_2(\alpha) B = 0 \quad (8-150)$$

y

$$L_3(\alpha) A + L_4(\alpha) B = 0,$$

donde  $L_i(\alpha)$  es el operador lineal  $L_i(d/dt)$  con  $d/dt$  substituido por  $\alpha$ . Estas ecuaciones dan una solución no trivial para  $A$  y  $B$ , puesto que  $\alpha$  es una raíz de la ecuación

$$L_3(\alpha) L_2(\alpha) - L_1(\alpha) L_4(\alpha) = 0. \quad (8-151)$$

De lo que se sigue que

$$B = - \frac{L_1(\alpha)}{L_2(\alpha)} A, \quad (8-152)$$

que nos da, para las raíces no degeneradas, la solución general

$$x_1 = \sum_i A_i e^{\alpha_i t}, \quad x_2 = - \sum_i A_i \frac{L_1(\alpha_i)}{L_2(\alpha_i)} e^{\alpha_i t}. \quad (8-153)$$

El caso con raíces degeneradas se estudiará en el Capítulo 11, en el cual también demostraremos que para un par de osciladores acoplados sin amortiguamiento, como los dos péndulos que consideramos, las raíces de la ecuación secular son imaginarias. Las soluciones se pueden expresar, por consiguiente, por la suma de dos términos sinusoidales

$$x_1 = A_1 \operatorname{sen} (\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \operatorname{sen} (\omega_2 t + \phi_2)$$

y

$$x_2 = -A_1 \frac{L_1(i\omega_1)}{L_2(i\omega_1)} \operatorname{sen} (\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \frac{L_1(i\omega_2)}{L_2(i\omega_2)} \operatorname{sen} (\omega_2 t + \phi_2).$$

Las constantes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  que aparecen en la solución general se determinan a partir de las posiciones y velocidades iniciales de las partículas.

Con condiciones iniciales apropiadas, una u otra de las dos amplitudes  $A_1$  o  $A_2$  pueden anularse. En este caso, los péndulos oscilarán con la misma frecuencia. Tal tipo de oscilación recibe el nombre de *modo normal de oscilación* del sistema. Entonces, podemos expresar el movimiento general por una suma lineal de los modos normales de oscilación.

b) *Dos osciladores acoplados*. Otro ejemplo interesante es el de dos masas iguales unidas entre sí y a dos paredes fijas por resortes idénticos, como se indica en la figura (8-10). El movimiento está restringido a tener lugar sobre una recta y no es amortiguado. La energía cinética del sistema está dada por

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2, \quad (8-154)$$

y la energía potencial de los resortes por

$$U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2. \quad (8-155)$$

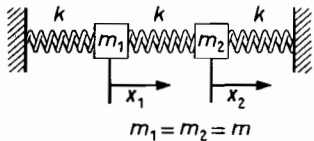


FIG. 8-10. Dos osciladores acoplados.

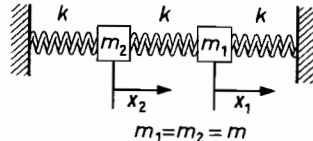


FIG. 8-11. Dos osciladores acoplados.

Estas fórmulas de la energía cinética y potencial, conducen a las dos ecuaciones de movimiento

$$m\ddot{x}_1 + m\omega_0^2x_1 - m\omega_0^2(x_2 - x_1) = 0 \quad (8-156)$$

y

$$m\ddot{x}_2 + m\omega_0^2x_2 + m\omega_0^2(x_2 - x_1) = 0, \quad (8-157)$$

en las que hemos puesto para la constante del resorte

$$k = m\omega_0^2 \quad (8-158)$$

y además  $m_1 = m_2 = m$ . Suponiendo, como se esbozó antes, una solución de la forma

$$x_1 = Ae^{at}, \quad x_2 = Be^{at}, \quad (8-159)$$

obtenemos las ecuaciones

$$(\alpha^2 + 2\omega_0^2)A - \omega_0^2B = 0$$

y

$$-\omega_0^2A + (\alpha^2 + 2\omega_0^2)B = 0. \quad (8-160)$$

Estas son dos ecuaciones simultáneas homogéneas para las constantes  $A$  y  $B$ , que sólo tienen solución si el determinante de los coeficientes se anula

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \alpha^2 + 2\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (8-161)$$

Las raíces de esta ecuación son

$$\alpha = \pm i\omega_0, \quad \pm i\sqrt{3}\omega_0. \quad (8-162)$$

Su solución general se puede expresar, por consiguiente, en la forma

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) + A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2)$$

y

$$x_2 = B_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) + B_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2),$$

en las que, con la ecuación (1-160) se deduce que

$$B_j = \frac{2\omega_0^2 + \alpha_j^2}{\omega_0^2} A_j, \quad j = 1, 2. \quad (8-163)$$

Por consiguiente, la solución general se expresa por

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) + A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2)$$

y

$$x_2 = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) - A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2). \quad (8-164)$$

Las constantes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  se hallan a partir de los valores iniciales de la posición y la velocidad de las partículas. Se halla que, escogiendo de una forma adecuada las condiciones iniciales,  $A_1$  o bien  $A_2$  puede anularse. Observaremos que en el primer modo de oscilación ( $A_2 = 0$ ), las dos partículas oscilan conjuntamente en fase, mientras que en el segundo ( $A_1 = 0$ ) están defasadas  $\pi$  radianes. Considerando la simetría del problema podríamos ver que las soluciones tendrían esta propiedad.

Por ejemplo, observaremos que, en este problema, un intercambio de las dos partículas da las mismas ecuaciones de movimiento. Esto lo podemos hacer intercambiando los números asignados a las partículas, con lo que obtendríamos un sistema como el de la figura 8-11. Siendo iguales que antes las ecuaciones de movimiento del nuevo sistema, las soluciones generales serán idénticas. Esto, como veremos en el Capítulo 10, significa que la solución general de este problema se puede descomponer en la suma lineal de dos soluciones, una de las cuales es par (o sea, indiferente a un cambio de signo de la variable) y la otra impar. En otras palabras, las soluciones de



los modos normales de oscilación o vibración es probable que sean o bien simétricas, o bien antisimétricas, respecto a un intercambio de los subíndices de las coordenadas. Por consiguiente la elección de coordenadas generalizadas que sean simétricas y antisimétricas con respecto a un intercambio de las partículas será probable que nos conduzca a dos ecuaciones de movimiento más simples. Realmente se ve que el lagrangiano expresado en función de las coordenadas generalizadas

$$q_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \text{y} \quad q_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

o sea,

$$x_1 = q_1 + q_2 \quad \text{y} \quad x_2 = q_1 - q_2,$$

conduce a las ecuaciones de movimiento independientes mucho más simples

$$\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 = 0 \quad \text{y} \quad \ddot{q}_2 + 3\omega_0^2 q_2 = 0.$$

Las soluciones de estas ecuaciones son los modos normales obtenidos anteriormente. Las coordenadas  $q_1$  y  $q_2$  se conocen como *coordenadas normales* del sistema. Las consideraciones de simetría son muy útiles para simplificar la resolución de problemas de pequeñas vibraciones. Se han utilizado mucho en el análisis de los modos normales de vibración de las moléculas. Este tema se expondrá más a fondo en el Capítulo 11.\*

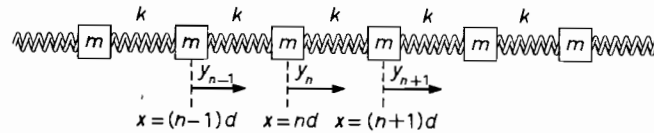


FIG. 8-12. Conjunto infinito de osciladores acoplados.

c) *Conjunto infinito de osciladores acoplados.* En este ejemplo, consideraremos un conjunto infinito de partículas idénticas unidas, como se ve en la figura 8-12, por resortes idénticos de constante

$$k = m\omega_0^2.$$

Numeraremos las partículas de  $-\infty$  a  $\infty$  y llamaremos  $y_n$  al desplazamiento de la  $n$ -ésima partícula a partir de su posición de equilibrio,  $x = nd$ , donde  $d$  es la distancia en el equilibrio entre partículas vecinas. La ecuación de movimiento de la  $n$ -ésima partícula se halla fácilmente con el lagrangiano

$$L = T - U,$$

\* Gerhard Herzberg, *Molecular Spectra and Molecular Structure*. Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1950.

donde

$$T = \sum \frac{1}{2} m \dot{y}_n^2$$

y

$$U = \sum \frac{1}{2} m \omega_0^2 (y_{n+1} - y_n)^2.$$

Se halla que es

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = m \omega_0^2 (y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n).$$

Como en el ejemplo anterior, es apropiado intentar encontrar una solución utilizando

$$y_n = A_n e^{i\omega t}$$

como una solución de tanteo o ensayo para la  $n$ -ésima partícula. Sin embargo, esto nos conduciría al conjunto infinito de ecuaciones simultáneas difíciles de resolver

$$-\omega^2 A_n = \omega_0^2 (A_{n+1} + A_{n-1} - 2A_n).$$

Por consiguiente, es mejor investigar las condiciones de simetría del problema para ver qué simplificación resulta de ellas. Entre las diversas operaciones de simetría que existen en este problema, está la invariancia de las ecuaciones de movimiento con respecto a un cambio en la numeración de las partículas, o lo que es equivalente, a la situación de las partículas a lo largo del eje  $x$ . Un cambio en un entero de los números asignados a las partículas no influirá en las ecuaciones de movimiento. Además, dos cambios de este tipo, el primero aumentando el número dado a la partícula en la cantidad  $m_1$  y el segundo, en la  $m_2$ , son equivalentes a cambiarlos por una sola operación en la  $m_1 + m_2$ . Esta es una propiedad de las funciones exponenciales e implica que la solución general para una partícula tiene la misma forma que la solución general para otra partícula cualquiera y que las constantes que aparecen en la solución difieren, a lo más, en un factor exponencial que se puede expresar en la forma  $e^{ifnd}$ .

Veamos ahora cómo aparece este factor. Consideremos la ecuación de movimiento de la  $n$ -ésima partícula, siendo grande el valor de  $n$ . En este caso, el segundo miembro de la ecuación de movimiento puede tomarse como una aproximación de la segunda derivada parcial de  $y_n$  considerada como una función continua de  $n$ . Obsérvese que  $\Delta n = 1$ , y que, por tanto,

$$\frac{\partial y_{n+1}}{\partial n} \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta n} = y_{n+1} - y_n$$

y

$$\frac{\partial y_n}{\partial n} \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta n} = y_n - y_{n-1}.$$

Luego

$$\frac{\partial^2 y_n}{\partial n^2} \approx \frac{(\partial y_{n+1}/\partial n) - (\partial y_n/\partial n)}{\Delta n} \approx (y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n).$$

La ecuación que resulta con la solución de tanteo

$$y_n = A_n e^{i\omega t}$$

se podrá expresar, entonces, aproximadamente por

$$-\omega^2 A_n = \omega_0^2 \frac{\partial^2 A_n}{\partial n^2} = (\omega_0 d)^2 \frac{\partial^2 A_n}{\partial (nd)^2}.$$

Esta ecuación tiene las soluciones

$$A_n = A e^{\pm i(\omega/\omega_0 d)nd},$$

que dan, por consiguiente,

$$y_n = A e^{i[\omega t \pm (\omega/\omega_0 d)nd]}.$$

Escogiendo ahora

$$y_n = A e^{i(\omega t + \mathfrak{f}nd)}$$

como una nueva solución de tanteo, tenemos

$$-\omega^2 A = \omega_0^2 A (e^{i\mathfrak{f}d} + e^{-i\mathfrak{f}d} - 2) = -\left(4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\mathfrak{f}d}{2}\right) A.$$

Esta ecuación nos da los valores de  $\mathfrak{f}$  para los que es posible una solución

$$\pm \mathfrak{f} = \frac{2}{d} \sin^{-1} \left( \frac{\omega}{2\omega_0} \right).$$

Se observará que al crecer  $\omega$  de cero a  $2\omega_0$ ,  $|\mathfrak{f}|$  varía de cero a  $\pi/d$ . Con valores de  $\omega$  mayores de  $2\omega_0$ ,  $\mathfrak{f}$  se vuelve imaginaria. Esto significa, como veremos, que las oscilaciones de frecuencia  $\omega$  mayor de  $2\omega_0$  no se propagarán. Por este motivo llamamos *frecuencia de corte* el valor  $\omega = 2\omega_0$ , que es la máxima frecuencia a la que una de las partículas podría, por ejemplo, ser impulsada de modo que las demás capten la vibración.

Observaremos que la parte real o imaginaria de

$$y_n = A e^{i(\omega t + \mathfrak{f}nd)}$$

representa valores específicos de las funciones

$$y = A \cos(\omega t + \mathfrak{f}x) \quad \text{y} \quad y = A \sin(\omega t + \mathfrak{f}x),$$

que son las soluciones de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Representan ellas ondas armónicas que se propagan en los sentidos positivos y negativo del eje  $x$  con una velocidad (Capítulo 12)

$$V = \omega/\mathfrak{f}.$$

En consecuencia, podemos considerar los modos de las oscilaciones encontradas como ondas que se propagan. Con valores pequeños de  $\omega$  y  $\mathfrak{f}$  para los que

$$\omega = 2\omega_0 \sin \frac{\mathfrak{f}d}{2} = \omega_0 \mathfrak{f}d,$$

la velocidad aproximada de propagación es independiente de la frecuencia, y se halla que está dada por

$$V = \omega/\mathfrak{f} = \omega_0 d = V_0.$$

Esta misma situación se presenta también para valores pequeños de  $d$  en un gran intervalo de frecuencias.

Debemos observar que el aspecto de una frecuencia de corte es característico de cualquier estructura periódica. Por ejemplo, para la frecuencia y la incidencia en que se presenta una difracción de Bragg (sección 1-5), esto es, cuando

$$2d \sin \theta = m\lambda,$$

la onda electromagnética no se propaga en el cristal.

En conclusión, procederemos a demostrar cómo se puede utilizar la solución más general para el conjunto infinito de osciladores acoplados en la determinación de la solución del ejemplo anterior. Este problema se puede considerar que comprende un conjunto infinito de partículas, en que las  $n = 0$  y  $n = 3$  están restringidas a permanecer en reposo. Esto requiere que igualem a cero las soluciones para las partículas  $n = 0$  y  $n = 3$ . La solución general

$$y_n = e^{i\omega t} (A e^{i\mathfrak{f}nd} + B e^{-i\mathfrak{f}nd})$$

da, por consiguiente

$$y_0 = e^{i\omega t} (A + B) = 0$$

y

$$y_3 = e^{i\omega t} (A e^{3i\mathfrak{f}d} + B e^{-3i\mathfrak{f}d}) = 0.$$

La primera de estas dos ecuaciones da  $A = -B$  y, entonces, con la segunda hallamos  $\sin 3\mathfrak{f}d = 0$ . Esta ecuación sólo se satisface si  $3\mathfrak{f}d = \pi$  o  $2\pi$ , por lo que

$$\omega = 2\omega_0 \sin \frac{\mathfrak{f}d}{2} = 2\omega_0 \sin \frac{\pi}{6} = \omega_0$$

o sea,

$$\omega = 2\omega_0 \sin \frac{\pi}{3} = \omega_0 \sqrt{3},$$

lo que concuerda con los resultados hallados antes. Las soluciones generales para las partículas 1 y 2 se pueden, por consiguiente, expresar por

$$y_1 = \text{Re} \left( \frac{2A_1}{\sqrt{3}} e^{i\phi_1} e^{i\omega_0 t} \sin \frac{\pi}{3} + \frac{2A_2}{\sqrt{3}} e^{i\phi_2} e^{i\omega_0 \sqrt{3}t} \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_0 \sqrt{3}t + \phi_2)$$

y

$$y_2 = \text{Re} \left( \frac{2A_1}{\sqrt{3}} e^{i\phi_1} e^{i\omega_0 t} \sin \frac{2\pi}{3} + \frac{2A_2}{\sqrt{3}} e^{i\phi_2} e^{i\omega_0 \sqrt{3}t} \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$= A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_0 \sqrt{3}t + \phi_2).$$

El ejemplo de esta sección y su extensión a los casos más complicados en dos y tres dimensiones son importantes en el estudio de los modos de vibración de las oscilaciones de los cristales.

## Problemas

8-1. Una partícula estacionaria de masa  $3m$  Kg, estalla en tres piezas iguales dos de las cuales vuelan en direcciones perpendiculares entre sí, una con una velocidad de  $2a$  m/seg y la otra de  $3a$  m/seg. ¿Cuál es la magnitud, dirección y sentido de la cantidad de movimiento del tercer fragmento? La explosión tiene lugar en  $10^{-5}$  seg. Hállese la fuerza media que actúa sobre cada pieza durante la explosión.

8-2. Un núcleo, originalmente en reposo, se desintegra por la emisión de un electrón, cuya cantidad de movimiento es  $1.73$  Mev/ $c$  y, perpendicularmente a la dirección del electrón, de un neutrino cuya cantidad de movimiento es  $1.00$  Mev/ $c$ . [El megaelectrón-volt, *Mev* (un millón de electrón-volts) es una unidad de energía usada en la física moderna que es igual a  $1.59 \times 10^{-6}$  ergs. Correspondientemente, el Mev/ $c$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz, es una unidad de cantidad de movimiento lineal igual a  $5.33 \times 10^{-16}$  g-cm/seg.] ¿En qué dirección y sentido reculará el núcleo? ¿Cuál será su cantidad de movimiento en Mev/ $c$ ? Si la masa del núcleo restante es  $3.90 \times 10^{-22}$  g, ¿cuál será su energía cinética en electrón-volts?

8-3. En una colisión de frente, una partícula con una velocidad inicial  $v_0$ , choca con otra estacionaria de la misma masa. Hállese la velocidad de las 2 partículas después de la colisión, si *a*) se pierde la mitad de la energía cinética original, *b*) la energía cinética final es 50% mayor que la original.

8-4. Una partícula de masa  $M_1$  y velocidad  $V_1$  es capturada por un núcleo en reposo, y otra partícula ligera de masa  $M_2$  es expelida con una velocidad  $V_2$  en ángulo recto con la trayectoria de la primera, reculando el resto del núcleo (de masa  $M_3$ ) con una velocidad  $V_3$ . Demuéstrese que la energía cinética de  $M_2$  es

$$T_2 = \frac{M_3}{M_2 + M_3} \left( Q + \frac{M_3 - M_1}{M_3} T_1 \right),$$

donde  $Q$  es la energía liberada o desprendida en la reacción.

8-5. Se observa que la partícula proyectil de una colisión elástica se dispersa o desvía un ángulo  $\theta_1$ , mientras que se ve que la trayectoria de la partícula blanco, inicialmente en reposo, forma un ángulo  $\theta_2$  con respecto a la dirección de incidencia de la proyectil. Hállese la relación  $m_1/m_2$  de las masas de las dos partículas.

8-6. Una partícula de masa  $m_1$  y cantidad de movimiento  $p_1$  choca con otra de masa  $m_2$  que se halla en reposo. Se produce una reacción de modo que las dos partículas resultan con las masas  $m_3$  y  $m_4$ , las cuales salen del lugar de la colisión formando los ángulos  $\theta_3$  y  $\theta_4$  con la trayectoria original de  $m_1$ . Hállese la energía  $Q$  absorbida en la reacción en función de las masas, los ángulos y  $p_1$ .

8-7. En una reacción nuclear en que se conoce  $Q$ , se miden las direcciones de la partícula incidente de masa  $m_1$ , y de las partículas resultantes de masas  $m_3$  y  $m_4$ . Exprésese la energía de la partícula incidente en función de las masas de las partículas, la energía de reacción  $Q$  y los ángulos  $\theta_3$  y  $\theta_4$  de las trayectorias de las partículas resultantes, con respecto a la dirección de la incidente.

8-8. Una gota de lluvia de masa inicial  $m_0$  gramos, cae, partiendo del reposo, a través de una nube cuyo espesor es de  $a$  cm. A medida que cae va ganando masa a razón de  $b$  g/seg. Las gotitas que forman la nube están en reposo con relación a la Tierra. El movimiento de la gota encuentra una resistencia proporcional a su velocidad. *a*) Escríbase la ecuación diferencial del movimiento de la gota. *b*) Hállese la velocidad de la gota al salir de la nube si, durante el paso por ella, duplica su masa. *c*) Suponiendo que la resistencia del aire dentro y fuera de la nube es la misma ¿cuál será la velocidad límite de la gota después que sale de la nube?

8-9. Se desea construir un cohete de dos etapas capaz de acelerar una carga útil de 100 Kg hasta una velocidad de 6,000 m/seg en vuelo libre. (En un cohete de dos etapas, una vez que se ha consumido todo el combustible de la primera etapa, ésta se separa y luego se inicia la ignición o encendido de la segunda.) Supóngase que el combustible usado puede alcanzar una velocidad de escape de 1,500 m/seg y que las exigencias estructurales hacen que un cohete vacío (sin carga útil) pese un 10% del combustible que puede llevar. Determinése la elección óptima de las masas de las dos etapas, de modo que el peso de despegue sea mínimo. Demuéstrese que es imposible construir un cohete de una sola etapa que haga lo que éste.

8-10. Demostrar que

$$\Phi = \frac{1}{2}(\pi - \theta')$$

es el ángulo de desvío o dispersión de una partícula desviadora con respecto a la dirección de incidencia de la partícula desviada en un choque elástico.

8-11. Establecer las ecuaciones de Lagrange para la máquina de Atwood compuesta, de la figura 8-13. (En ésta el cuerpo de masa  $m_2$  de una máquina de Atwood simple ha sido substituido por una segunda polea sobre la que pasa una cuerda ligera [o sin peso] de la que penden los dos cuerpos de masas  $m_2$  y  $m_3$  en uno y otro extremo.) Despréciese el efecto de las poleas en el movimiento.

8-12. Dos puntos materiales de masas  $m_1$  y  $m_2$  están unidos por una cuerda que pasa por un agujero de una mesa lisa, de modo que  $m_1$  descansa sobre la superficie de ésta mientras que  $m_2$  cuelga. Si  $m_2$  sólo se mueve verticalmente, ¿cuál será un buen conjunto de coordenadas generalizadas para el sistema? Escríbanse las ecuaciones de Lagrange correspondientes y, si es posible, explíquese el significado físico de algunas de ellas. Redúzcase el problema a una sola ecuación diferencial de segundo orden y hállese la primera integral de la misma. ¿Cuál es su significado físico? (Considérese el movimiento de tal magnitud que nunca pasen  $m_1$  ni  $m_2$  por el agujero.) Expóngase cualitativamente el movimiento probable.

8-13. Una cuenta de masa  $3m$  puede deslizarse horizontalmente sin rozamiento por un alambre como se indica en la figura 8-14. Unido a la cuenta hay un péndulo doble. Si, en una posición cercana a la de su equilibrio, se deja al sistema en libertad, a partir del reposo, las masas oscilan en el plano de la figura a un lado y otro de la vertical. a) Escribanse las ecuaciones de Lagrange del movimiento del

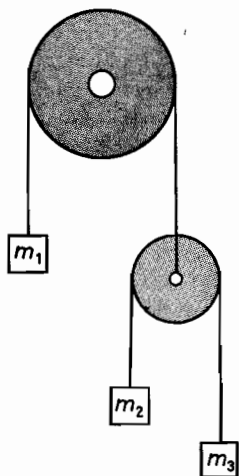


FIG. 8-13

sistema. b) Hállense las aceleraciones cuando los desplazamientos y las velocidades son pequeños.

8-14. Un péndulo plano de longitud  $l$ , cuya lenteja o bola tiene masa  $m$ , está unido a un resorte de constante  $k$ , como se ve en la figura 8-15. Despreciamos las masas del alambre soportador y del resorte por ser muy pequeñas en relación con  $m$ . La segunda lenteja tiene su movimiento restringido para que sea vertical. a) Escribanse las ecuaciones de Lagrange del movimiento del sistema. b) Interpretense físicamente los términos de estas ecuaciones.

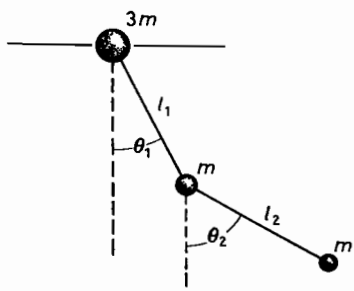


FIG. 8-14

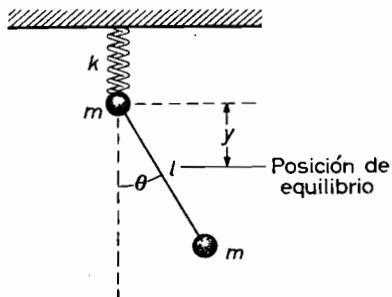


FIG. 8-15

8-15. En la figura 8-16 se muestra un regulador centrífugo o de watt de una máquina de vapor. Dos bolas, cada una de masa  $m$ , están unidas por cuatro brazos

articulados, cada uno de longitud  $l$ , a unos manguitos colocados sobre un eje redondo vertical. El manguito superior está sujeto al eje; el inferior, de masa  $M$ , se puede deslizar libremente hacia arriba o hacia abajo a lo largo del eje, a medida que las bolas se alejan o se acercan al mismo. El sistema del eje y las bolas gira con velocidad angular constante,  $\omega$ . a) Establézcase la ecuación de movimiento, despreciando

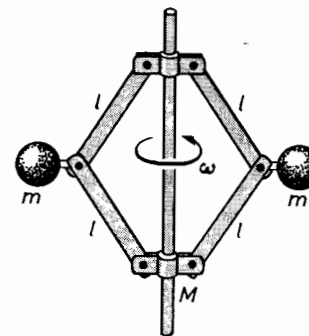


FIG. 8-16

el peso de los brazos y el eje. Estúdiense el movimiento por el método de la energía (sección 4-7). b) Determinése la altura,  $z$ , del manguito inferior por encima de su posición más baja, en función de  $\omega$  para la rotación estacionaria de las bolas y determinése la frecuencia de las pequeñas oscilaciones de  $z$  a un lado y otro de su valor estacionario.

8-16. Analícese el movimiento del regulador del problema 8-15, si la velocidad angular del eje no está restringida a  $\omega$ , sino que gira libremente sin que tenga ningún momento rotacional externo (o par resistente) aplicado. a) Hállase la velocidad angular de rotación estacionaria para una altura dada,  $z$ , del manguito inferior. b) Hállase la frecuencia de las pequeñas vibraciones por encima y por debajo de este movimiento estacionario. c) ¿Cuáles son las diferencias entre este movimiento y el del problema 8-15?

8-17. Dos péndulos simples, cada uno con una masa de un kilogramo y una longitud de 1 m, están acoplados por un resorte horizontal ligero (o sin peso) entre sus dos lentejas. El resorte tiene una constante de rigidez,  $k$ , de 6.2 newton/m (fig. 8-17). Suponiendo amplitudes pequeñas, hállense: a) la frecuencia natural de

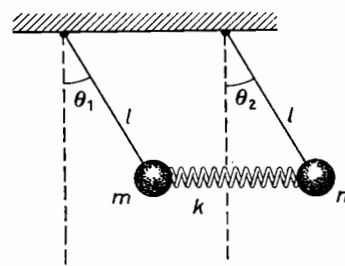


FIG. 8-17

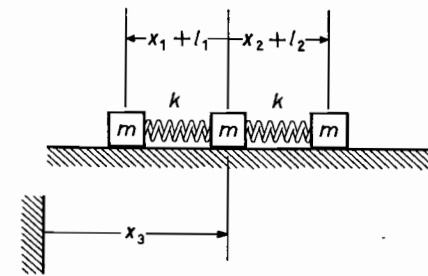


FIG. 8-18

los péndulos antes de su acoplamiento; b) la frecuencia natural de un péndulo acoplado cuando el otro se mantiene en reposo; c) las frecuencias de los dos modos normales de vibración; y d) la frecuencia de pulsación o batido con que la energía pasa de uno a otro cuando se hace vibrar inicialmente a uno de los péndulos.

8-18. Determinar las ecuaciones de movimiento del sistema de la figura 8-18. Las longitudes de los dos resortes libres o sin carga son  $l_1$  y  $l_2$ . Sepárese el problema en dos partes, una en que se considere el movimiento del centro de masa y la otra, el "movimiento interno" descrito por las dos coordenadas  $x_1$  y  $x_2$ . Hállense los modos normales de vibración.

8-19. Se aplica una fuerza horizontal,

$$F = F_0 \cos \omega t,$$

a la masa  $m_1$  del sistema de osciladores acoplados de la figura 8-10. Establézcanse las ecuaciones de movimiento y hállese la solución de estado estacionario. Esbócese la amplitud y la fase de las oscilaciones de cada oscilador en función de  $\omega$ .

8-20. Hállense los dos modos normales de vibración del par de osciladores armónicos acoplados, idénticamente amortiguados, mostrados en la figura 8-19,

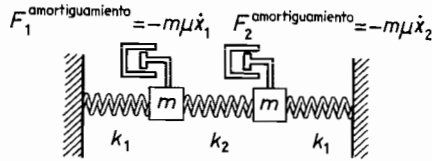


FIG. 8-19

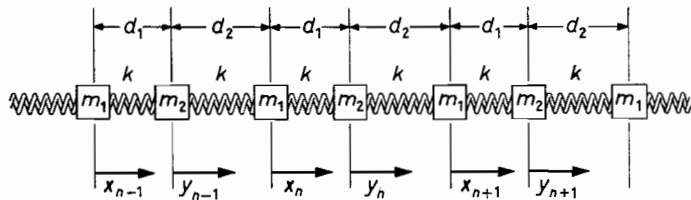


FIG. 8-20

8-21. a) Hállense las soluciones normales del conjunto infinito de osciladores acoplados, representado en la figura 8-20, de la forma

$$x_n = A e^{i(\omega t + f n d)}$$

y

$$y_n = B e^{i(\omega t + f n d)},$$

donde  $d = d_1 + d_2$ . b) ¿Cuál es la frecuencia de corte de dicho conjunto?

8-22. Utilizando los resultados del problema anterior, hállense las frecuencias normales de oscilación del sistema de osciladores de la figura 8-21.

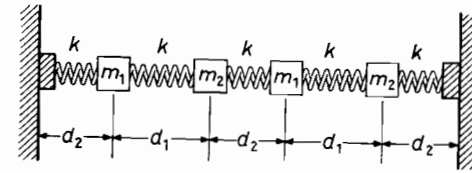


FIG. 8-21

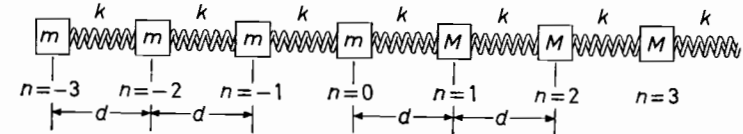


FIG. 8-22

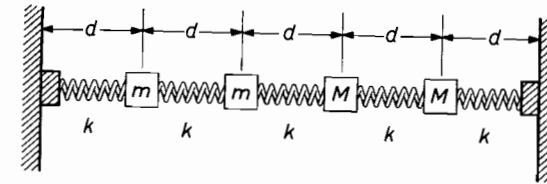


FIG. 8-23

8-23. Dados los dos conjuntos semiinfinitos de osciladores acoplados que se muestran en la figura 8-22, demuéstrese que existen soluciones de la forma

$$x_n = \begin{cases} A e^{i(\omega t - f_1 n d)} + B e^{i(\omega t + f_1 n d)} & n \leq 0 \\ C e^{i(\omega t - f_2 n d)} & n > 0 \end{cases}$$

$$x_n = \begin{cases} F e^{i(\omega t + f_1 n d)} & n \leq 0 \\ E e^{i(\omega t - f_2 n d)} + D e^{i(\omega t + f_2 n d)} & n > 0 \end{cases}$$

Relaciónense B y C con A y E y F con D.

8-24. Utilícense los resultados del problema anterior para hallar el determinante cuyas raíces den las frecuencias normales del conjunto de osciladores de la figura 8-23.

## Movimiento de un cuerpo rígido

Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias entre sí no cambian. Los cuerpos reales no satisfacen esta condición, pero en muchas aplicaciones las deformaciones que sufren son tan pequeñas que se pueden despreciar. En consecuencia, los resultados que obtendremos aquí para cuerpos rígidos son, con frecuencia, buenas aproximaciones de los movimientos de cuerpos reales.

### 9-1 Coordenadas generalizadas para el movimiento de cuerpos rígidos: ángulos de Euler

La descripción cinemática del movimiento general de un cuerpo rígido, requiere 6 coordenadas independientes. Se puede ver que este número es suficiente porque una vez que se concreta la posición de 3 puntos no colineales del cuerpo, la posición de los demás puntos del mismo, que están obligados a permanecer a una distancia fija de estos 3 puntos, también quedará determinada. De las 9 coordenadas que, en general, se necesitarían para la determinación de 3 puntos, en el caso de cuerpos rígidos, debido a la existencia de 3 ecuaciones de restricción o condición que expresan la constancia de las distancias entre un par de estos puntos, sólo habrá 6 coordenadas independientes.

Para el movimiento no restringido de un cuerpo rígido, la posición del centro de masa, que se definió en el capítulo anterior, se escoge generalmente como uno de los tres puntos.

Debemos recordar que para un conjunto discreto de puntos materiales, o con masa, la posición del centro de masa se definió por la ecuación

$$M\mathbf{R} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i. \quad (9-1)$$

Para un cuerpo continuo, la suma (o sumación) de la definición del centro de masa se sustituye por una integración sobre el volumen del cuerpo. Si la

densidad másica (o de masa) del cuerpo continuo se designa por  $\rho(\mathbf{r})$ , el vector de posición,  $\mathbf{R}$ , del centro de masa está dado por

$$M\mathbf{R} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV, \quad (9-2)$$

donde la masa total es:

$$M = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad (9-3)$$

y

$$dV = dx dy dz.$$

► Como un ejemplo, localizaremos el centro de masa de un hemisferio de densidad uniforme (fig. 9-1).

De la simetría del cuerpo, podemos ver que el centro de masa se encuentra sobre el eje de simetría, el cual es perpendicular a la base del hemisferio y pasa por su centro. Llamando a este eje  $z$ , hallamos que la componente  $z$  del vector de posición del centro de masa está dada por

$$Z = \frac{\int \rho z dV}{\int \rho dV}.$$

Utilizando coordenadas esféricas en las que

$$z = r \cos \theta, \quad dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi,$$

obtenemos para la componente  $z$  del centro de masa

$$Z = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^3 \cos \theta \sin \theta dr d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi} = \frac{2\pi(R^4/4) (\frac{1}{2} \sin^2 \theta |_0^{\pi/2})}{2\pi(R^3/3) (-\cos \theta |_0^{\pi/2})} = \frac{3R}{8}. \quad \blacktriangleleft$$

Las tres coordenadas restantes describen el movimiento del cuerpo rígido con relación a su centro de masa. Este movimiento es matemáticamente equivalente al de un cuerpo rígido con uno de sus puntos fijo. Las tres coordenadas describen, por consiguiente, la orientación del cuerpo en el espacio.

Un sistema de coordenadas especialmente útil para la descripción del movimiento de un cuerpo rígido con respecto a uno de sus puntos, el punto  $O$ , se puede obtener si los dos puntos cuya posición especifique luego la orientación de dicho cuerpo se escogen de modo que los vectores de posición,  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ ; de estos puntos, tomados desde el punto  $O$ , sean perpendiculares. Para determinar la posición del primer punto  $P_1$  sólo necesitamos dos coordenadas. Esto resulta de que la distancia  $|\mathbf{r}_1|$  de  $P_1$  a  $O$  permanece constante. Para determinar la orientación del vector  $\mathbf{r}_1$ , utilizaremos los dos ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , donde  $\theta$  es el ángulo que forma  $\mathbf{r}_1$  con el eje  $z$  del espacio y  $\phi$  es el ángulo que forma la proyección del vector  $\mathbf{r}_1$

sobre el plano  $xy$  con el eje  $y$  negativo (fig. 9-2). Observaremos que el ángulo  $\phi$  es  $\pi/2$  radianes más grande que el azimutal usado en la determinación del punto  $P_1$  en función de las coordenadas esféricas.

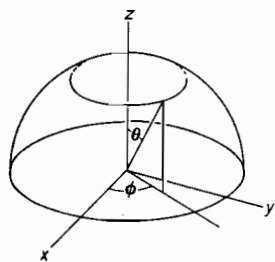


FIG. 9-1

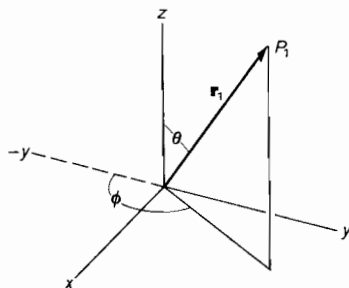


FIG. 9-2

Además,  $\phi$  es el ángulo que el vector esférico unidad  $\mathbf{e}_\phi$ , perpendicular al eje  $z$  y al vector  $\mathbf{r}_1$ , forma con el eje  $x$  positivo (fig. 9-3). Este vector unidad se expresa por

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{1}{r_1 \sin \theta} (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_1).$$

Debido a la existencia de las dos ecuaciones de condición o restricción

$$|\mathbf{r}_2| = \text{const.},$$

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \text{const.},$$

que expresan que es constante la distancia al punto  $P_2$  desde los  $O$  y  $P_1$ , el punto  $P_2$  sólo requiere una coordenada para determinar su posición.

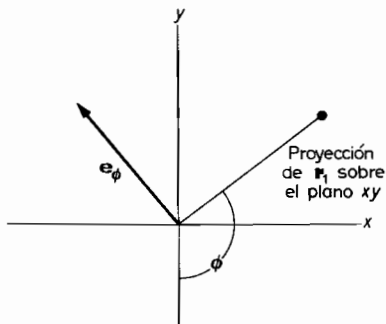


FIG. 9-3

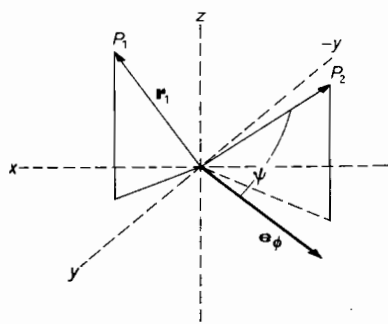


FIG. 9-4

Si elegimos para  $P_2$  un punto situado sobre una recta perpendicular a  $\mathbf{r}_1$  en  $O$ , entonces, la situación del vector  $\mathbf{r}_2$  en el plano perpendicular a  $\mathbf{r}_1$

en  $O$ , queda determinada por el ángulo  $\psi$  que forma con el vector  $\mathbf{e}_\phi$ . Observaremos que  $\mathbf{e}_\phi$  también se encuentra en el plano perpendicular a  $\mathbf{r}_1$  en  $O$ . Como se indica en la figura 9-4, el ángulo  $\psi$  se elige de modo que una rotación de un ángulo  $-\psi$  de  $\mathbf{r}_2$  alrededor de  $\mathbf{r}_1$  coloque a  $\mathbf{r}_2$  sobre  $\mathbf{e}_\phi$  (véase la figura). Nos referiremos a la dirección y sentido de  $\mathbf{r}_1$ , como la dirección y sentido positivo del eje  $z$  del cuerpo, y a la dirección y sentido de  $\mathbf{r}_2$ , como la dirección y sentido positivo del eje  $x$  del cuerpo; esto es, de los ejes  $z$  y  $x$  de un sistema de coordenadas fijo en el cuerpo y que giran con él. En relación con esta nueva designación de los vectores  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ ,  $\theta$  es el ángulo entre el eje  $z$  del cuerpo y el eje  $z$  del espacio. Por otro lado,  $\phi$  y  $\psi$  son los ángulos que forma la intersección del plano  $xy$  del cuerpo y el  $xy$  del espacio, que está sobre  $\mathbf{e}_\phi$ , con los ejes  $x$  del espacio y del cuerpo, respectivamente (fig. 9-5).

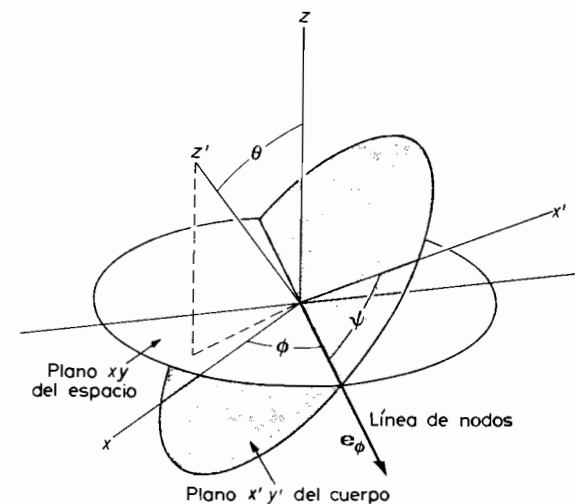


FIG. 9-5. Angulos de Euler.

El sentido positivo de la intersección de los dos planos  $xy$  se elige de modo que en rotación, de un ángulo  $\theta$ , del cuerpo alrededor de esta intersección, coloque al eje  $z$  del espacio sobre el eje  $z$  del cuerpo. La intersección de los dos planos  $xy$  se llama *línea de nodos* y los ángulos  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\psi$  son los ángulos de Euler.\*

La relación o fórmula entre los vectores base del cuerpo, designados por  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  y  $\mathbf{k}'$  y los vectores base del espacio  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , se halla a partir de las relaciones de los tres vectores no coplanares,  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  y  $\mathbf{e}_\phi$ , con estos vectores

\* Observaremos que esta elección de los ángulos de Euler no es única. Frecuentemente, por ejemplo, los ángulos  $\phi$  y  $\psi$  son elegidos como los ángulos que forma la línea de nodos con los ejes  $y$  en el espacio y en el cuerpo.

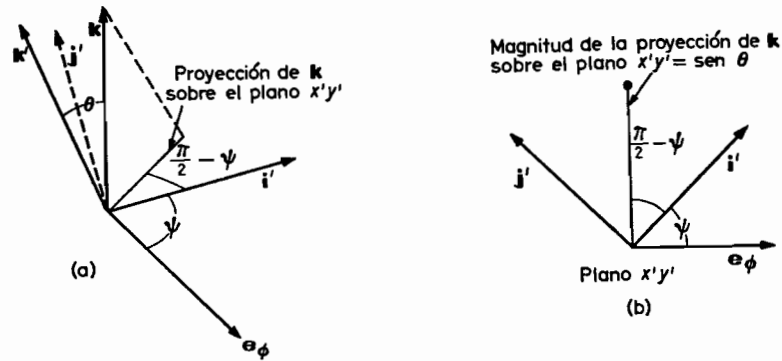


FIG. 9-6

base. Como puede verse por la elección de los vectores  $i'$  y  $k'$ , tenemos (figs. 9-2 y 9-3)

$$k' = \text{sen } \theta \text{ sen } \phi i - \text{sen } \theta \text{ cos } \phi j + \text{cos } \theta k, \quad (9-4)$$

$$e_\phi = \text{cos } \phi i + \text{sen } \phi j, \quad (9-5)$$

y como se ve en la figura 9-6

$$e_\phi = \text{cos } \psi i' - \text{sen } \psi j', \quad (9-6)$$

$$k = \text{sen } \theta \text{ sen } \psi i' + \text{sen } \theta \text{ cos } \psi j' + \text{cos } \theta k'. \quad (9-7)$$

En función de los vectores  $k$ ,  $k'$  y  $e_\phi$  y de sus vectores recíprocos (problema 1-17)

$$\bar{k} = -\text{ctg } \theta \text{ sen } \phi i + \text{ctg } \theta \text{ cos } \phi j + k,$$

$$\bar{k}' = -\text{ctg } \theta \text{ sen } \psi i' - \text{ctg } \theta \text{ cos } \psi j' + k', \quad (9-8)$$

$$\bar{e}_\phi = e_\phi,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} i &= (i \cdot e_\phi) e_\phi + (i \cdot k') \bar{k}' + (i \cdot k) \bar{k} \\ &= (\text{cos } \phi \text{ cos } \psi - \text{cos } \theta \text{ sen } \phi \text{ sen } \psi) i' - (\text{cos } \phi \text{ sen } \psi + \text{cos } \theta \text{ sen } \phi \text{ cos } \psi) j' \\ &\quad + \text{sen } \theta \text{ sen } \phi k', \end{aligned} \quad (9-9)$$

$$\begin{aligned} j &= (\text{sen } \phi \text{ cos } \psi + \text{cos } \theta \text{ cos } \phi \text{ sen } \psi) i' - (\text{sen } \phi \text{ sen } \psi - \text{cos } \theta \text{ cos } \phi \text{ cos } \psi) j' \\ &\quad - (\text{sen } \theta \text{ cos } \phi k', \end{aligned} \quad (9-10)$$

Las ecuaciones (9-7), (9-9) y (9-10) relacionan los vectores base de los sistemas de coordenadas del espacio y del cuerpo.

Los coeficientes de la transformación lineal que relacionan los dos conjuntos de vectores base, se pueden ordenar para formar la matriz

$$(S) = \begin{bmatrix} \text{cos } \psi \text{ cos } \phi - \text{cos } \theta \text{ sen } \phi \text{ sen } \psi & -(\text{sen } \psi \text{ cos } \phi + \text{cos } \theta \text{ sen } \phi \text{ cos } \psi) & \text{sen } \theta \text{ sen } \phi \\ \text{cos } \psi \text{ sen } \phi + \text{cos } \theta \text{ cos } \phi \text{ sen } \psi & -(\text{sen } \psi \text{ sen } \phi - \text{cos } \theta \text{ cos } \phi \text{ cos } \psi) & -\text{sen } \theta \text{ cos } \phi \\ \text{sen } \theta \text{ sen } \psi & \text{sen } \theta \text{ cos } \psi & \text{cos } \theta \end{bmatrix}, \quad (9-11)$$

que es la matriz que transforma la descripción  $|A'|$  de un vector  $A$  en el sistema del cuerpo a su descripción  $|A|$  en el sistema del espacio. En notación con operador esto se expresa por

$$|A| = \tilde{S}|A'|$$

o (sección 3-5):

$$|A'| = S|A|.$$

(9-12)

La representación matricial de la última ecuación es

$$\begin{bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{bmatrix} = (S) \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}.$$

## 9-2 Velocidad angular de un cuerpo rígido

La distancia entre dos puntos cualesquiera de un cuerpo rígido permanece fija. Esto significa que el vector de posición de un punto  $P$  con respecto a  $O$  es de magnitud constante, por lo que (sección 1-8) los vectores de posición a partir de  $O$  sólo cambian de dirección (y sentido). La velocidad relativa de un punto  $P_i$  con respecto a  $O$  se expresa, por consiguiente, en función de un vector de velocidad angular,  $\omega$ , por la fórmula

$$v_i = \omega \times r_i. \quad (9-13)$$

Este vector de velocidad angular es el mismo que el de la velocidad angular con que se observa que gira el sistema de coordenadas del cuerpo. Que esto es así se ve fácilmente del hecho de que la descripción de la posición de un punto  $P_i$  del cuerpo con respecto al sistema de coordenadas del mismo (o sea el que gira con el cuerpo) no es función del tiempo.

Podemos expresar las componentes cartesianas del vector de velocidad angular en función de los ángulos de Euler. Recordemos que las velocidades angulares se suman como vectores (sección 1-8). Ahora bien, un cambio en  $\theta$  produce una rotación del cuerpo alrededor de la línea de nodos que es la dirección de  $e_\phi$ , un cambio en  $\phi$  produce una rotación del cuerpo alrededor del eje  $z$  del espacio indicada por el vector  $k$ , y un cambio en  $\psi$ , una rotación alrededor del eje  $z$  del cuerpo indicada por el vector  $k'$ . De aquí que



$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_\phi + \dot{\phi}\mathbf{k} + \dot{\psi}\mathbf{k}'. \quad (9-14)$$

Esto nos da las siguientes componentes de  $\boldsymbol{\omega}$  sobre los ejes del espacio

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi, \\ \omega_y &= \dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi, \\ \omega_z &= \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (9-15)$$

De la misma manera, utilizando las ecuaciones (9-5) a (9-7), se hallan las componentes del vector de velocidad angular sobre los ejes del cuerpo

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega_{y'} &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (9-16)$$

### 9-3 Relación entre la cantidad de movimiento angular y la velocidad angular de un cuerpo rígido: momentos y productos de inercia

La cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido con respecto a uno de sus puntos, el punto  $O$ , está dada por

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i, \quad (9-17)$$

donde  $\mathbf{r}_i$  y  $\mathbf{v}_i$  son los vectores de posición y de velocidad del  $i$ -ésimo punto de masa con respecto al punto  $O$ . Para un cuerpo continuo, la suma deberá sustituirse por una integral sobre el volumen del cuerpo. Esto es

$$\mathbf{L} = \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV. \quad (9-18)$$

En función del vector de velocidad angular,  $\boldsymbol{\omega}$ , con que se observa que gira el cuerpo, la cantidad de movimiento angular es

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i m_i [r_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i] \quad (9-19)$$

o bien, para un cuerpo continuo,

$$\mathbf{L} = \int \rho(\mathbf{r}) [r^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}] dV. \quad (9-20)$$

Formuladas explícitamente, las componentes cartesianas de la ecuación (9-19) son

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z, \end{aligned} \quad (9-21)$$

donde los *momentos de inercia*,  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$ , están definidos por

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2), \\ I_{yy} &= \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2), \\ I_{zz} &= \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2), \end{aligned} \quad (9-22)$$

y los *productos de inercia*,  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$ ,  $I_{yz}$ , por

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = - \sum_i m_i x_i y_i, \\ I_{xz} &= I_{zx} = - \sum_i m_i x_i z_i, \\ I_{yz} &= I_{zy} = - \sum_i m_i y_i z_i, \end{aligned} \quad (9-23)$$

En notación matricial las ecuaciones (9-21) se expresan por

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \quad (9-24)$$

La ecuación (9-24) se considera como la representación matricial de la ecuación con operador

$$[\mathbf{L}] = \mathbf{I}(\boldsymbol{\omega}). \quad (9-25)$$

Los momentos y productos de inercia son, por lo tanto, los elementos de la representación matricial del operador de momentos de inercia  $\mathbf{I}$  y, como tales, son llamados elementos del tensor de momentos de inercia.

► Como ilustración, obtendremos los momentos y productos de inercia para diversos cuerpos rígidos.

a) *Momentos de inercia de un hemisferio uniforme respecto a su eje de simetría y a un eje perpendicular al de simetría que pase por el centro de la base* (fig. 9-7).

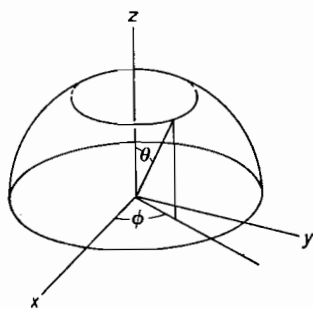


FIG. 9-7

Utilizando coordenadas esféricas, encontramos que el momento de inercia respecto al eje de simetría, que llamaremos eje  $z$  es

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int \rho(x^2 + y^2) dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \rho r^4 \sin^3 \theta dr d\theta d\phi \\ &= \rho \frac{R^5}{5} \frac{4\pi}{3} = \frac{2}{5} MR^2, \end{aligned}$$

donde la masa total del hemisferio es

$$M = \frac{2\pi R^3}{3} \rho.$$

Similarmente, hallamos que el momento de inercia respecto al eje  $x$  es

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int \rho(y^2 + z^2) dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \rho r^4 (\cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta \sin^2 \phi) dr d\theta d\phi \\ &= \frac{\rho R^5}{5} \left( \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{2}{5} MR^2. \end{aligned}$$

b) *Momentos de inercia de un cilindro circular recto uniforme respecto al eje del cilindro y a una recta perpendicular a dicho eje que pase por el centro de masa (fig. 9-8).*

Sean  $R$  el radio del cilindro y  $h$  su altura. Escogiendo el eje  $z$  como eje del cilindro y empleando coordenadas cilíndricas, se halla que el momento de inercia con respecto al eje  $z$  es

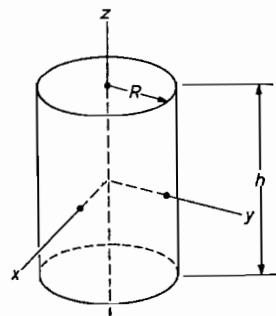


FIG. 9-8

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int \rho(x^2 + y^2) dV = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho r^3 dr d\phi dz \\ &= \frac{\pi \rho h}{2} R^4 = \frac{MR^2}{2}, \end{aligned}$$

donde  $M$ , la masa del cilindro, es

$$M = \pi R^2 h \rho.$$

De la misma manera, encontramos que el momento de inercia respecto al eje  $x$  que pasa por el centro de masa es

$$I_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho(y^2 + z^2) r dr d\phi dz.$$

Integrando primero con respecto a  $z$ , resulta

$$I_{xx} = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( hr^2 \sin^2 \phi + \frac{h^3}{12} \right) r dr d\phi.$$

Las integraciones siguientes con respecto a  $\phi$  y  $r$  nos dan

$$I_{xx} = \rho \left( \frac{\pi h R^4}{4} + \frac{\pi h^3 R^2}{12} \right) = \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12}.$$

c) *Momentos y productos de inercia de un paralelepípedo recto rectangular uniforme con respecto a sus aristas.*

Considerando el paralelepípedo recto rectangular con aristas de longitudes  $a$ ,  $b$  y  $c$ , como se indica en la figura 9-9, su momento de inercia con respecto al eje  $z$  se halla que es

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int_0^c \int_0^b \int_0^a \rho(x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \rho c \left( \frac{ba^3}{3} + \frac{ab^3}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} M(a^2 + b^2), \end{aligned}$$

donde

$$M = \rho abc.$$

Análogamente, por consideraciones de simetría, encontramos

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{1}{3} M(b^2 + c^2), \\ I_{yy} &= \frac{1}{3} M(a^2 + c^2). \end{aligned}$$

Los productos de inercia se hallan también fácilmente en este caso:

$$I_{xy} = - \int_0^c \int_0^b \int_0^a \rho xy \, dx \, dy \, dz = -\rho c \frac{a^2}{2} \frac{b^2}{2} = -\frac{1}{4}Mab,$$

y similarmente

$$I_{xz} = -\frac{1}{4}Mac,$$

$$I_{yz} = -\frac{1}{4}Mbc.$$

Los momentos y productos de inercia de varios cuerpos homogéneos se dan en la tabla 9-1. Observaremos que para los ejemplos ilustrados en la tabla se anulan todos los productos de inercia. Los ejes de coordenadas para los que sucede esto se llaman *ejes principales* del cuerpo. En el próxi-

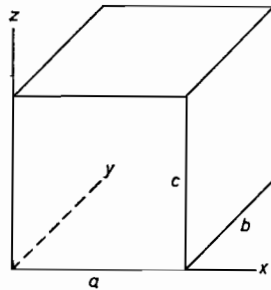


FIG. 9-9

mo capítulo demostraremos que todos los cuerpos tienen un conjunto de ejes principales perpendiculares entre sí. En el sistema de coordenadas de los ejes principales, se halla que las expresiones de la cantidad de movimiento angular y de la energía cinética del cuerpo, en función de la velocidad angular, toman su forma más simple. Por ejemplo, la cantidad de movimiento angular se encuentra que es

$$\mathbf{L} = I_1\omega_x\mathbf{i} + I_2\omega_y\mathbf{j} + I_3\omega_z\mathbf{k},$$

donde

$$I_1 = I_{xx}, \quad I_2 = I_{yy} \quad \text{e} \quad I_3 = I_{zz}.$$

Los momentos de inercia  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  respecto a los ejes principales se llaman *momentos principales de inercia*. En el próximo capítulo, expondremos un método para hallar los ejes principales y los momentos de inercia principales de un cuerpo rígido.

A veces, será conveniente notacionalmente expresar el momento de inercia con respecto a un eje en función del producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de una cantidad que tiene dimensión de longitud. Esta

Tabla 9-1. Momentos y productos de inercia con respecto al centro de masa (o centro de gravedad) de varios cuerpos, en el sistema de ejes que se indica.

Cuerpo	Ejes	Momentos y productos de inercia
Cono circular recto de altura $h$ y radio de la base $r$		$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3m}{20} \left( r^2 + \frac{h^2}{4} \right)$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$ No hay productos de inercia
Paralelepípedo rectángulo (o recto rectangular) de lados $a$ , $b$ y $c$		$I_{xx} = \frac{m}{12} (b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{m}{12} (a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$ No hay productos de inercia
Elipsoide de semiejes $a$ , $b$ y $c$		$I_{xx} = \frac{m}{5} (b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{m}{5} (a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{m}{5} (a^2 + b^2)$ No hay productos de inercia
Anillo (o corona) plano circular uniforme con radios $r_1$ y $r_2$		$I_{xx} = I_{yy} = \frac{m}{4} (r_1^2 + r_2^2)$ $I_{zz} = \frac{m}{2} (r_1^2 + r_2^2)$ No hay productos de inercia
Esfera de radio $R$		$I \text{ con respecto a cualquier eje} = \frac{2}{5}mR^2$ No hay productos de inercia
Tubo cilíndrico con radios $r_1$ y $r_2$ y altura $h$		$I_{xx} = I_{yy} = \frac{m}{4} [r_1^2 + r_2^2 + \frac{1}{3}h^2]$ $I_{zz} = \frac{m}{2} (r_1^2 + r_2^2)$ No hay productos de inercia

cantidad se llama *radio de giro*. Así, por ejemplo, hallamos que el radio de giro del cilindro circular recto en función del cual

$$I_{zz} = Mk_z^2$$

es

$$k_z = \frac{1}{\sqrt{2}}R.$$

Para una esfera homogénea maciza, encontramos que

$$k = \sqrt{\frac{2}{5}}R$$

para cualquier eje que pase por el centro de la esfera.

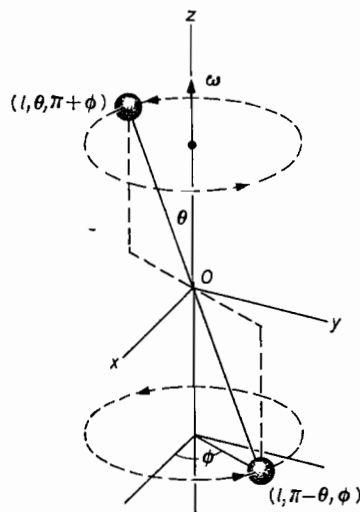


FIG. 9-10. Mancuerna giratoria.

Observaremos que la cantidad de movimiento angular del cuerpo, con respecto al punto  $O$ , es función lineal del vector de la velocidad angular instantánea,  $\omega$ , con que se observa que el cuerpo gira, y que el vector de cantidad de movimiento angular no será, generalmente, paralelo al vector de velocidad angular. Sólo es paralelo al vector de velocidad angular cuando éste está dirigido a lo largo de uno de los tres ejes especiales conocidos como ejes principales del cuerpo rígido. Para cualquier cuerpo rígido, los tres ejes principales son perpendiculares entre sí (Capítulo 10). Los elegiremos, por lo tanto, como ejes de coordenadas del cuerpo.

Como ejemplo de la relación lineal entre los vectores de la cantidad de movimiento angular y de la velocidad angular, consideraremos el cuerpo

rígido compuesto de dos partículas de igual masa,  $m$ , montadas en los extremos de una varilla de masa despreciable y longitud  $2l$ . Si escogemos el eje  $z$  como eje instantáneo de rotación (fig. 9-10), entonces

$$\omega_x = \omega \quad \text{y} \quad \omega_y = \omega_z = 0.$$

Empleando las ecuaciones (9-21) y (9-22), hallamos que las componentes cartesianas de la cantidad de movimiento angular con respecto al centro de masa, están dadas por

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega = 2ml^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi \omega, \\ L_y &= I_{yy}\omega = 2ml^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \omega, \\ L_z &= I_{zz}\omega = 2ml^2 \sin^2 \theta \omega, \end{aligned} \quad (9-26)$$

puesto que los productos de inercia de la mancuerna son

$$\begin{aligned} I_{xz} &= -\sum m_i x_i z_i = 2ml^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi, \\ I_{yz} &= -\sum m_i y_i z_i = 2ml^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi, \end{aligned} \quad (9-27)$$

y su momento de inercia

$$I_{zz} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = 2ml^2 \sin^2 \theta.$$

Realmente se halla que el vector de cantidad de movimiento angular de este ejemplo no es generalmente paralelo al de velocidad angular. Sólo en el caso especial en que  $\theta = \pi/2$  los dos vectores son paralelos. De hecho, en este ejemplo, el vector de cantidad de movimiento angular será en todo momento perpendicular a la varilla que une las dos partículas. Esto se podrá comprobar fácilmente tomando el producto escalar del vector de cantidad de movimiento angular,  $\mathbf{L}$ , por el de posición de una de las partículas con respecto al centro de masa. El vector de posición de la partícula situada en el punto  $(l, \pi - \theta, \phi)$  es

$$\mathbf{r} = l \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + l \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} - l \cos \theta \mathbf{k}.$$

Observaremos que un cambio en la orientación del cuerpo rígido llevará consigo un cambio en las componentes de los vectores de posición de sus partículas, que, a su vez, cambiarán los valores de los momentos y productos de inercia. En nuestro ejemplo, los momentos y productos de inercia son funciones de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ . Aun si la mancuerna estuviera obligada a girar alrededor del eje  $z$ , los productos y momentos de inercia, que son funciones del ángulo  $\phi$ , variarían a medida que el cuerpo vaya girando alrededor de dicho eje.

Esta es una complejidad que se debe tener en cuenta cuando consideremos la ecuación de movimiento del vector de cantidad de movimiento

angular. Las ecuaciones de movimiento contienen la derivada con respecto al tiempo de  $\mathbf{L}$  y, en consecuencia, también las derivadas con respecto al tiempo de los elementos del tensor de momentos de inercia. La derivación directa de los elementos del tensor de momentos de inercia se evita, corrientemente, de la manera siguiente.

Si derivamos las ecuaciones (9-17) o (9-19), que definen el vector de cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas, y recordamos que

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

obtenemos la expresión

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \times \mathbf{v}_i + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_i) + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)].$$

Luego, como

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \times \mathbf{v}_i = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = 0$$

y

$$\mathbf{r}_i \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)] = -(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)],$$

la ecuación de la derivada con respecto al tiempo del vector de cantidad de movimiento angular se reduce a

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_i) + \sum_i m_i \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i). \quad (9-28)$$

En notación matricial, esta última ecuación se expresa por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L})_x \\ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L})_y \\ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L})_z \end{bmatrix} \quad (9-29)$$

o sea,

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L}) = (\mathbf{I})(\dot{\boldsymbol{\omega}}) + (\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{L}), \quad (9-30)$$

donde

$$(\boldsymbol{\Omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (9-31)$$

Este resultado pudo haberse obtenido también de otra manera. Nos daremos cuenta que en relación con el sistema de coordenadas del cuerpo, que

es uno que gira con el cuerpo rígido, los productos y momentos de inercia permanecen constantes. De ahí que, en tal sistema de coordenadas en rotación, la derivada respecto al tiempo del vector de cantidad de movimiento angular está dada por  $(\mathbf{I})(\dot{\boldsymbol{\omega}})$ . De la ecuación (3-8), que relaciona la descripción o expresión de la derivada con respecto al tiempo de un vector en un sistema de coordenadas a la descripción de la citada derivada del mismo vector en relación con otro sistema de coordenadas que gira con una velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  con respecto al primero, obtenemos la ecuación (9-30).

#### 9-4 Energía cinética rotacional de un cuerpo rígido

La energía cinética rotacional de un cuerpo rígido también es función de los momentos y productos de inercia y del vector de velocidad angular. Poniendo

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i,$$

obtenemos para la energía cinética rotacional del cuerpo rígido la relación

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)] \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (9-32)$$

En notación matricial, la ecuación (9-32) se expresa por

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} [\omega_x, \omega_y, \omega_z] \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} | \mathbf{I} | \boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \quad (9-33)$$

#### 9-5 Teorema de los ejes paralelos

De nuestra exposición hasta este momento, resulta bastante evidente que los momentos y productos de inercia son funciones del punto alrededor del cual está girando el cuerpo y de la orientación de éste con respecto a los ejes de coordenadas del espacio. Afortunadamente, la situación no es tan

complicada como parece. En esta sección, demostraremos cómo los productos y momentos de inercia con respecto a un punto del cuerpo están relacionados con los productos y momentos de inercia con respecto a un sistema de coordenadas paralelo situado en el centro de masa. En el próximo capítulo investigaremos la dependencia de los elementos del tensor de momentos de inercia en la elección de los ejes de coordenadas y de su orientación con respecto a los ejes de coordenadas principales.

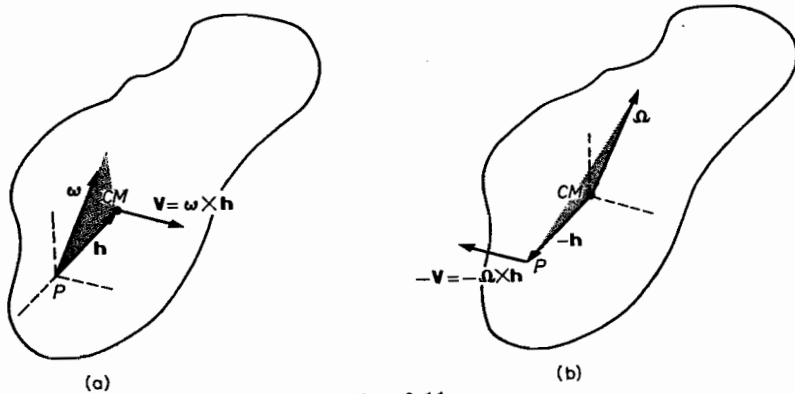


FIG. 9-11

En la sección 8-7 hemos hallado que la cantidad de movimiento angular total de un sistema de partículas con respecto a un punto fijo se expresa por la suma de la cantidad de movimiento angular del sistema de partículas, con respecto al centro de masa, y la cantidad de movimiento angular del centro de masa, con respecto al punto fijo. Un resultado similar se obtuvo para la energía cinética total del sistema.

Ahora bien, la velocidad angular del cuerpo rígido con respecto a su centro de masa es idéntica a su velocidad angular con respecto a cualquiera otro de sus puntos. A este hecho se puede llegar expresando las velocidades relativas de dos puntos del cuerpo, una con respecto a la otra, en función de la velocidad angular del cuerpo con respecto a los puntos. Así, por ejemplo, la velocidad del centro de masa con respecto a un punto,  $P$ , del cuerpo está dada por

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}, \quad (9-34)$$

donde  $\mathbf{h}$  es la distancia del punto  $P$  al centro de masa y  $\boldsymbol{\omega}$  es la velocidad angular del cuerpo rígido con respecto al punto  $P$  (fig. 9-11). La velocidad del punto  $P$  con relación al centro de masa es, por lo tanto,  $-\mathbf{V}$  y la posición de  $P$  con respecto al centro de masa,  $-\mathbf{h}$ . Si ahora  $\boldsymbol{\Omega}$  es la velocidad angular del cuerpo rígido con relación al centro de masa, entonces

$$-\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega} \times (-\mathbf{h}) = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}$$

o sea

$$(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{h} = 0.$$

Como el punto  $P$  puede ser cualquiera y, por consiguiente, también el vector  $\mathbf{h}$ , se deduce que

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}. \quad (9-36)$$

Podemos, por tanto, volver a expresar la cantidad de movimiento angular respecto a un punto fijo del cuerpo que se dio en la ecuación (8-79) en función de  $\boldsymbol{\omega}$ , y obtener

$$\mathbf{L} = M\mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i). \quad (9-37)$$

En notación matricial, esto es

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(R^2 - X^2) & -MXY & -MXZ \\ -MXY & M(R^2 - Y^2) & -MYZ \\ -MZX & -MZY & M(R^2 - Z^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I'_{xx} & I'_{xy} & I'_{xz} \\ I'_{yx} & I'_{yy} & I'_{yz} \\ I'_{zx} & I'_{zy} & I'_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (9-38)$$

o

$$(\mathbf{L}) = (\mathbf{I}_0 + \mathbf{I}')(\boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{I})(\boldsymbol{\omega}), \quad (9-39)$$

donde  $(\mathbf{I}_0)$  es la matriz del momento de inercia del centro de masa (la matriz del momento de inercia de una masa  $M$  situada en el centro de masa) con respecto a un punto  $O$ , e  $(\mathbf{I}')$  es la matriz del momento de inercia del cuerpo con respecto a un sistema de coordenadas cuyo origen está situado en el centro de masa y cuyos vectores base son paralelos a los vectores base del sistema de coordenadas situado en el punto  $O$ .

El hecho de que la matriz de momentos de inercia  $(\mathbf{I})$  con respecto a un punto se pueda expresar por la suma de la matriz del momento de inercia del centro de masa y la del momento de inercia del cuerpo con respecto al centro de masa, o sea,

$$(\mathbf{I}) = (\mathbf{I}_0) + (\mathbf{I}'), \quad (9-40)$$

se conoce como *teorema de los ejes paralelos para la matriz de los momentos de inercia*.

Concretamente, en el caso en que la velocidad angular del cuerpo esté restringida o condicionada a tener una sola componente y los ejes de coordenadas se elijan de modo que ella sea la componente  $z$ , vemos que

$$I_{zz} = M(X^2 + Y^2) + I'_{zz}. \quad (9-41)$$

Esta ecuación nos dice que el momento de inercia respecto al eje  $z$  que pasa por un punto  $O$  del cuerpo es igual al momento de inercia del centro de masa con respecto a dicho eje  $z$  más el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje  $z$  que pasa por el centro de masa. Esto se conoce como *teorema de los ejes paralelos para el momento de inercia respecto a un eje*.

### 9-6 Ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido

Las ecuaciones de movimiento que describen o expresan el movimiento general de un cuerpo rígido se obtuvieron ya en el último capítulo cuando se expusieron los teoremas de conservación para un sistema de  $N$  partículas. La ecuación (8-68),  $\mathbf{F} = M\mathbf{A}$ , nos da las ecuaciones de movimiento para el vector de posición del centro de masa, y las componentes apropiadas de la ecuación (8-83),

$$\mathbf{N}' = \frac{d}{dt} \mathbf{L}',$$

dan las ecuaciones generalizadas de movimiento para las variables angulares que describen la orientación del cuerpo rígido con respecto a un sistema de coordenadas del espacio que pase por el centro de masa.

Si el movimiento del cuerpo está restringido de modo que dos o más puntos colineales del cuerpo permanezcan fijos, la ecuación (8-76),  $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}}$ , nos dará las ecuaciones generalizadas de movimiento para las variables angulares empleadas para describir la orientación del cuerpo con respecto a un sistema de coordenadas del espacio situado en uno de los puntos fijos. Ahora procederemos a presentar la forma que toman las componentes específicas de la ecuación de movimiento para el vector de cantidad de movimiento angular.

#### a) Componentes sobre las direcciones instantáneas de los ejes principales (mutuamente perpendiculares) del cuerpo: ecuaciones de Euler

La relación entre el vector de cantidad de movimiento angular y el de velocidad angular, toma su forma más simple cuando se expresa en función de los vectores unidad del sistema de coordenadas del cuerpo que apuntan en las direcciones y sentidos positivos de los ejes principales

$$\mathbf{L} = I_1\omega_x \mathbf{i}' + I_2\omega_y \mathbf{j}' + I_3\omega_z \mathbf{k}', \quad (9-42)$$

donde  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  y  $\omega_z$  son las componentes del vector de velocidad angular sobre los ejes principales. Para obtener las componentes de la ecuación

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt} \mathbf{L} \quad (9-43)$$

sobre las direcciones instantáneas de los ejes principales expresaremos la derivada de  $\mathbf{L}$ , con respecto al tiempo, dada por la ecuación (9-30) por

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \left( \frac{d}{dt} \mathbf{L} \right)' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}, \quad (9-44)$$

donde  $(d\mathbf{L}/dt)'$  se refiere a la derivada de  $\mathbf{L}$  con respecto al tiempo referida al sistema de ejes coordenados del cuerpo.

Con la ecuación (9-42), y recordando que los momentos de inercia principales y los vectores base del cuerpo son constantes con respecto al sistema de coordenadas del mismo, hallamos que la derivada de  $\mathbf{L}$  con respecto al tiempo, en el sistema de coordenadas que giran con el cuerpo, es

$$\left( \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)' = I_1\dot{\omega}_x \mathbf{i}' + I_2\dot{\omega}_y \mathbf{j}' + I_3\dot{\omega}_z \mathbf{k}'. \quad (9-45)$$

Los productos escalares de la ecuación (9-43), cuando se substituye  $(d\mathbf{L}/dt)$  por (9-44), por los vectores  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  y  $\mathbf{k}'$  nos dan, por lo tanto, las ecuaciones de movimiento

$$N_x = I_1\dot{\omega}_x - (I_2 - I_3)\omega_y\omega_z, \quad (9-46)$$

$$N_y = I_2\dot{\omega}_y - (I_3 - I_1)\omega_z\omega_x, \quad (9-47)$$

$$N_z = I_3\dot{\omega}_z - (I_1 - I_2)\omega_x\omega_y. \quad (9-48)$$

Estas tres ecuaciones son conocidas como ecuaciones de movimiento de Euler para la rotación de un cuerpo rígido.

#### b) Ecuaciones generalizadas de movimiento para los ángulos de Euler

De las tres ecuaciones de movimiento de Euler, la ecuación componente (9-48) sobre el eje  $z$  del cuerpo resulta que es la ecuación de movimiento generalizada para el ángulo  $\psi$ , puesto que un cambio o variación en  $\psi$  produce una rotación del cuerpo alrededor de  $\mathbf{k}'$ , que está dirigido a lo largo del eje  $z$  del cuerpo. Empleando la ecuación (9-16), que relaciona las componentes del vector de velocidad angular sobre los ejes del cuerpo con los ángulos de Euler, la ecuación (9-48) toma la forma

$$N_z = \frac{d}{dt} [I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)] - (I_1 - I_2)(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - \dot{\theta}^2) \sin \psi \cos \psi - (I_1 - I_2)(\dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta)(\cos^2 \psi - \sin^2 \psi). \quad (9-49)$$

Las restantes ecuaciones de movimiento generalizadas se hallan, similarmente, tomando los productos escalares de la ecuación (9-43) por  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{e}_\phi$ , que son los ejes de rotación para un cambio de  $\phi$  y  $\theta$ , respectivamente. Es más sencillo, sin embargo, obtenerlas a partir del lagrangiano, utilizando la expresión de la energía cinética rotacional, la cual, en función de los momentos de inercia principales, está dada por

$$T = \frac{1}{2}(I_1\dot{\omega}_x^2 + I_2\dot{\omega}_y^2 + I_3\dot{\omega}_z^2) \\ = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta)^2 + \frac{1}{2}I_2(-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi)^2 \\ + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \quad (9-50)$$

Se deja como ejercicio para el lector la deducción de las dos ecuaciones de movimiento generalizadas restantes (problema 9-22).

### 9-7 Movimiento de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo de rotación

Los problemas más simples sobre cuerpos rígidos se refieren al movimiento rotacional de un cuerpo de este tipo alrededor de un eje cuya orientación en el espacio permanece fija, o sea, invariable. En lenguaje matemático, esto se expresa por las ecuaciones

$$\omega_x = \omega_y = 0,$$

cuando se elige el eje  $z$  coincidente con el eje fijo de rotación. Con esta elección de ejes en el espacio, tendremos siempre una sola componente  $z$  del vector de velocidad angular; por lo tanto, podemos suprimir el subíndice, poniendo

$$\omega_z = \omega. \quad (9-51)$$

En los problemas en que el cuerpo rígido esté obligado a girar alrededor de un eje fijo, es habitual tomar las componentes de la ecuación de movimiento de la cantidad de movimiento angular de dicho cuerpo sobre los ejes cartesianos del espacio. Por consiguiente, obtendremos las tres ecuaciones componentes

$$N_x = \dot{L}_x, \quad N_y = \dot{L}_y, \quad N_z = \dot{L}_z, \quad (9-52)$$

donde las fórmulas o relaciones de  $\dot{L}_x$ ,  $\dot{L}_y$  y  $\dot{L}_z$  a las componentes de la velocidad angular,  $\omega$ , y la aceleración angular,  $\dot{\omega}$ , están dadas por la ecuación (9-29). Recordando que  $\omega_x = \omega_y = \dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = 0$ , podemos reducir la ecuación (9-52) a

$$N_x = I_{xz}\dot{\omega} - I_{yz}\omega^2, \\ N_y = I_{yz}\dot{\omega} + I_{xz}\omega^2, \\ N_z = I_{zz}\dot{\omega}. \quad (9-53)$$

La última ecuación es la que determina el movimiento de rotación del cuerpo rígido, mientras que las otras dos ecuaciones componentes de la cantidad de movimiento angular del cuerpo determinan los momentos rotacionales de restricción que son necesarios para impedir que el eje de rotación cambie su dirección. Si sucede que el eje de rotación coincide con uno de los ejes principales, obtenemos las ecuaciones

$$N_x = N_y = 0 \quad (9-54)$$

y

$$N_z = I_{zz}\dot{\omega} = I\dot{\omega},$$

donde se ha puesto

$$I_{zz} = I.$$

En uno u otro caso, vemos que la energía cinética está dada por

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2}I_{zz}\omega^2, \quad (9-55)$$

y la rapidez (potencia) con que se aplica trabajo al cuerpo está dada por

$$P = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega} = N_z\omega. \quad (9-56)$$

► Como primer ejemplo, consideremos el problema de la máquina de Atwood (fig. 9-12) en que interviene el movimiento de rotación de una polea alrededor de su eje fijo. Para el caso en que la cuerda no se deslice, la aceleración con que se mueven las partículas está relacionada a la aceleración angular,  $\alpha$ , de la polea por medio de

$$R\alpha = a.$$

Estamos, por tanto, frente a un problema de un solo grado de libertad y para el cual, si no nos interesan los momentos rotacionales restrictivos, sólo se requiere una ecuación de movimiento. Para ésta puede escogerse la que expresa la conservación de la energía,

$$\frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - (m_2 - m_1)gh = \text{constante},$$

donde  $h$  es la distancia recorrida por la masa  $m_2$ ; o puede escogerse la ecuación de movimiento para la componente  $z$  de la cantidad de movimiento angular total del sistema,

$$(m_2 - m_1)gR = \frac{d}{dt}[m_1vR + m_2vR + I\omega].$$



Esta última ecuación da para la aceleración de las partículas

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + I/R^2} g.$$

Si nos interesase conocer la tensión en la cuerda, entonces serán apropiadas las ecuaciones de movimiento de Newton para las partículas,

$$m_2 g - T = m_2 a, \quad T_1 - m_1 g = m_1 a,$$

y la ecuación de movimiento para la cantidad de movimiento angular de la polea

$$(T_2 - T_1)R = I\alpha. \leftarrow$$

► Como segundo ejemplo, consideremos el péndulo físico. Se llama así a un cuerpo rígido libre de moverse alrededor de un eje fijo horizontal bajo la acción de un campo gravitacional uniforme (fig. 9-13). La com-

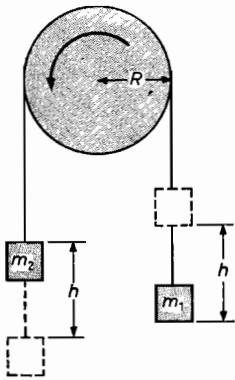


FIG. 9-12. Máquina de Atwood.

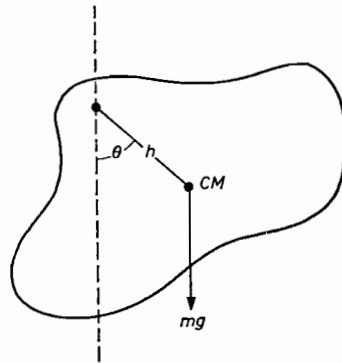


FIG. 9-13. Péndulo físico.

ponente sobre el eje de rotación del momento rotacional debido a la fuerza de gravedad, tiene la magnitud  $Mgh \sin \theta$ , donde  $h$  es la distancia del centro de masa al eje de rotación y  $\theta$ , el ángulo que la perpendicular trazada desde el centro de masa al eje de rotación forma con la vertical. Si se toma como positiva una rotación alrededor del eje de rotación, de sentido contrario al reloj, como se indica en la figura 9-13, la ecuación de movimiento para la componente  $z$  de la cantidad de movimiento angular es

$$I\ddot{\theta} = -Mgh \sin \theta.$$

Esta es una ecuación unidimensional de movimiento para la que se verifica la que expresa la conservación de la energía

$$\frac{1}{2}I\omega^2 - Mgh \cos \theta = \text{constante}.$$

Siguiendo el método delineado en el Capítulo 4, se puede utilizar esta ecuación para hallar  $\theta$  en función del tiempo.

De especial interés resulta el caso en que  $\theta$  es tan pequeña que  $\sin \theta$  se puede considerar aproximadamente igual a  $\theta$ . La ecuación de movimiento para la componente  $z$  de la cantidad de movimiento angular se reduce, entonces, a la del movimiento de un oscilador armónico simple cuya frecuencia natural de vibración está dada por

$$\omega^2 = \frac{Mgh}{I}.$$

El momento de inercia se puede expresar, por el teorema de los ejes paralelos, por

$$I = Mk^2 + Mh^2,$$

donde  $k$  es el radio de giro del cuerpo con respecto a un eje paralelo que pasa por un centro de masa. La frecuencia de oscilación, en función del radio de giro, está dada por la ecuación

$$\omega^2 = \frac{gh}{k^2 + h^2}.$$

Esta última relación contesta la pregunta de cómo situar el punto del que debe suspenderse el cuerpo para que oscile con una frecuencia dada. La respuesta se halla que es dada por las raíces de la ecuación

$$h^2 - \frac{g}{\omega^2} h + k^2 = 0. \quad (9-57)$$

Siempre que

$$k^2 \leq \frac{g^2}{4\omega^4},$$

esta ecuación nos da dos raíces

$$h_1 = \frac{g}{2\omega^2} + \sqrt{\frac{g^2}{4\omega^4} - k^2}, \quad h_2 = \frac{g}{2\omega^2} - \sqrt{\frac{g^2}{4\omega^4} - k^2},$$

cuya suma es

$$l = h_1 + h_2 = \frac{g}{\omega^2}.$$

Hay, por tanto, dos diferentes distancias del centro de masa al eje de rotación en las que el cuerpo oscila con una frecuencia,  $\omega$ , determinada. Observaremos que la longitud,  $l$ , definida por la ecuación anterior es la

de un péndulo simple que tiene la misma frecuencia de oscilaciones pequeñas,  $\omega$ .

Por lo tanto, resulta claro que el período

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + h^2}{gh}},$$

que tienen valores extremadamente grandes tanto para los muy pequeños como para los muy grandes de  $h$ , tiene, para cierto valor de  $h$ , un mínimo. Este mínimo se halla que es

$$\tau_{\text{mín}} = 2\pi \sqrt{\frac{2k}{g}}.$$

A la frecuencia

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau_{\text{mín}}},$$

para la que  $g/2\omega^2 = k$ ,

$$h_1 = h_2 = \frac{g}{2\omega^2}.$$

De la relación para el producto de las raíces de la ecuación (9-57),

$$h_1 h_2 = k^2,$$

se halla otra para  $l$ ,

$$l = h_1 + h_2 = h_1 + \frac{k^2}{h_1} = h_2 + \frac{k^2}{h_2} \leftarrow$$

### 9-8 Movimiento plano de un cuerpo rígido: eje instantáneo de rotación

Si el movimiento del centro de masa de un cuerpo rígido tiene lugar en un plano que sea perpendicular a su eje de rotación restringido, el movimiento se llama movimiento plano o laminar del cuerpo rígido. Aun si el centro de masa no se mueve en un plano perpendicular a dicho eje, por un cambio de coordenadas podemos obtener una descripción del movimiento con respecto a un sistema de coordenadas que se mueva paralelamente al eje de rotación y con respecto al cual el centro de masa se mueve en un plano perpendicular a él.

En el movimiento plano de un cuerpo rígido, hay un eje instantáneo de rotación, que es el determinado por los puntos cuyas velocidades instantáneas son nulas. Se puede demostrar que tal sistema de puntos existe de la manera siguiente.

Consideremos un cuerpo rígido que gire con una velocidad angular  $\omega$  y cuyo centro de masa tiene, en el movimiento plano de dicho cuerpo, una velocidad perpendicular a  $\omega$  (fig. 9-14).

Existe un conjunto de puntos cuya velocidad con respecto al centro de masa es  $V$ . Estos están a una distancia  $h$  del eje que pasa por el centro de masa y es paralelo al de rotación. Esto es, la magnitud de la velocidad  $v'$  de estos puntos es

$$|v'| = h\omega = V. \quad (9-58)$$

Los puntos cuya velocidad con respecto al centro de masa es  $V$  se encuentran en un cilindro circular recto de radio  $h$ , cuyo eje es colineal con el de rotación que pasa por el centro de masa. Este conjunto de puntos contiene un subconjunto cuya velocidad, respecto al centro de masa, es paralela a la observada,  $V$ , de dicho centro. Este subconjunto se encuentra en la intersección del cilindro de radio  $h$  y el plano que contiene al eje de rotación

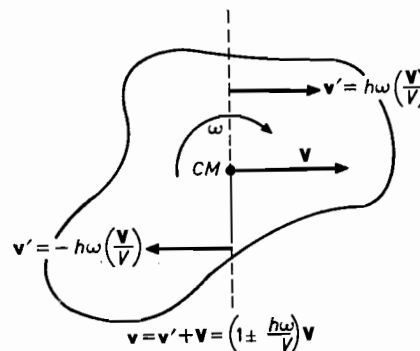


FIG. 9-14. Eje instantáneo de rotación.

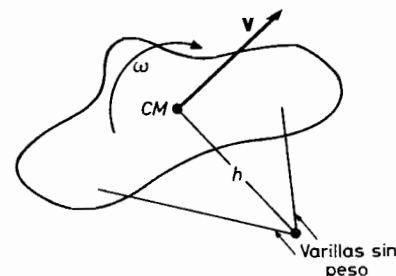


FIG. 9-15. Eje instantáneo de rotación.

que pasa por el centro de masa y es perpendicular al vector de velocidad  $V$ . De las dos rectas de intersección (o generatrices del cilindro) una tiene la velocidad  $-V$  con respecto al centro de masa. Con respecto al observador, la velocidad de los puntos en esta recta se anula.

Este conjunto de puntos que parece momentáneamente que está en reposo, determina la línea llamada *eje instantáneo de rotación*. Aun si sucediera que estos puntos se encuentran fuera del cuerpo, los podemos considerar como parte del mismo, como si estuvieran unidos a él por medio de varillas sin peso (fig. 9-15).

Las ecuaciones importantes del movimiento plano de un cuerpo rígido, son las de movimiento del centro de masa

$$F = MA, \quad (9-59)$$

y la componente de la ecuación de movimiento para la cantidad de movimiento angular sobre el eje de rotación (el eje  $z$ ) que pasa por el centro de masa,

$$N'_z = I\dot{\omega}. \quad (9-60)$$

A veces, es conveniente reemplazar la última ecuación por la de movimiento de la componente  $z$  de la cantidad de movimiento angular con respecto al eje instantáneo de rotación.

### 9-9 Movimiento plano de un cuerpo rígido: movimiento de rodadura

Se dice que un cuerpo rueda sobre una superficie  $S$  si sus puntos de contacto con la superficie tienen una velocidad igual a cero con respecto a la superficie en que dicho cuerpo rueda. Por ejemplo, considerando un cilindro o una esfera que rueda (fig. 9-16), la condición de rodadura para estos cuerpos se expresa igualando a cero la velocidad del punto de contacto,  $P$ ,

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = \mathbf{0}. \quad (9-61)$$

En esta ecuación  $\mathbf{v}$  es la velocidad del centro geométrico del cilindro o de la esfera con respecto a la superficie en que ruedan,  $\mathbf{R}$  es el radio vector desde el centro geométrico al punto  $P$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  la velocidad angular del cuerpo y  $\mathbf{v}_P$  la velocidad del punto de contacto con respecto a la superficie.

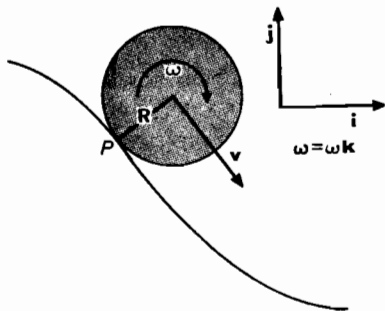


FIG. 9-16. Cuerpo rodante.

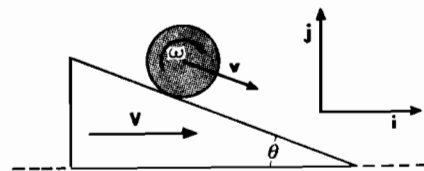


FIG. 9-17. Cilindro que rueda sobre un plano inclinado en movimiento.

Para un cilindro uniforme que rueda sobre la cara superior de la superficie de un plano inclinado (fig. 9-17) que, a su vez, se mueva con una velocidad  $\mathbf{V}$ , como se indica, la ecuación de condición o restricción se reduce, en forma de sus componentes, a

$$\dot{x} - V - r\omega \cos \theta = 0,$$

$$\dot{y} - r\omega \sin \theta = 0.$$

La restricción de rodadura no es, generalmente, integrable. Es una *restricción no holonómica*. Sin embargo, en el movimiento plano de un cuerpo rígido, la ecuación que expresa la condición de rodadura, puede integrarse y la restricción es holonómica.

Una restricción implica, necesariamente, la existencia de fuerzas restrictivas. Estas, que son necesarias para mantener al cuerpo rodando sobre la superficie, actúan tangencialmente a ésta. Como una superficie uniforme sólo puede ejercer fuerzas en dirección normal a ella, la rodadura no será posible generalmente sobre una superficie uniforme sin rozamiento. Las fuerzas restrictivas son complicadas. Sin embargo, para que haya rodadura sólo será necesario que la fuerza restrictiva, requerida para mantener el cuerpo rodando, no exceda de la máxima fuerza de rozamiento que la superficie pueda ejercer sobre el cuerpo. Esta máxima fuerza de rozamiento se halla empíricamente que es proporcional a la fuerza normal,  $\mathcal{N}$ , entre la superficie y el cuerpo

$$f_{\text{máx}} = \mu_s F_n = \mu_s \mathcal{N}, \quad (9-62)$$

donde  $\mu_s$  se conoce como *coeficiente de rozamiento estático*. En la rodadura, la fuerza restrictiva de rozamiento  $f$ , necesaria para mantener al cuerpo rodando, deberá ser menor que esta máxima fuerza de rozamiento que la superficie puede aplicar,

$$f \leq \mu_s \mathcal{N}. \quad (9-63)$$

Si no es satisfecha esta condición, el cuerpo no rodará, sino que efectuará un movimiento denominado de rodadura y deslizamiento. Cuando se presenta el deslizamiento, la fuerza de rozamiento con que la superficie actúa sobre el cuerpo se halla empíricamente que es

$$f = \mu_{sl} \mathcal{N}, \quad (9-64)$$

donde  $\mu_{sl}$  es el *coeficiente de rozamiento de deslizamiento* (*sl* es de *sliding* = deslizamiento).

Las fuerzas de rozamiento que actúan en un cuerpo, están siempre dirigidas en sentido contrario al de la velocidad relativa del punto de contacto del cuerpo con respecto a la superficie en que se mueve.

► Como ejemplo, consideremos el problema de un cilindro uniforme de radio  $r$  que rueda bajo la acción de la gravedad sobre la superficie exterior de otro cilindro fijo de mayor radio,  $R$  (fig. 9-18).

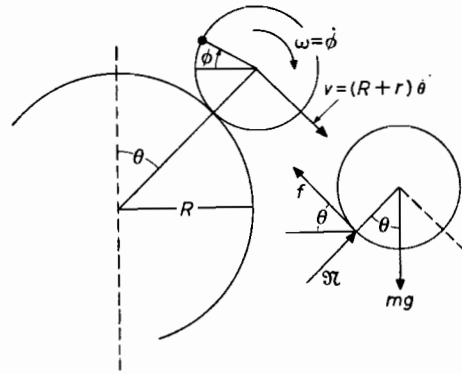


FIG. 9-18. Cilindro que rueda sobre un cilindro estacionario.

El centro de masa del cilindro menor se mueve en una circunferencia de radio constante  $R + r$  y tiene, por lo tanto, en todo momento una velocidad tangencial dada por

$$v = (R + r)\dot{\theta},$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forma el *radio vector* con la vertical, como se indica. La condición de rodadura está expresada por

$$v_P = (R + r)\dot{\theta} - r\dot{\phi} = 0.$$

Suponiendo que la fuerza de rozamiento actúe como se ve en la figura 9-18, encontraremos que las componentes tangencial y normal de las ecuaciones de movimiento del centro de masa son

$$mg \sin \theta - f = m(r + R)\ddot{\theta}$$

y

$$mg \cos \theta - \mathcal{N} = m(r + R)\dot{\theta}^2.$$

La ecuación de movimiento para la cantidad de movimiento angular con respecto al centro de masa es

$$rf = I\ddot{\phi}, \quad (9-65)$$

donde  $I$  es el momento de inercia del cilindro con respecto al eje de rotación que pasa por el centro de masa.

Estas ecuaciones pueden resolverse para hallar la ecuación diferencial de  $\theta$ . Su solución se puede emplear después para hallar  $f$ ,  $\mathcal{N}$  y  $\phi$  en función del tiempo.

Resulta evidente que el cilindro menor no continuará rodando sobre la superficie exterior del mayor, sino que dejará al cilindro mayor en algún

punto. Aun, antes de llegar a este punto, podría producirse un deslizamiento (¿por qué?).

Sin considerar que pudiera presentarse el deslizamiento, vemos que el cilindro menor se separará del mayor cuando la fuerza normal entre los dos se anule. ◀

## 9-10 Conservación de la energía en la rodadura

Notemos que las fuerzas de rozamiento que aparecen en problemas de cuerpos rodantes no disipan energía. Esto se ve fácilmente considerando el movimiento del cuerpo rodante con respecto a su eje instantáneo de rotación. En los cuerpos que ruedan sobre superficies en reposo, el eje instantáneo pasa por el punto o los puntos de contacto entre el cuerpo que rueda y dicha superficie. Verificándose el contacto entre la superficie y el cuerpo a lo largo del eje instantáneo, las fuerzas de rozamiento que actúan en esos puntos no contribuyen al momento rotacional con respecto al eje instantáneo; por lo tanto, no contribuyen al cambio o variación de la energía cinética de rotación alrededor del eje instantáneo. Puesto que esta energía representa la cinética total del cuerpo, se concluye que la fuerza de rozamiento en la rodadura no hace ningún trabajo neto sobre el cuerpo.

► Por ejemplo, en la ilustración de la última sección, la ecuación diferencial para  $\theta$  es

$$mg \sin \theta = \left[ \frac{I}{r^2} (R + r) + m(r + R) \right] \ddot{\theta},$$

que, usando la condición de rodadura para cambiar

$$\left( \frac{r + R}{r} \right)^2 \dot{\theta}^2 \quad \text{por} \quad \dot{\phi}^2,$$

nos da la siguiente ecuación que expresa la conservación de la energía total:

$$\frac{1}{2}m(r + R)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + mg(r + R) \cos \theta = \text{constante}.$$

En consecuencia, hemos demostrado que, en este ejemplo, la fuerza de rozamiento no disipa ninguna energía. ◀

► Como segundo ejemplo, consideremos el movimiento de un cilindro uniforme que rueda descendiendo sobre un plano inclinado, el cual a su vez se puede mover libremente sin rozamiento en un plano horizontal (fig. 9-19a). En este problema, las ecuaciones de movimiento del cilindro se obtendrán algo más fácilmente si describimos o expresamos su movimiento

con respecto al plano inclinado. Como este plano se mueve hacia la izquierda con una aceleración  $A$ , las ecuaciones de movimiento del cilindro con respecto a dicho plano son idénticas a las de un cilindro que rueda sobre un plano inclinado estacionario bajo la acción de una fuerza adicional de magnitud  $mA$  dirigida hacia la derecha, como se ve en la figura (9-19b).

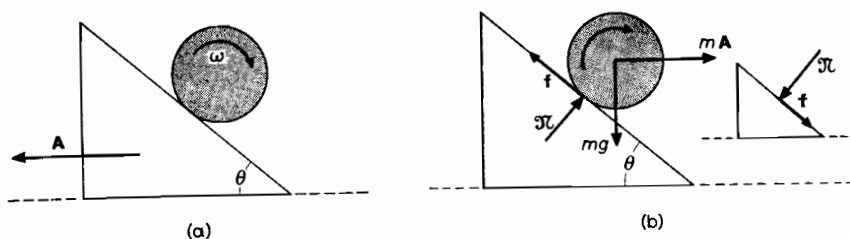


FIG. 9-19. Cilindro que rueda sobre un plano inclinado que se mueve deslizándose.

Las componentes normal y tangencial de las ecuaciones de movimiento del centro de masa del cilindro son, por tanto,

$$mg \sin \theta + mA \cos \theta - f = ma$$

y

$$mg \cos \theta - mA \sin \theta - N = 0,$$

donde  $a$  es la aceleración de dicho centro con respecto al plano inclinado. La ecuación de movimiento para la rotación del cilindro alrededor de su centro de masa es

$$rf = I\ddot{\phi} = \frac{Ia}{r},$$

donde hemos empleado la ecuación de restricción o condición

$$r\dot{\phi} = v$$

para hallar

$$r\ddot{\phi} = a.$$

La ecuación de movimiento para el horizontal del plano inclinado es

$$N \sin \theta - f \cos \theta = MA,$$

donde el sentido positivo del movimiento de dicho plano está definido hacia la izquierda, como se ve en la figura 9-19a.

Obsérvese que tenemos cinco cantidades desconocidas,  $\phi$ ,  $a$ ,  $A$ ,  $f$  y  $N$  para las que hemos hallado cinco ecuaciones de movimiento. Además de estas ecuaciones (o a partir de ellas) se halla también que la conservación de la energía total se expresa por

$$\frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m(v_x - V)^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + mgh = \text{constante},$$

donde  $v_x$  y  $v_y$  son las componentes  $x$  y  $y$  de la velocidad del centro (o eje) del cilindro relativa al plano inclinado, y  $h$  es la altura vertical del centro de masa del cilindro. ◀

### 9-11 Movimiento plano de un cuerpo rígido: rodadura y deslizamiento

El movimiento de rodadura y deslizamiento, o sea el resbalamiento, de un cuerpo rígido sobre una superficie, se presenta bien si la fuerza de rozamiento necesaria para mantener el cuerpo rodando excede de la máxima que la superficie puede ejercer sobre el cuerpo, o bien si las condiciones iniciales con que se pone en movimiento al cuerpo no satisfacen la condición de rodadura.

En uno u otro caso, la fuerza de rozamiento ejercida sobre el cuerpo es la fuerza de rozamiento cinética máxima dada por

$$f = \mu_k N.$$

El sentido de la fuerza de rozamiento es opuesto al de la velocidad relativa del punto de contacto entre el cuerpo y la superficie.

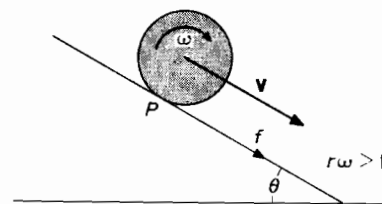


FIG. 9-20. Cilindro que rueda y se desliza por un plano inclinado.

Por ejemplo, si en el cilindro sobre el plano inclinado un ángulo  $\theta$ , representado en la figura 9-20, se tiene para las direcciones de  $\omega$  y  $V$  indicadas

$$r\omega > V,$$

entonces la fuerza de rozamiento estará dirigida hacia abajo del plano, mientras que la velocidad relativa del punto de contacto,  $P$ , con respecto al plano inclinado está, entonces, dirigida hacia arriba de dicho plano. Inversamente, si

$$r\omega < V,$$

la citada fuerza estará dirigida hacia arriba del plano.

Las ecuaciones de movimiento del cilindro son, en este caso, idénticas a las apropiadas cuando hay rodadura, aparte de que la fuerza de restric-

ción,  $f$ , se cambia por la de rozamiento  $\pm \mu_{sl} \mathcal{N}$ . El signo depende del sentido de la fuerza de rozamiento. En el ejemplo que estamos considerando, las ecuaciones del movimiento son

$$Mg \sin \theta \pm \mu_{sl} \mathcal{N} = MA \quad \text{y} \quad \pm \mu_{sl} \mathcal{N} r = I \ddot{\phi}.$$

En este caso, por supuesto,  $A \neq r \ddot{\phi}$ .

Observaremos que la fuerza de rozamiento siempre tenderá a conseguir que ruede el cilindro. Si la fuerza de rozamiento cinética máxima,  $\mu_{sl} \mathcal{N}$  es menor que la de restricción necesaria para mantener rodando al cilindro, la tendencia no tendrá éxito y éste seguirá con un movimiento de rodadura y deslizamiento.

Puede ocurrir el caso (problema 9-16) en que, debido a las condiciones iniciales en que se colocó el cilindro sobre la superficie, la condición de rodadura se alcanzara algún tiempo después. Sin embargo, si la fuerza de rozamiento necesaria para mantener la rodadura es mayor que  $f_{\text{máx}}$ , el cuerpo no continuará rodando. En la resolución de problemas en que intervienen la rodadura y el deslizamiento hay que tener cuidado, porque la fuerza de rozamiento puede cambiar de sentido repentinamente en el instante en que se presenta la rodadura pura.

Como la fuerza de rozamiento puede cambiar de sentido en los problemas en que la condición de rodadura se cumple momentáneamente, tales problemas se resolverán en dos partes. La primera se limita al movimiento antes del instante en que la condición de rodadura sea satisfecha. La segunda se continúa a partir de este momento. Debe quedar claro que cuando un cuerpo rueda y desliza, la energía no se conserva.

## 9-12 Equilibrio estático de cuerpos rígidos

En la sección 9-8, analizamos las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido. A partir de ellas, hallamos que un cuerpo rígido que está en reposo continuará en éste, si las fuerzas externas totales que actúan en él y el momento rotacional externo total alrededor de su centro de masa se anulan. Se dice que tal cuerpo está en *equilibrio estático*.

Las ecuaciones que expresan la anulación de las fuerzas externas y el momento rotacional totales,

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = 0, \quad (9-66)$$

$$\sum_i \mathbf{N}_i = 0, \quad (9-67)$$

nos dan, en general, seis ecuaciones de equilibrio independientes, que nos permitirán determinar un máximo de seis de las cantidades que aparezcan en dichas ecuaciones. Si las fuerzas o los momentos rotacionales, o ambos, son coplanares o colineales, el número de ecuaciones independientes es menor de seis y, por consiguiente, se podrán obtener menos de seis cantidades desconocidas, empleando las ecuaciones de equilibrio.

Puede parecer que la ecuación de movimiento para la cantidad de movimiento angular con respecto a un punto fijo, proporcione ecuaciones adicionales de equilibrio, que nos permitirán determinar más incógnitas. Esto no es así, porque, por la ecuación (8-142),

$$\mathbf{N}^{\text{ext}} = \mathbf{N}_0 + \mathbf{N}', \quad (9-68)$$

en la que

$$\mathbf{N}_0 = \mathbf{R} \times \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}}.$$

Es decir, el momento rotacional alrededor de cualquier otro punto no es independiente de las ecuaciones (9-66) y (9-67). Sin embargo la (9-68) nos da la libertad adicional de tomar momentos con respecto a cualesquiera punto o puntos. Si lo hacemos así, hemos de conocer el número de ecuaciones independientes que podemos tener y cuidar de no exceder de él.

► Para mostrar el empleo de las ecuaciones (9-66) y (9-67), consideraremos el problema de la escalera de mano representada en la figura 9-21,

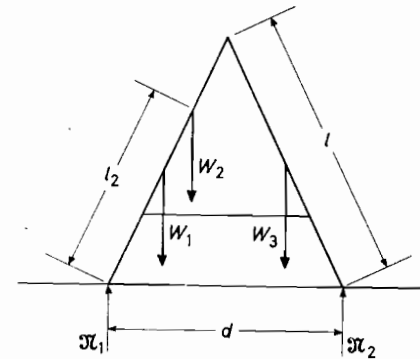


FIG. 9-21

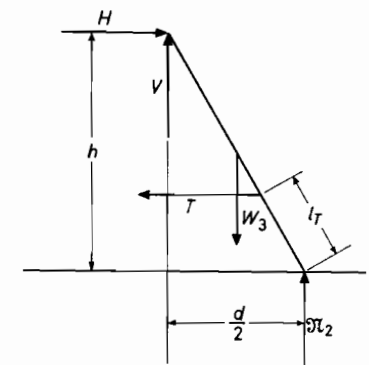


FIG. 9-22

que está apoyada sobre una superficie horizontal sin rozamiento. (¿Por qué hemos de suponer la superficie sin rozamiento?) Deseamos hallar las reacciones normales del piso sobre la escalera y la tensión o tracción del tirante que impide la caída de la misma. Las patas de la escalera pesan  $W_1$  y  $W_3$  newtons, respectivamente, y un hombre, de peso  $W_2$  newtons, está sobre

aquella a una distancia  $l_2$  del pie de una de las patas, como se indica. Dichas patas tienen la misma longitud. Considerando la escalera como un cuerpo rígido, podemos tener únicamente dos cantidades desconocidas en este problema, puesto que los momentos, y también las fuerzas, son colineales. Estas incógnitas son  $\mathcal{N}_1$  y  $\mathcal{N}_2$ . Tomando momentos con respecto a los pies de la escalera, obtenemos las dos ecuaciones

$$\mathcal{N}_1 d - W_3 \frac{d}{4} - W_1 \left( \frac{d}{2} + \frac{d}{4} \right) - W_2 \left( \frac{d}{2} + \frac{l - l_2}{l} \frac{d}{2} \right) = 0$$

y

$$\mathcal{N}_2 d - W_1 \frac{d}{2} - W_2 \frac{l_2}{l} \frac{d}{2} - W_3 \left( \frac{d}{2} + \frac{d}{4} \right) = 0,$$

con las cuales podemos hallar  $\mathcal{N}_1$  y  $\mathcal{N}_2$  en función de las restantes cantidades conocidas.

A veces, también estaremos interesados en las fuerzas internas, como, por ejemplo, la tensión o tracción en el tirante. Para determinar ésta, consideremos una de las patas de la escalera (fig. 9-22) sobre la que actúan el tirante, el piso y la otra pata. Habiendo suprimido el tirante y la otra pata, tenemos que introducir las fuerzas internas que éstos ejercían en la pata que estamos considerando. Observaremos que las fuerzas son ahora coplanares y los momentos son todavía colineales. Por tanto, podemos tener únicamente tres ecuaciones independientes de equilibrio, que nos permitirán determinar  $H$ ,  $V$  y  $T$ .

Para hallar  $T$ , tomaremos momentos con respecto a la parte superior de la escalera. Esto elimina  $H$  y  $V$  de la ecuación resultante, y nos da

$$\mathcal{N}_2 \frac{d}{2} - Th \frac{l - l_r}{l} - W_3 \frac{d}{4} = 0,$$

donde

$$h = \sqrt{l^2 - \frac{d^2}{4}}.$$

Empleando la ecuación (9-66) tenemos

$$H = T \quad \text{y} \quad V = \mathcal{N}_2 - W_3. \blacktriangleleft$$

### 9-13 Equilibrio de un sistema de partículas: principio del trabajo virtual

Aunque el método delineado en la sección anterior nos da siempre el número requerido de ecuaciones para un problema soluble de equilibrio estático, no siempre da las ecuaciones con las que se halla la solución con un mínimo de esfuerzo.

Consideremos, por ejemplo, el problema representado en la figura 9-23. Tenemos en él tres trozas uniformes de igual sección y del mismo peso, colocadas entre dos paredes verticales, como se indica. Deseamos hallar las fuerzas horizontales que las trozas ejercen sobre las paredes.

El método que nos da un sistema más general de ecuaciones de equilibrio se basa en el principio del trabajo virtual. Como hay un número

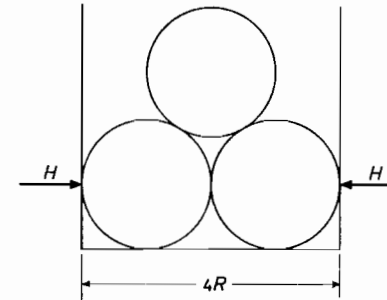


FIG. 9-23

máximo de ecuaciones independientes, cualquier ecuación obtenida a partir del principio del trabajo virtual será necesariamente función de las ecuaciones (9-66) y (9-67).

Para obtener el principio del trabajo virtual, consideremos un sistema de partículas en equilibrio estático. Esto significa que cada partícula está en equilibrio y que, por lo tanto, la fuerza total en la  $i$ -ésima partícula es nula,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \mathbf{F}_i^{\text{int}} + \mathbf{R}_i = 0, \quad (9-69)$$

donde  $\mathbf{R}_i$  representa la fuerza de restricción que puede estar actuando en la  $i$ -ésima partícula. Pero esto significa que el producto escalar de (9-69) por cualquier vector se anulará también,

$$\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (9-70)$$

Suponiendo que

$$\mathbf{u} = \Delta \mathbf{r}_i,$$

donde  $\Delta \mathbf{r}_i$  es un pequeño vector que puede representar un posible desplazamiento de la  $i$ -ésima partícula si ésta se pusiera en movimiento. De aquí que

$$\mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i = 0$$

o bien,

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Si los  $\Delta \mathbf{r}_i$  se eligen de tal manera que cualesquiera restricciones que existan entre las coordenadas de las partículas queden satisfechas, entonces las fuerzas de restricción,  $\mathbf{R}_i$ , que actúan en las partículas serán perpendiculares a los desplazamientos,  $\Delta \mathbf{r}_i$ , y, por tanto,

$$\sum_i \mathbf{R}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i = 0.$$

En cualquier caso,  $\mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i$  representa el trabajo infinitesimal,  $\Delta W_i$ , que la fuerza  $\mathbf{F}_i$  efectúa sobre la  $i$ -ésima partícula en el posible desplazamiento infinitesimal,  $\Delta \mathbf{r}_i$ , de la misma. Si una partícula está situada en un punto donde la fuerza total sobre ella se anula, no se efectuará en ella ningún trabajo; esto es,

$$\Delta W_i = \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i = 0$$

o bien,

$$\Delta W = \sum_i \Delta W_i = 0. \quad (9-71)$$

Como éste es el trabajo que efectuarían todas las fuerzas que actúan sobre el sistema en equilibrio si las partículas se desplazaran las pequeñas cantidades  $\Delta \mathbf{r}_i$  desde sus posiciones de equilibrio,  $\Delta W$  se llama el trabajo virtual. La ecuación (9-71) expresa el hecho de que para un sistema de partículas en equilibrio estático, el trabajo virtual se anula.

► Apliquemos el principio del trabajo virtual para hallar las fuerzas que ejercen las paredes sobre las trozas de la figura 9-23. Debido a la simetría del problema, se puede suponer que las magnitudes de las fuerzas son iguales. Consideraremos, por lo tanto, el efecto de mover la pared de la derecha una distancia  $2 \Delta x$ . Es probable que, en este caso, la troza más alta empujará a las dos más bajas, separándolas y descendiendo una distancia  $\Delta y$ , que será función de  $\Delta x$ . De la figura 9-24, que representa el triángulo formado por los centros de las trozas, y llamando  $2x$  a la distancia entre los centros de las dos trozas inferiores, hallaremos que

$$x^2 + y^2 = 4R^2,$$

de donde se tiene

$$2x \Delta x + 2y \Delta y = 0 \quad \text{o} \quad |\Delta y| = \frac{x}{y} |\Delta x|.$$

Para nuestro ejemplo, en el que las trozas permanecen en contacto

$$x = R, \quad y = R\sqrt{3} \quad \text{y} \quad |\Delta y| = \frac{1}{\sqrt{3}} |\Delta x|.$$

Los desplazamientos virtuales que hemos hecho están, en consecuencia, de acuerdo con las restricciones o condiciones entre las trozas. El trabajo

virtual es, por lo tanto, la suma de los trabajos virtuales efectuados por las fuerzas de gravedad y la fuerza horizontal de la pared desplazada, que actúan sobre las trozas. Esto es

$$\Delta W = mg|\Delta y| - 2H|\Delta x|.$$

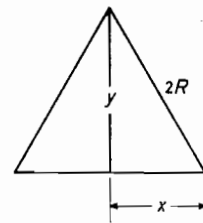


FIG. 9-24

Igualando el trabajo virtual a cero, llegamos a la solución buscada

$$H = mg\sqrt{3}/6. \leftarrow$$

En función de las coordenadas generalizadas,  $q_j$ , que pueden ser utilizadas para la descripción cinemática de un sistema de partículas, hallamos que los desplazamientos virtuales,  $\Delta q_j$ , dan,

$$\Delta W = \sum_j Q_j \Delta q_j. \quad (9-72)$$

Como las coordenadas generalizadas  $q_j$ , por tanto, sus desplazamientos virtuales son independientes, resulta que las condiciones de equilibrio son

$$Q_j = 0. \quad (9-73)$$

Concretamente, si tenemos un sistema de partículas bajo la acción de fuerzas internas y externas conservativas, entonces las condiciones de equilibrio están expresadas por

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} = -\left(\frac{\partial U^{\text{ext}}}{\partial q_j} + \frac{\partial U^{\text{int}}}{\partial q_j}\right) = 0. \quad (9-74)$$

Observamos que esta ecuación expresa una condición necesaria para que la función de energía potencial  $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$  tenga un valor extremo (máximo o mínimo). En el Capítulo 11, que trata de la teoría de las pequeñas vibraciones, expondremos las condiciones sobre las segundas derivadas que determinan si este extremo es máximo o mínimo. Debe quedar claro, por esta explicación de la estabilidad de puntos en equilibrio unidimensional, que un punto en equilibrio estable de un sistema de  $N$  partículas será también probable que sea un punto de energía potencial mínima.



## 9-14 Choque de dos cuerpos rígidos

En la sección 8-3 estudiamos el choque o colisión de dos partículas y hallamos que la cantidad de movimiento lineal total del sistema se conservaba. Al tratar de la colisión o choque de dos cuerpos rígidos encontramos un teorema de conservación adicional, la conservación de la cantidad de movimiento angular total del sistema.

Así, por ejemplo, en el choque de los dos cuerpos rígidos representados en la figura 9-25, partiendo de la anulación de la cantidad de movimiento lineal total del sistema con respecto a su centro de masa,  $C$ , encontramos, una vez más, que

$$M_2 \mathbf{U}'_2 = -M_1 \mathbf{U}'_1 \quad \text{y} \quad M_2 \mathbf{V}'_2 = -M_1 \mathbf{V}'_1, \quad (9-75)$$

donde  $\mathbf{U}'_i$  y  $\mathbf{V}'_i$  son las velocidades relativas de los centros de masa,  $C_i$ , de los dos cuerpos, antes y después del choque, con respecto al centro de masa del sistema.

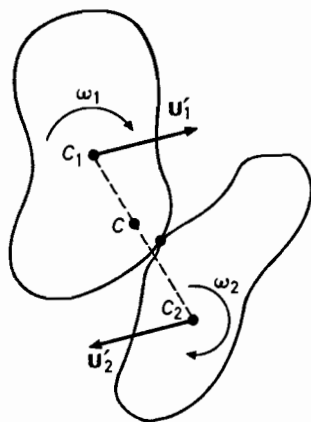


FIG. 9-25

Además, tenemos también la conservación de la cantidad de movimiento angular expresada por

$$\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2, \quad (9-76)$$

donde  $\mathbf{L}_i$  y  $\mathbf{J}_i$  representan las cantidades de movimiento angular total de los cuerpos antes y después del choque con respecto a un punto fijo,  $O$ .

La aplicación de estos teoremas de conservación al choque entre dos cuerpos rígidos cualesquiera puede ser sumamente complicada. Para aclarar los principios que intervienen, consideremos el caso, relativamente sencillo,

de la colisión de dos discos (*pucks*) de hockey sobre hielo idénticos de masa  $M$  que pueden deslizarse libremente sobre un plano horizontal sin rozamiento. Consideremos el caso en que el primer disco, con una velocidad angular inicial  $\omega_1$  y una velocidad inicial  $\mathbf{u}_1$ , choca con el segundo que inicialmente está en reposo, como se indica en la figura 9-26. Después del

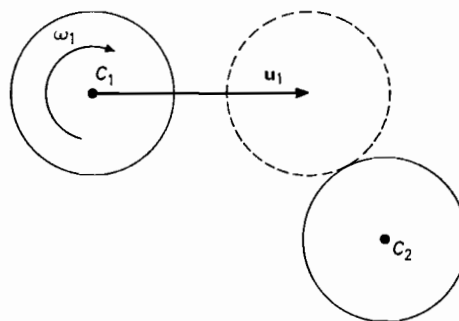


FIG. 9-26

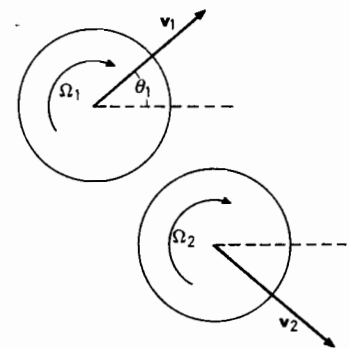


FIG. 9-27

choque, el primer disco tiene una velocidad angular  $\Omega_1$  y se mueve con una velocidad de magnitud  $v_1$  dirigida con un ángulo  $\theta_1$  a partir de su dirección incidente (fig. 9-27). Esta información es suficiente para hallar la velocidad lineal final,  $\mathbf{v}_2$ , y la velocidad angular final,  $\Omega_2$ , del segundo disco. La primera de estas velocidades se obtiene a partir de la conservación de la cantidad de movimiento lineal del sistema. Con

$$M\mathbf{u}_1 - M\mathbf{v}_1 = M\mathbf{v}_2$$

se halla que (fig. 9-28)

$$M^2 v_2^2 = M^2 (u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1 \cos \theta_1)$$

y

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{v_2}{v_1} \text{sen } \theta_2.$$

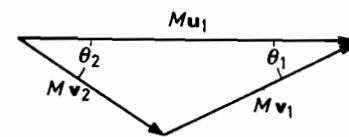


FIG. 9-28

La segunda se obtiene a partir de la conservación de la cantidad de movimiento angular total del sistema. En este problema, las cantidades

de movimiento angulares con respecto al punto en que se encuentra el centro de masa del sistema en el instante del choque, esto es, con respecto al punto de contacto entre los discos, están dirigidas perpendicularmente al plano horizontal. Sus magnitudes, antes del choque son  $L_1 = I\omega_1 + Mu_1R \sin \alpha$

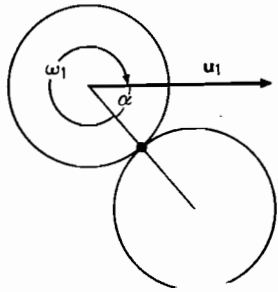


FIG. 9-29

y  $L_2 = 0$ , donde  $\alpha$  es el ángulo entre  $u_1$  y la recta que une los centros de los dos discos en el instante del contacto (fig. 9-29) y  $R$  es el radio de los discos.

Después de la colisión, las magnitudes de las cantidades angulares de movimiento son (fig. 9-30):

$$J_1 = I\Omega_1 + MRv_1 \sin(\alpha + \theta_1), \quad J_2 = I\Omega_2 + MRv_2 \sin(\theta_2 - \alpha).$$

El principio de la conservación de la cantidad de movimiento angular nos da, por consiguiente,

$$I\Omega_2 = I\omega_1 - I\Omega_1 - Mv_1R \sin(\alpha + \theta_1) + Mu_1R \sin \alpha - Mv_2R \sin(\theta_2 - \alpha).$$

Observaremos que la conservación de la cantidad de movimiento angular juega un papel importante en el análisis de problemas de dispersión y reacciones nucleares. Por ejemplo, de una simple consideración de la conservación de la cantidad de movimiento angular total de un sistema se desprende que en la desintegración del neutrón podrían no ser los únicos productos resultantes un protón y un electrón.

Cuando menos se requiere teóricamente una partícula adicional para satisfacer la conservación de la cantidad de movimiento angular, de la cantidad de movimiento lineal y la energía total del sistema. Esta tercera partícula es el neutrino.

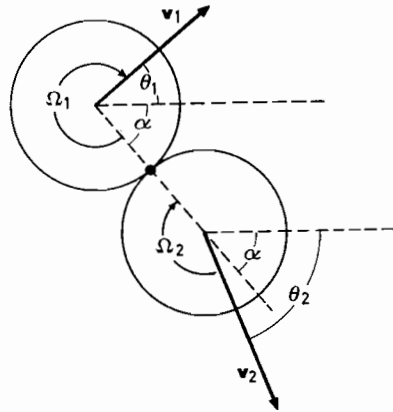


FIG. 9-30

### 9-15 Movimiento de un cuerpo rígido exento de momento rotacional

Como ejemplo de la aplicación de las ecuaciones de movimiento de Euler, consideremos el movimiento de un cuerpo rígido exento de momento rotacional y con un punto fijo. Este ejemplo, incluye también el movimiento sin restricción de un cuerpo rígido, exento de momento rotacional, con respecto a su centro de masa.

Antes de analizar este problema presentaremos una ilustrativa descripción geométrica de este movimiento debida a Poinso.\*

En el movimiento sin momento rotacional de un cuerpo rígido con un punto fijo, tenemos la conservación de la cantidad de movimiento angular y de la energía total del mismo. La última, en este caso, es igual a la energía cinética del cuerpo. Estos teoremas de conservación se expresan por

$$\mathbf{L} = \text{constante} \quad (9-77)$$

y

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} | | \boldsymbol{\omega}) = \text{constante}. \quad (9-78)$$

Considerando que  $\mathbf{L}$  es constante,

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = 2T \quad (9-79)$$

nos dice que la componente de  $\boldsymbol{\omega}$  sobre el vector de la cantidad de movimiento angular constante es también constante. En un espacio de las  $\omega$  cuyos ejes de las  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  y  $\omega_z$ , coincidan con los ejes de las  $x$ ,  $y$  y  $z$ , (9-79) es la ecuación de un plano perpendicular al vector de la cantidad de movimiento angular que está a una distancia  $2T/L$  del origen.

Por otra parte, en el mismo espacio de la  $\omega$ ,

$$\phi(\boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega} | | \boldsymbol{\omega}) = 2T \quad (9-80)$$

es la ecuación de un elipsoide cuyos ejes coinciden con los ejes principales del cuerpo. La ecuación (9-78) nos dice, por consiguiente, que el plano representado por la (9-79), que se llama *plano invariable*, y el elipsoide, representado por la ecuación (9-80), tienen en cualquier instante un punto común. De ahí que el plano invariable deberá ser en todo momento tangente a la *elipsoide de Poinso* (fig. 9-31). Se puede comprobar que esto es así hallando la normal al elipsoide de Poinso en el punto  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ . Vemos que la normal unidad está dada por

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla_{\boldsymbol{\omega}} \phi(\boldsymbol{\omega})}{|\nabla_{\boldsymbol{\omega}} \phi(\boldsymbol{\omega})|}, \quad (9-81)$$

\* Poinso, *Théorie Nouvelle de la Rotation des Corps*, 1834.

donde

$$\nabla_{\omega} \phi(\omega) = \frac{\partial \phi}{\partial \omega_x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial \omega_y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial \omega_z} \mathbf{k} = 2\mathbf{L} \quad (9-82)$$

Como los puntos del cuerpo que se encuentran sobre el vector de velocidad angular instantánea tienen una velocidad instantánea igual a cero, resulta que el punto de contacto entre el elipsoide de Poinsoot y el plano invariable tienen una velocidad igual a cero con respecto al plano.

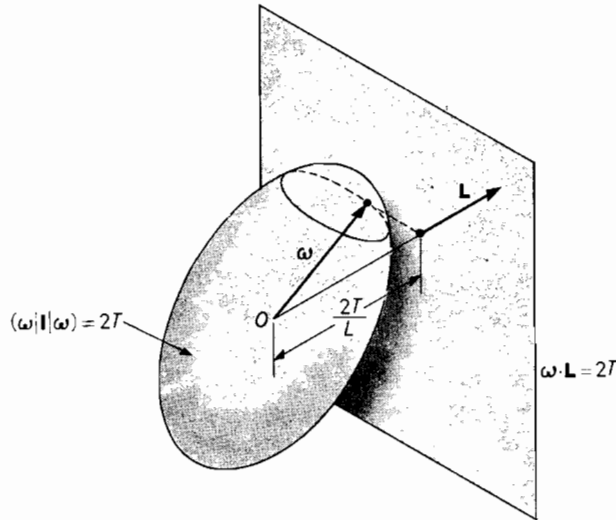


FIG. 9-31

El movimiento del cuerpo rígido se podrá, entonces, describir por la rodadura del elipsoide de Poinsoot sobre el plano invariable.

Aun con esta descripción simplificadora, el movimiento de un cuerpo asimétrico es todavía bastante complicado de visualizar. Su descripción analítica también es complicada e implica el empleo de integrales elípticas. En consecuencia, nos limitaremos al movimiento sin momento rotacional más simple de un cuerpo rígido simétrico.

Para un cuerpo rígido simétrico en que  $I_1 = I_2 = I$ , el elipsoide de Poinsoot es uno de revolución. El vector de velocidad angular permanecerá, por consiguiente constante en magnitud y tendrá un movimiento de precesión alrededor de la recta invariable que es la que pasa por el punto fijo del cuerpo y es perpendicular al plano invariable (fig. 9-32). En la precesión, el vector de velocidad angular describe un cono en el espacio, llamado cono espacial.

Con respecto al sistema de coordenadas del cuerpo, el vector de velocidad angular también es de magnitud constante y su punta trazará una circunferencia en el elipsoide de Poinsoot. Esto es, el vector de velocidad angular tiene una precesión alrededor del eje de simetría del cuerpo y, similarmente, describirá un cono con respecto al cuerpo rígido, llamado cono del cuerpo. Los dos conos son tangentes entre sí sobre el eje instantáneo de rotación. El movimiento del cuerpo simétrico aparecerá, por consiguiente como la rodadura del cono del cuerpo sobre el cono espacial (fig. 9-33). Recíprocamente, con respecto al cuerpo, el cono espacial parecerá que rueda sobre el cono del cuerpo.

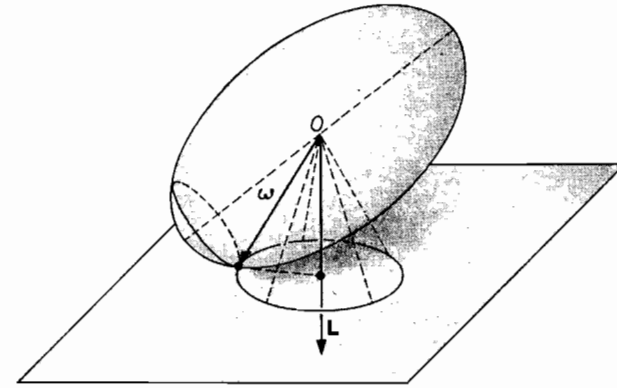


FIG. 9-32

Procederemos a comprobar estas conclusiones por un tratamiento analítico del movimiento sin momento rotacional de un cuerpo rígido simétrico. Para un cuerpo simétrico en que  $I_1 = I_2 = I$ , las ecuaciones de movimiento de Euler [(9-46) hasta (9-48)] se reducen a

$$I\dot{\omega}_1 - (I - I_3)\omega_2\omega_3 = 0, \quad (9-83)$$

$$I\dot{\omega}_2 - (I_3 - I)\omega_1\omega_3 = 0, \quad (9-84)$$

y

$$I\dot{\omega}_3 = 0, \quad (9-85)$$

donde hemos puesto

$$\omega_x = \omega_1, \quad \omega_y = \omega_2 \quad \text{y} \quad \omega_z = \omega_3.$$

Por la ecuación (9-85) vemos que  $\omega_3$ , la componente de la velocidad angular sobre el eje de simetría del cuerpo rígido, es constante.

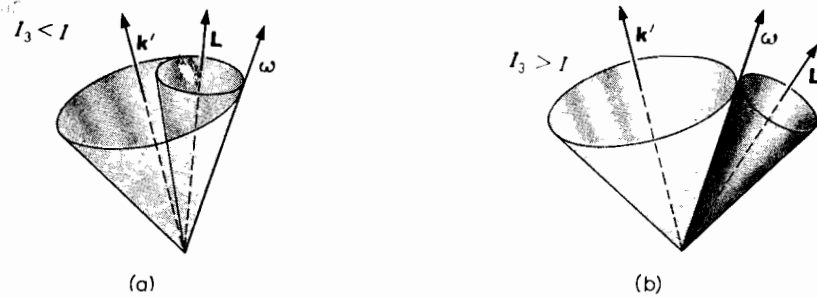


FIG. 9-33. Cono del cuerpo y cono espacial.

Introduciendo este resultado en las otras dos ecuaciones de Euler, obtenemos un par de ecuaciones diferenciales simultáneas con coeficientes constantes

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \left( \frac{I_3 - I}{I} \omega_3 \right) \omega_2 &= 0, \\ \dot{\omega}_2 - \left( \frac{I_3 - I}{I} \omega_3 \right) \omega_1 &= 0. \end{aligned} \quad (9-86)$$

Suponiendo una solución de la forma

$$\omega_1 = A e^{i\alpha t} \quad \text{y} \quad \omega_2 = B e^{i\alpha t},$$

obtenemos

$$i\alpha A + k B = 0, \quad -k A + i\alpha B = 0, \quad (9-87)$$

donde

$$k = \frac{I_3 - I}{I} \omega_3. \quad (9-88)$$

Las ecuaciones simultáneas homogéneas para las amplitudes  $A$  y  $B$  tienen una solución no trivial únicamente si

$$\alpha^2 = k^2, \quad \text{o sea,} \quad \alpha = \pm k, \quad (9-89)$$

con lo que

$$B = \mp i A. \quad (9-90)$$

Puesto que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son reales, la solución general para  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se encuentra, en consecuencia, que está dada por

$$\omega_1 = C \cos(kt + \phi), \quad \omega_2 = C \sin(kt + \phi), \quad (9-91)$$

donde

$$2A = C e^{i\phi}.$$

Estas expresiones de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  representan el vector

$$\omega_{\perp} = \omega_1 \mathbf{i}' + \omega_2 \mathbf{j}' \quad (9-92)$$

de magnitud constante

$$\omega_{\perp} = C,$$

que gira alrededor del eje  $z$  con la velocidad angular constante

$$\Omega = k. \quad (9-93)$$

El vector de la velocidad angular total

$$\omega = \omega_1 \mathbf{i}' + \omega_2 \mathbf{j}' + \omega_3 \mathbf{k}' \quad (9-94)$$

tiene, entonces, la magnitud constante

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{C^2 + \omega_3^2}, \quad (9-95)$$

y además tiene una precesión alrededor del eje  $z$  del cuerpo con la velocidad angular de precesión constante,  $\Omega$ .

Por ejemplo, la Tierra puede considerarse, en una primera aproximación, como un cuerpo rígido exento de momento rotacional. Se sabe que el eje de rotación de la Tierra forma un pequeño ángulo con su eje de simetría y se observa que cada 447 días completa su movimiento de precesión alrededor de este último eje. En una primera aproximación,  $(I_3 - I)/I$  es casi igual a  $33 \times 10^{-4}$ , y de aquí que podríamos calcular que el período probable de precesión del eje de rotación alrededor del eje de simetría fuera

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_3} \frac{I}{I_3 - I} = \frac{10^4}{33} \times 1 \text{ día} = 300 \text{ días}.$$

La discrepancia entre el período observado y el calculado se atribuye al carácter no rígido de la Tierra.

Volviendo al problema en estudio, y eligiendo el eje  $z$  del espacio, en la dirección y sentido de  $\mathbf{L}$ , encontraremos, según se infiere de la construcción de Poinsot, que

$$L_{z'} = I_3 \omega_3 = L \cos \theta, \quad (9-96)$$

o sea, que el ángulo entre  $\omega$  y  $\mathbf{L}$  permanece constante

$$\cos \theta = \frac{I_3 \omega_3}{L} = \text{constante}. \quad (9-97)$$

Además, con la ecuación (9-12)

$$L_{x'} = L \sin \theta \sin \psi = I \omega_1, \quad (9-98)$$

$$L_{y'} = L \sin \theta \cos \psi = I \omega_2,$$

hallamos que

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{L_{x'}}{L_{y'}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \operatorname{ctg} (kt + \phi) \quad (9-99)$$

o sea,

$$\psi = \frac{\pi}{2} - (kt + \phi). \quad (9-100)$$

Este valor de  $\psi$  asegura que  $\sin \psi$  tenga siempre el mismo signo que  $\omega_1$ , y  $\cos \psi$  el mismo signo que  $\omega_2$ .

Finalmente, utilizando el hecho de que  $\dot{\theta} = 0$ , la última de las ecuaciones (9-16) nos dice que

$$\dot{\phi} \cos \theta = \omega_3 - \dot{\psi} = \omega_3 + k = \frac{I_3 \omega_3}{I},$$

o sea,

$$\dot{\phi} = \frac{I_3 \omega_3}{I \cos \theta} = \frac{L}{I} = \dot{\phi}_0 = \text{constante}, \quad (9-101)$$

donde  $\dot{\phi}_0$  es la razón constante al tiempo (o velocidad angular) de la precesión del eje  $z$  del cuerpo alrededor del eje  $z$  del espacio.

Otro ejemplo interesante es el movimiento sin fuerzas aplicadas de un cuerpo rígido cuyo vector de velocidad angular forma un ángulo muy pequeño con uno de los ejes principales del cuerpo. Eligiendo este eje principal para el eje  $z$  del cuerpo, las ecuaciones de movimiento de Euler, son en una primera aproximación,

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= 0, \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 &= 0, \end{aligned} \quad (9-102)$$

y

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0.$$

Hemos supuesto que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son pequeñas, y hemos despreciado el término en  $\omega_1 \omega_2$ . Estas ecuaciones nos dan

$$I_3 \omega_3 = \text{constante}, \quad (9-103)$$

la que, a su vez, reduce las dos primeras de movimiento a las dos ecuaciones diferenciales simultáneas con coeficientes constantes,

$$\dot{\omega}_1 - \left( \frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega_3 \right) \omega_2 = 0 \quad (9-104)$$

y

$$\dot{\omega}_2 - \left( \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_3 \right) \omega_1 = 0.$$

Suponiendo una solución tentativa de la forma

$$\omega_1 = A e^{i\alpha t}, \quad \omega_2 = B e^{i\alpha t}, \quad (9-105)$$

se halla que sólo es posible una solución si

$$\alpha^2 = \left( \frac{I_3 - I_2}{I_1} \right) \left( \frac{I_3 - I_1}{I_2} \right) \omega_3^2. \quad (9-106)$$

Por lo que sólo podremos obtener un valor real para  $\alpha$  si  $I_3$  es bien el mayor o bien el menor de los momentos de inercia principales. Si  $I_3$  es el momento de inercia principal intermedio, esto es, si

$$I_1 < I_3 < I_2,$$

entonces  $\alpha$  es imaginaria.

Un valor real de  $\alpha$  nos da la solución

$$\omega_1 = C \cos(\alpha t + \phi), \quad (9-107)$$

$$\omega_2 = C \sqrt{\frac{I_3 - I_1}{I_3 - I_2} \left( \frac{I_1}{I_2} \right)} \sin(\alpha t + \phi),$$

que significa que el vector de velocidad angular permanecerá en la vecindad o proximidad del eje  $z$  del cuerpo.

Por otro lado, un valor imaginario de  $\alpha$  nos da una solución de la forma

$$\omega_1 = A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}, \quad \omega_2 = B_1 e^{\beta t} + B_2 e^{-\beta t}, \quad (9-108)$$

que nos indica que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  crecen exponencialmente con el tiempo. Entonces, en este último caso,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  no permanecerán pequeños y, en consecuencia, nuestro análisis basado en las ecuaciones aproximadas de movimiento, ecuaciones (9-102), no es adecuado. Observamos, por tanto, que el movimiento de rotación sin fuerzas aplicadas de un cuerpo rígido que tiene un vector de velocidad angular dirigido sobre el eje principal, respecto al cual tiene el valor mayor o el menor de los momentos de inercia principales, es estable, mientras que el movimiento en la vecindad del eje principal, respecto al que tiene el valor intermedio del momento de inercia, es inestable.

### 9-16 Movimiento de un trompo simétrico bajo la acción de la gravedad

En esta sección analizaremos el movimiento de un cuerpo rígido simétrico, con un punto de su eje de simetría fijo, bajo la acción de la gravedad (fig. 9-34). Eligiendo este eje de simetría como eje  $z$  del cuerpo y poniendo

$$I_1 = I_2 = I,$$

hallamos que la función lagrangiana para el cuerpo rígido es

$$L = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgh \cos \theta, \quad (9-109)$$

donde hemos empleado la ecuación (9-50) para la energía cinética y

$$U = Mgh \cos \theta \quad (9-110)$$

para su energía potencial.

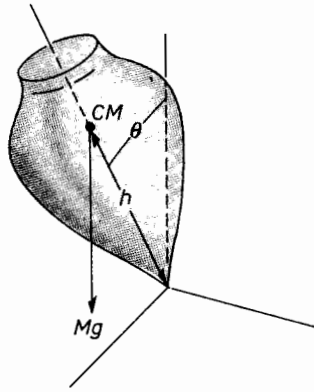


FIG. 9-34

Como la lagrangiana no es una función explícita de los ángulos de Euler,  $\psi$  y  $\phi$ , y el tiempo  $t$ , el que sean constantes las cantidades de movimiento generalizadas,  $p_\psi$  y  $p_\phi$ , y la energía total,  $E$ , se expresará por tres integrales de movimiento. Estas tres integrales son

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = Ia, \quad (9-111)$$

donde  $a$  es una constante,

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I\dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = Ib, \quad (9-112)$$

donde  $b$  es una constante, y

$$T + U = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + Mgh \cos \theta = E. \quad (9-113)$$

Vemos que  $p_\psi$  es la componente de la cantidad de movimiento angular sobre el eje  $z$  del cuerpo, y  $p_\phi$  es la componente de la cantidad de movimiento angular sobre el eje  $z$  del espacio.

En principio, la solución del problema puede hallarse con estas tres ecuaciones integrales del movimiento, sin más empleo de las ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido.

Por ejemplo, en las ecuaciones (9-111) y (9-112) puede despejarse  $\dot{\psi}$  y  $\dot{\phi}$ , obteniendo

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad (9-114)$$

y

$$\dot{\psi} = \frac{I_1 a}{I_3} - \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta} \cos \theta. \quad (9-115)$$

A su vez, estas expresiones introducidas en la ecuación (9-113) nos dan

$$E' = E - \frac{(Ia)^2}{2I_3} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I \left( \frac{b - a \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 + Mgh \cos \theta, \quad (9-116)$$

con la cual podemos obtener la dependencia del tiempo del ángulo  $\theta$  formado por los ejes  $z$  del cuerpo y del espacio. El conocer esta dependencia del tiempo de  $\theta$ , nos permite, a su vez, determinar la dependencia del tiempo de  $\phi$  y  $\psi$  por medio de la integración de las ecuaciones (9-114) y (9-115)

Excepto bajo circunstancias especiales en que se pueden utilizar aproximaciones simplificadoras, la solución general que exprese  $\theta$  en función del tiempo, implica integrales elípticas,\* que oscurecen la comprensión del problema. Por consiguiente, procedemos a una exposición cualitativa del movimiento.

La ecuación (9-116) que expresa la conservación de la energía, también expresa la conservación de la energía total para el movimiento plano de un péndulo físico, de momento de inercia  $I$  con respecto al eje de rotación, en un campo de energía potencial efectiva

$$U'(\theta) = Mgh \cos \theta + \frac{1}{2}I \left( \frac{b - a \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2. \quad (9-117)$$

Este es un problema unidimensional para el que se puede aplicar el análisis de las secciones 4-7 y 4-8. Puesto que  $U'$  toma valores infinitos para  $\theta = 0$  o  $\pi$ , y valores finitos para todos los demás de  $\theta$ , resulta que, para algún valor de  $\theta$  entre 0 y  $\pi$ ,  $U'(\theta)$  tendrá un mínimo (fig. 9-35). Esto ocurre en el valor  $\theta_0$ , que es la raíz de la ecuación

\* Para una integración detallada, véase W. D. MacMillan, *Theoretical Mechanics*, Vol. 3 (*Dynamics of Rigid Bodies*), págs. 216 y siguientes. Nueva York: McGraw-Hill.

$$\begin{aligned} \frac{dU'}{d\theta} &= -Mgh \operatorname{sen} \theta + Ia \left( \frac{b - a \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right) - I \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\operatorname{sen}^3 \theta} \cos \theta \\ &= -Mgh \operatorname{sen} \theta + \frac{I(b - a \cos \theta)(a - b \cos \theta)}{\operatorname{sen}^3 \theta} = 0. \end{aligned} \quad (9-118)$$

Por consiguiente, en general, el movimiento de  $\theta$  es un movimiento limitado, comprendido entre los dos valores  $\theta_1$  y  $\theta_2$  de  $\theta$ , que son las raíces de la ecuación

$$E' = U'(\theta)$$

$$E' = Mgh \cos \theta + \frac{1}{2} I \left( \frac{b - a \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right)^2. \quad (9-119)$$

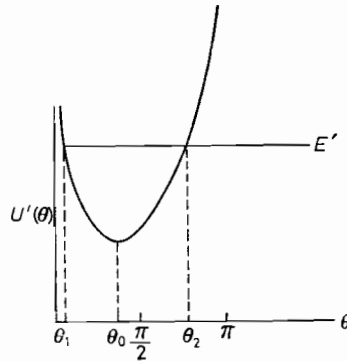


FIG. 9-35. Función de energía potencial efectiva para el movimiento de  $\theta$  del trompo.

La variación del ángulo  $\theta$  se llama nutación del eje de simetría del trompo.

Si

$$E' = U'(\theta_0), \quad (9-120)$$

entonces  $\theta$  permanece fijo en  $\theta_0$  y el trompo tendrá una precesión alrededor del eje  $z$  del espacio con velocidad angular constante

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta_0}{\operatorname{sen}^2 \theta_0}. \quad (9-121)$$

Ahora, encontramos que para un valor dado de  $\theta_0$  existen dos valores de  $\dot{\phi}$  que satisfacen la ecuación (9-118), que es una ecuación cuadrática en  $(b - a \cos \theta)/\operatorname{sen}^2 \theta$ , como puede verse al escribirla en la forma

$$I\dot{\phi}_0^2 \cos \theta_0 - \dot{\phi}_0(I_3\dot{\psi} + I_3\dot{\phi}_0 \cos \theta_0) + Mgh = 0. \quad (9-122)$$

Los dos valores de  $\dot{\phi}_0$  que satisfacen esta ecuación son

$$\dot{\phi}_0 = \frac{I_3\dot{\psi} \pm \sqrt{I_3^2\dot{\psi}^2 - 4Mgh(I - I_3) \cos \theta_0}}{2(I - I_3) \cos \theta_0}. \quad (9-123)$$

Estos dos valores de  $\dot{\phi}_0$  para los que el eje de simetría del trompo tiene precesión uniforme con un ángulo constante  $\theta_0$ , se llaman velocidades angulares de precesión rápida y lenta.

Puesto que  $\dot{\phi}_0$  tiene que ser real, es claro que la cantidad bajo el radical en la ecuación (9-123) se debe definir que es positiva,

$$I_3^2\dot{\psi}^2 - 4Mgh(I - I_3) \cos \theta_0 \geq 0. \quad (9-124)$$

Esto limita los valores de  $\dot{\psi}$  para los que se puede presentar una precesión estable con el ángulo  $\theta_0$ .

La energía potencial efectiva,  $U'(\theta)$ , dada por la ecuación (9-117), tiene un mínimo. Resulta, por lo tanto, que existen situaciones en las cuales el movimiento nutacional del eje del trompo se puede describir como una pequeña oscilación armónica simple a un lado y otro del valor  $\theta = \theta_0$ , en que  $U'(\theta)$  tiene su valor mínimo. La frecuencia de estas pequeñas oscilaciones está dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{I} \frac{d^2U'(\theta_0)}{d\theta_0^2}}. \quad (9-125)$$

Por lo que hallamos

$$\frac{d^2U'(\theta_0)}{d\theta_0^2} = I(a^2 - 4a\dot{\phi}_0 \cos \theta_0 + 4\dot{\phi}_0^2 \cos^2 \theta_0 + \dot{\phi}_0^2). \quad (9-126)$$

Un ejemplo importante de tal caso, es un trompo rápido, o sea uno que gira muy rápidamente alrededor de su eje de simetría (*espín*) con una velocidad angular  $\dot{\psi}_0$ , y cuyo eje estaba inicialmente en reposo en un ángulo  $\theta_1$  y luego quedaba libre. Para este caso, se halla que

$$a = \frac{I_3\dot{\psi}_0}{I}, \quad (9-127)$$

$$b = \frac{I_3\dot{\psi}_0 \cos \theta_1}{I}, \quad (9-128)$$

y

$$E' = Mgh \cos \theta_1. \quad (9-129)$$

Si ahora

$$Ia^2 \gg 2Mgh,$$

esto es, si la energía cinética rotacional con respecto al eje de simetría es mucho mayor que el máximo cambio posible de la energía potencial, entonces  $\dot{\phi}$  es pequeño y, en una primera aproximación, podemos poner

$$\frac{d^2U'(\theta_0)}{d\theta_0^2} = Ia^2$$

$$\omega = a = \frac{I_3\dot{\psi}_0}{I}. \quad (9-130)$$

Con esta aproximación se puede establecer

$$\theta = \theta_1 + A - A \cos \omega t, \quad (9-131)$$

donde  $A$  es una cantidad pequeña. El ángulo medio  $\theta_0$  es

$$\theta_0 = \theta_1 + A. \quad (9-132)$$

Esta solución para  $\theta$  nos da, a su vez,

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta} \approx \frac{b - a[\cos \theta_1 - \sin \theta_1(A - A \cos \omega t)]}{\sin^2 \theta_1 + 2 \sin \theta_1 \cos \theta_1(A - A \cos \omega t)}$$

$$\dot{\phi} = \frac{a}{\sin \theta_1} (A - A \cos \omega t). \quad (9-133)$$

La velocidad angular media de la precesión es

$$\langle \dot{\phi} \rangle = \frac{I_3\dot{\psi}_0 A}{I \sin \theta_1}.$$

Para hallar la amplitud de la nutación, observemos que la segunda raíz de la ecuación (9-119) es

$$\theta_2 = \theta_1 + 2A.$$

Poniendo este valor de  $\theta_2$  en la ecuación (9-119) obtenemos

$$Mgh \cos \theta_1 = Mgh \cos (\theta_1 + 2A) + \frac{1}{2} I \left[ \frac{b - a \cos (\theta_1 + 2A)}{\sin (\theta_1 + 2A)} \right]^2,$$

con la que encontramos que

$$A = \frac{Mgh \sin \theta_1}{Ia^2}, \quad (9-134)$$

y, por tanto,

$$\langle \dot{\phi} \rangle = \frac{Mgh}{I_3\dot{\psi}_0}. \quad (9-135)$$

En resumen, encontramos que un trompo rápido liberado a partir del reposo tiene una precesión lenta y una nutación sinusoidal con una frecuencia grande y una amplitud pequeña.

### Problemas

9-1. a) Hállese una fórmula para los momentos de inercia de un cono de masa  $m$ , altura  $h$  y ángulo de generación  $\alpha$ , con respecto a su eje de simetría y a un eje que pase por el vértice y sea perpendicular al eje de simetría. Determinese el centro de masa del cono.

b) Explíquese cómo pueden utilizarse estos resultados para determinar el centro de masa del tronco de cono de la figura 9-36, y los momentos de inercia con respecto a ejes horizontales que estén en cada base. La masa del tronco de cono es  $M$ .

c) Utilícense los momentos de inercia principales con respecto al centro de masa dados en la tabla 9-1 y el teorema de los ejes paralelos para comprobar la respuesta a la parte a).

9-2. Hállese una fórmula para el radio de giro de una varilla (o barra redonda) uniforme, de longitud  $l$ , con respecto a un eje que pase por un extremo y forme un ángulo  $\theta$  con la varilla.

9-3. Determinense los momentos de inercia principales del elipsoide con semi-ejes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

9-4. Empleando las ecuaciones (9-21) encontramos que un cuerpo rígido que gira alrededor de uno de sus ejes principales tiene un vector de cantidad de movimiento angular que es paralelo a su vector de velocidad angular

$$|\mathbf{L}| = I|\boldsymbol{\omega}| = \lambda|\boldsymbol{\omega}|,$$

donde  $\lambda$  es el momento de inercia principal con respecto al eje principal. Esta ecuación nos da un sistema de ecuaciones simultáneas homogéneas para las componentes de  $\boldsymbol{\omega}$  que sólo tiene una solución no trivial para valores determinados de  $\lambda$ .

a) Utilícense esta ecuación para hallar los momentos de inercia principales (esto es, hallar  $\lambda$ ) con respecto al centro de masa de un cuerpo rígido plano con la forma de un triángulo rectángulo isósceles y de densidad uniforme.

b) ¿Cuáles son las direcciones de los ejes principales?

9-5. a) Tres masas puntiformes (o puntos materiales) están situadas en los puntos  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, a, 2a)$  y  $(0, 2a, a)$ . Hállese los momentos y productos de inercia con respecto a los ejes de coordenadas en el origen para puntos materiales de igual masa.

b) Utilícense la ecuación (problema 9-4)

$$I|\boldsymbol{\omega}| = \lambda|\boldsymbol{\omega}|$$

para hallar los momentos de inercia principales y las direcciones de los ejes principales del sistema en el origen.



9-6. Tres masas iguales están montadas sobre varillas rígidas sin peso que forman ángulos de  $120^\circ$ , como se indica en la figura 9-37. El sistema gira con una velocidad angular constante,  $\omega = \dot{\theta}$  alrededor del eje  $z$ , el cual es perpendicular al plano del papel y se dirige hacia arriba. El sentido de rotación está dado por la flecha.

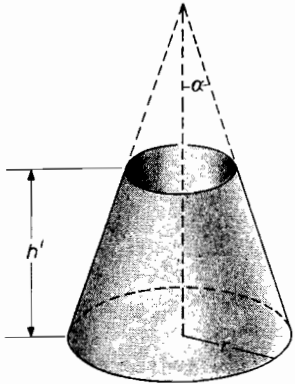


FIG 9-36. Tronco de cono.

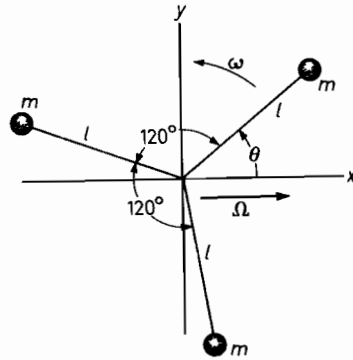


FIG. 9-37

Al mismo tiempo, el sistema gira alrededor del eje  $x$  de modo que el eje  $y$  se mueve hacia afuera del plano de la página. Esta rotación tiene una velocidad angular constante  $\Omega \ll \omega$ . a) Establézcanse los ejes principales del sistema, y b) por medio de las ecuaciones de Euler calcúlense los momentos rotacionales con respecto a  $Ox$ ,  $Oy$  y  $Oz$ . c) ¿Será válido el mismo análisis si el origen  $O$  describiera una curva en el espacio?

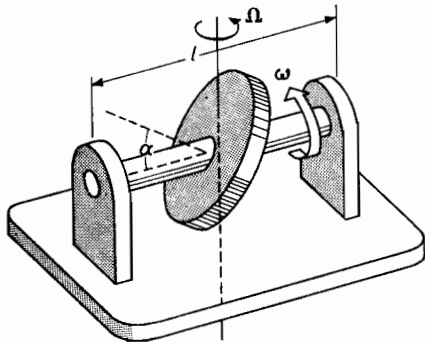


FIG. 9-38

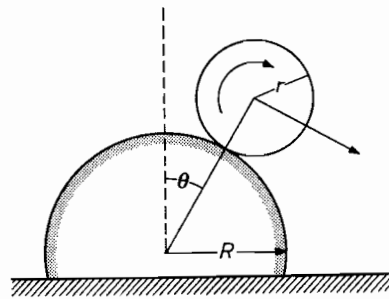


FIG. 9-39

9-7. Un disco simétrico de momento de inercia axial  $I_3$  y momento de inercia transversal  $I$  gira con una velocidad angular  $\omega$  montado sobre un árbol (o flecha) de longitud  $l$ , como se ve en la figura 9-38. El eje de simetría del disco forma un pequeño ángulo  $\alpha$  con dicho árbol. El disco está montado en la mitad de éste. Empleando los ángulos de Euler,  $\theta$ ,  $\psi$  y  $\phi$ , y las ecuaciones de Lagrange: a) hallar el

momento rotacional sobre el árbol y las fuerzas aplicadas a los soportes o cojinetes; b) investigar también los momentos rotacionales si el sistema completo de soporte girase con una velocidad angular  $\Omega$  alrededor de la vertical. Despréciase el movimiento del árbol.

9-8. Un aro de alambre, de radio  $r$  y masa  $m$ , rueda sin deslizar sobre la superficie curva de un cilindro de radio  $R$ , como se ve en la figura 9-39. a) Hállense las ecuaciones lagrangianas del movimiento del aro. b) ¿En qué ángulo  $\theta$  se desprenderá el aro del cilindro? [Sugerencia: utilícese el principio de conservación de la energía.]

9-9. La lenteja de un péndulo, montado sobre una varilla rígida ligera, se apoya sobre una mesa giratoria, como se muestra en la figura 9-40. El plano del movimiento del péndulo es siempre perpendicular al de su armadura soportadora.

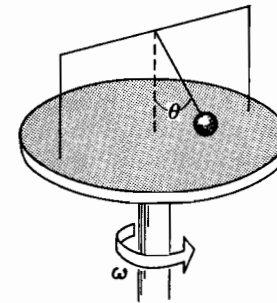


FIG. 9-40

Admitamos que la masa de la lenteja sea  $m$ , la longitud del péndulo  $l$ , el momento de inercia de la mesa giratoria con respecto a su eje  $I$ . Supongamos que sea  $\theta$  el desplazamiento angular del péndulo medido desde la vertical en un instante  $t$ . La varilla que soporta la lenteja tiene una masa despreciable en relación con  $m$ . El momento de inercia  $I$  es grande comparado con el momento de inercia de la citada lenteja con respecto al eje vertical.

Inicialmente,  $\theta = 0$  y  $v = v_0$  para la lenteja, donde  $v$  es la velocidad de ésta y  $\omega = \omega_0$ , siendo  $\omega$  la velocidad angular de la mesa giratoria en el instante  $t$ .

Con las leyes de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento angular, así como con un diagrama de energía, estúdiase el movimiento del sistema. [Sugerencia: desarróllense  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$ , cuando sea necesario, en series de Maclaurin y reténganse sólo los términos hasta el cuarto orden de  $\theta$ .] Distínganse los casos en que  $\theta$  es pequeño y  $\theta$  es grande. Investíguese la velocidad angular crítica,  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ , esto es, indíquese que ocurre cuando  $\omega_0 < \sqrt{g/l}$  y cuando  $\omega_0 > \sqrt{g/l}$ .

9-10. Una barra uniforme, de masa  $M$  y longitud  $2l$ , está suspendida de un extremo por un resorte de constante  $k$ . La barra sólo puede oscilar libremente en un plano vertical y el resorte sólo se puede mover en dirección vertical. Establecer las ecuaciones de movimiento en la forma lagrangiana.

9-11. Una varilla uniforme se desliza con sus extremos en una circunferencia vertical lisa. Si la varilla subtende un ángulo de  $120^\circ$  en el centro de dicha circunferencia, demuéstrese que el péndulo simple equivalente tiene una longitud igual al radio de la circunferencia.

9-12. Un automóvil arranca del reposo con una de sus puertas inicialmente en ángulo recto. Si las bisagras de la puerta están hacia el frente del auto, la puerta se cerrará de golpe cuando éste se acelere. Hállese una fórmula para determinar el tiempo que necesita la puerta para cerrarse si la aceleración,  $A$ , del auto es constante, el radio de giro de la puerta con respecto al eje de rotación es  $k_0$  y si la distancia del centro de masa a las bisagras es  $d$ . Demuéstrese que si  $A$  es  $0.3 \text{ m/seg}^2$  y la puerta es un rectángulo uniforme de  $1.20 \text{ m}$  de ancho, el tiempo será aproximadamente  $3.04 \text{ seg}$ .

9-13. a) Hállese la energía cinética de un cilindro rodante de radio  $R$ , cuyo centro de masa está a una distancia  $h$  de su centro geométrico y uno de sus ejes principales es paralelo al eje del cilindro cuando éste está rodando sobre un plano horizontal. Exprésese  $T$  en función del momento de inercia principal,  $I$ , con respecto a este eje.

b) Hállense las ecuaciones de movimiento del cilindro y el período de las pequeñas oscilaciones del mismo a uno y otro lado de su posición de equilibrio.

9-14. a) Hállese la energía cinética de un cilindro homogéneo de radio  $r$  que está rodando dentro de un cilindro hueco fijo de radio  $R$ .

b) Repítase la parte a) para el caso en que el cilindro hueco de masa  $M$  puede rodar libremente sobre una superficie horizontal.

c) Obténganse las ecuaciones de movimiento de Lagrange y a partir de ellas el período de las pequeñas oscilaciones a un lado y otro de la posición de equilibrio.

9-15. Un cono circular recto macizo cuyo ángulo en el vértice es  $2\alpha$ , rueda sin deslizar en un plano inclinado un ángulo  $\beta$  con la horizontal. El cono tiene una masa  $M$  y una generatriz de longitud  $L$ .

a) Escribanse las ecuaciones lagrangianas del movimiento del cono, usando como coordenada generalizada el ángulo  $\theta$  entre su línea o generatriz de contacto con el plano y la línea, o recta, de máxima pendiente de descenso.

b) ¿Cuál es la frecuencia de las pequeñas oscilaciones a un lado y otro de la posición de equilibrio? [Sugerencia: úsese la línea de contacto como eje instantáneo de rotación y recuérdese que el vértice del cono permanece fijo.]

9-16. Se lanza una pelota a una velocidad  $v_0$  hacia la parte superior de un plano inclinado un ángulo  $\theta$  y cuyo coeficiente de rozamiento  $\mu_{sl}$  es tal que pueda haber movimiento en un plano vertical. Hállese la posición de la pelota en función del tiempo, si ésta no tiene inicialmente movimiento de rotación: a) cuando  $\mu_{sl} > \frac{2}{3} \text{tg } \theta$ . b) cuando  $\mu_{sl} < \frac{2}{3} \text{tg } \theta$ . Tómese  $I = \frac{2}{5} MR^2$ .

9-17. a) Una varilla uniforme de longitud  $l$  se ha puesto en equilibrio, verticalmente, sobre el suelo y después se deja caer. Hállese su aceleración y velocidad angulares en un instante en que forme un ángulo  $\theta$  con la vertical, si el piso es tan áspero que el extremo inferior no pueda resbalar.

b) Repítase la parte a) para el caso en que el piso sea liso y resbalara la varilla.

c) Hállense las ecuaciones de movimiento para el caso en que el coeficiente de rozamiento sea  $\mu$ .

9-18. Una rueda con simetría cilíndrica, de masa  $M$  y radio de giro  $k$  con respecto al eje de simetría, gira (espín) suavemente sobre un eje horizontal fijo de radio  $a$  que pasa por un agujero de radio ligeramente mayor en el centro del cubo de la rueda. El coeficiente de rozamiento entre las superficies de apoyo es  $\mu$ . Si la rueda está inicialmente girando con una velocidad angular  $\omega_0$  ¿cuáles son el tiempo

y el número de vueltas que tardará en parar? [Sugerencia: el eje y el cubo hacen contacto en un solo punto, o mejor dicho en una generatriz.]

9-19. Una varilla horizontal de masa  $m$  y longitud  $2l$  cae bajo la acción de la gravedad y choca contra el filo de un cuchillo situado a la mitad de la distancia entre el centro y el extremo de la varilla (fig. 9-41). Su velocidad, justamente antes del choque es  $V$ . El coeficiente de restitución entre la varilla y el filo es  $\epsilon$ . Calcúlense: a) la velocidad del centro de masa de la varilla, y b) su velocidad angular inmediatamente después del choque.

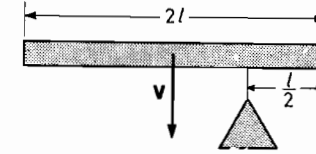


FIG. 9-41

9-20. Un trompo simétrico de momento de inercia axial  $I_3$  comienza a moverse con su eje en posición vertical, esto es,  $\theta = 0$  y  $\dot{\theta} = 0$ .

a) Establézcase el potencial efectivo  $V'(\theta)$  para este caso.

b) Demuéstrese que si  $\dot{\psi}^2 > 4mghI/I_3^2$ , el ángulo se mantendrá en cero.

c) Demuéstrese también que, si  $\dot{\psi}$  es menor que el valor anterior, el trompo oscilará, después de una ligera perturbación entre  $\theta$  casi igual a cero y

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{\dot{\psi}^2 I_3^2}{2mghI} - 1 \right).$$

9-21. Un trompo simétrico, de momento de inercia axial  $I_3$ , se pone en movimiento en el instante  $t = 0$ , siendo  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\theta = \pi/2$  y  $\dot{\phi} = I_3 \dot{\psi}/I$ . Investíguese el comportamiento del trompo cuando  $t > 0$  si

$$a) \dot{\psi}^2 = mghI/I_3^2, \quad b) \dot{\psi}^2 = 2mghI/I_3^2.$$

9-22. a) Demuéstrese que la ecuación (9-49) se deduce de la (9-50) para la energía cinética rotacional de un cuerpo rígido.

b) Hállense las dos ecuaciones de movimiento generalizadas restantes para los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ .

## Elementos de la teoría de las transformaciones lineales

En capítulos anteriores, cuando lo consideramos conveniente, preferimos que el lector se familiarizase con el empleo de la representación matricial de vectores y las ecuaciones vectoriales lineales que relacionaban linealmente las componentes de un vector con las de otro, o bien, dos expresiones o descripciones diferentes, pero equivalentes, de un mismo vector. Estas relaciones lineales se presentan frecuentemente en física e, invariablemente, su representación y la manipulación algebraica de ellas son más concisas en forma matricial o en su notación por operadores equivalente. Hemos llegado a un punto de nuestro estudio de la mecánica en que es adecuado introducir y emplear algunos elementos básicos del álgebra de matrices. Como además, este sistema es indispensable, por ejemplo, en la mecánica cuántica, para las descripciones de los resultados de las mediciones en un sistema y de las relaciones que existen entre distintas cantidades físicas medibles, haremos un estudio más completo de los elementos de la teoría de las transformaciones lineales del que sería necesario si no fuera por ello. El lector hallará de gran utilidad el contenido de este capítulo.

Comenzaremos con un repaso de la representación matricial de vectores y operadores en el espacio vectorial real tridimensional, ya mencionado y, posteriormente, generalizaremos los resultados tridimensionales a los espacios vectoriales reales y complejos de  $n$  dimensiones.

### 10-1 Repaso de la representación matricial de los vectores tridimensionales

En el Capítulo 1\* vimos que se podía determinar un vector tridimensional en función de su producto escalar por tres vectores no coplanares. Así, dados los productos escalares

\* Es conveniente hacer en este momento un repaso de la sección 1-5.

$$\alpha_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_i \quad (10-1)$$

del vector  $\mathbf{A}$  por los tres vectores no coplanares conocidos  $\mathbf{b}_i$ , el vector  $\mathbf{A}$  quedó expresado por

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{b}_i, \quad (10-2)$$

donde las  $\mathbf{b}_i$  son los tres vectores recíprocos de los  $\mathbf{b}_i$ . Se dijo que dos conjuntos de vectores base son recíprocos si sus productos escalares satisfacen la relación

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases} \quad (10-3)$$

Los vectores base  $\mathbf{b}_i$ , recíprocos de los vectores base  $\mathbf{b}_i$ , pueden hallarse fácilmente resolviendo las nueve ecuaciones que establece la relación (10-3), para determinar las nueve componentes de los tres vectores base recíprocos. La solución en el caso de tres dimensiones se obtuvo en la sección 1-5.

Por otra parte, vimos que era conveniente especificar o determinar un vector  $\mathbf{A}$  por medio de sus productos escalares

$$\alpha_i^* = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_i \quad (10-4)$$

con los vectores recíprocos  $\mathbf{b}_i$ . En función de los  $\alpha_i^*$ , el vector  $\mathbf{A}$  quedó expresado por

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^* \mathbf{b}_i. \quad (10-5)$$

Distinguímos las dos formas de representar el vector  $\mathbf{A}$ , poniendo un asterisco como superíndice del símbolo del vector  $\mathbf{A}$  siempre que deseemos expresarlo en la forma dada por la ecuación (10-5). Esto es,

$$\mathbf{A}^* = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^* \mathbf{b}_i. \quad (10-6)$$

Por lo tanto, se vio que el producto escalar de dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  se puede representar más eficazmente, en la forma

$$\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^* \beta_i = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \beta_i^* = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^*, \quad (10-7)$$

en la que

$$\beta_i = \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}_i$$

y

$$\beta_i^* = \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}_i.$$

Una vez seleccionados los vectores base,  $\mathbf{b}_i$ , y sus recíprocos,  $\mathbf{b}_i^*$ , el vector  $\mathbf{A}$  se podrá especificar, indistintamente, por los  $\alpha_i$  o  $\alpha_i^*$ . Se acostumbra utilizar la notación matricial para la especificación de un vector; y dicha especificación o determinación se llama *representación matricial* del vector. Esta representación consiste en colocar ordenadamente en una fila o una columna los productos escalares del vector por los vectores base o por sus recíprocos. Así tenemos que

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

son las representaciones matriciales del vector  $\mathbf{A}$  y

$$[\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*] \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \\ \alpha_3^* \end{bmatrix}$$

son las del  $\mathbf{A}^*$ . Como tanto las representaciones matriciales en fila como en columna son útiles, hemos introducido una notación adicional con la que podremos distinguir la representación particular que se desee. Con ella, el vector  $\mathbf{A}$  se indica por  $|\mathbf{A}|$  cuando su representación haya de ser una matriz columna y por  $(\mathbf{A}|)$  cuando haya de ser una matriz fila. Esto es

$$(\mathbf{A}|) \leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad (10-8)$$

$$(\mathbf{A}| \leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3].$$

Similarmente, el mismo vector  $\mathbf{A}$ , en función de sus productos escalares con los vectores base recíprocos será

$$(\mathbf{A}^*|) \leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \\ \alpha_3^* \end{bmatrix} \quad (10-9)$$

y

$$(\mathbf{A}^*| \leftrightarrow [\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*].$$

La matriz fila  $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$  se conoce como la transpuesta de la matriz columna

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Simbólicamente, expresaremos esto por

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} \widetilde{\alpha}_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

De una forma semejante llamaremos al vector  $(\mathbf{A}|)$  el transpuesto del vector  $|\mathbf{A}|$  y viceversa. Esto se expresa por la ecuación

$$(\mathbf{A}| = |\widetilde{\mathbf{A}}| \quad \text{o} \quad |\mathbf{A}| = (\widetilde{\mathbf{A}}|. \quad (10-10)$$

## 10-2 Algebra matricial \*

Las matrices columna y fila no son más que dos ejemplos de matrices en general. Se define una matriz como una disposición de números ordenados en las filas y columnas de un cuadro, pudiéndose combinar los elementos de la misma con los de otra matriz similar según las reglas específicas para su adición y multiplicación. Estas reglas son muy parecidas a las de la combinación de vectores, por lo que es evidente la utilidad de las matrices en la representación y manipulación de las operaciones vectoriales.

Se llama matriz de orden  $m \times n$  a la formada por  $m$  filas y  $n$  columnas. Por ejemplo, la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

es de orden  $2 \times 3$ .

Se dice que dos matrices son iguales si y sólo si tienen el mismo número de filas y columnas y si los elementos de una matriz son iguales a los correspondientes de la otra. Luego, si la matriz  $(\mathbf{S})$  es igual a la  $(\mathbf{T})$ , el elemento  $S_{ij}$  que se encuentra en la fila  $i$  y la columna  $j$  de la matriz  $(\mathbf{S})$  es igual al elemento  $T_{ij}$  de la fila  $i$  y la columna  $j$  de la  $(\mathbf{T})$

$$S_{ij} = T_{ij}.$$

Dos matrices de orden  $m \times n$  se pueden sumar dando otra matriz de orden  $m \times n$ . La matriz  $(\mathbf{R})$  que es igual a la suma o resta de las matrices  $(\mathbf{S})$  y  $(\mathbf{T})$ ,

$$(\mathbf{R}) = (\mathbf{S}) \pm (\mathbf{T}), \quad (10-11)$$

\* La mayor parte del contenido de esta sección se introdujo anteriormente (secciones 1-6 y 3-5).

se define por la matriz cuyos elementos son iguales a la suma o resta de los elementos de  $(\mathbf{S})$  y  $(\mathbf{T})$ :

$$R_{ij} = S_{ij} \pm T_{ij}. \quad (10-12)$$

Por ejemplo, la suma de las dos matrices

$$(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

es la matriz

$$(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} 1+2 & 0-1 \\ -2+1 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La multiplicación de una matriz  $(\mathbf{S})$  por un escalar  $c$  nos da una matriz similar cuyos elementos son  $c$  veces los de  $(\mathbf{S})$ . Esto es,

$$(\mathbf{R}) = c(\mathbf{S}) \quad (10-13)$$

implica

$$R_{ij} = cS_{ij}. \quad (10-14)$$

Dos matrices también se pueden multiplicar, como indicamos en la sección 3-5. Sin embargo, la multiplicación de dos matrices cualesquiera,  $(\mathbf{S})$  y  $(\mathbf{T})$ , indicada por  $(\mathbf{S})(\mathbf{T})$ , sólo está definida si el número de columnas de  $(\mathbf{S})$  es igual al de filas de  $(\mathbf{T})$ . Luego, si  $(\mathbf{S})$  es una matriz de  $m \times p$  y  $(\mathbf{T})$  de  $p \times n$ , entonces la matriz producto

$$(\mathbf{R}) = (\mathbf{S})(\mathbf{T}) \quad (10-15)$$

queda definida y es una matriz de orden  $m \times n$  cuyos elementos,  $R_{ij}$ , están dados por

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^p S_{ik}T_{kj}. \quad (10-16)$$

Por ejemplo, el producto matricial de las dos matrices

$$(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se halla que es la matriz

$$(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & -4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}.$$

El producto escalar de dos vectores se puede expresar por el producto matricial de sus representaciones en matriz fila y matriz columna, respectivamente

$$\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{A}^*|\mathbf{B}) = [\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^* \beta_i, \quad (10-17)$$

y con esta ecuación hallamos que

$$(\mathbf{A}^*|\mathbf{B}) = (\mathbf{B}^*|\mathbf{A}) = (\mathbf{A}|\mathbf{B}^*). \quad (10-18)$$

Observamos que la multiplicación de una matriz de  $m \times p$  y otra de  $p \times m$  se puede efectuar en uno u otro orden. Esto es, podemos hacer lo mismo el producto  $(\mathbf{S})(\mathbf{T})$  que el  $(\mathbf{T})(\mathbf{S})$ . Sin embargo, se halla que aun en el caso de matrices cuadradas, en las que  $m = p$ , los dos productos matriciales no son generalmente iguales:

$$(\mathbf{S})(\mathbf{T}) \neq (\mathbf{T})(\mathbf{S}).$$

En otras palabras, la multiplicación de matrices no es por regla general, conmutativa. Se llaman *matrices conmutativas* a dos matrices cuadradas para las que no influye el orden de las matrices en el producto matricial, es decir, para las que

$$(\mathbf{S})(\mathbf{T}) = (\mathbf{T})(\mathbf{S}). \quad (10-19)$$

Por ejemplo, las matrices

$$(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

no son conmutativas, pues se halla que

$$(\mathbf{S})(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

mientras que

$$(\mathbf{T})(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -(\mathbf{S})(\mathbf{T}). \quad (10-20)$$

Las matrices en las que se verifica esta última relación se llaman *anticonmutativas*.

Como se puede verificar fácilmente la multiplicación de matrices es asociativa:

$$[(\mathbf{R})(\mathbf{S})](\mathbf{T}) = (\mathbf{R})[(\mathbf{S})(\mathbf{T})] = (\mathbf{R})(\mathbf{S})(\mathbf{T}). \quad (10-21)$$

También es distributiva:

$$(\mathbf{R})[(\mathbf{S}) + (\mathbf{T})] = (\mathbf{R})(\mathbf{S}) + (\mathbf{R})(\mathbf{T}). \quad (10-22)$$

La *matriz cero o nula* ( $\mathbf{0}$ ) es aquella cuyos elementos son todos cero; y satisface las ecuaciones matriciales siguientes:

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}) + (\mathbf{0}) &= (\mathbf{S}), \\ (\mathbf{S})(\mathbf{0}_1) &= (\mathbf{0}_2)(\mathbf{S}) = (\mathbf{0}_3), \end{aligned} \quad (10-23)$$

donde los subíndices de las matrices nulas indican que no son necesariamente de las mismas dimensiones.

La *matriz unidad o de identidad* ( $\mathbf{1}$ ), de la que ya hablamos en la sección 3-5, es la que satisface las ecuaciones

$$\begin{aligned} (\mathbf{1})(\mathbf{S}) &= (\mathbf{S}), \\ (\mathbf{S})(\mathbf{1}) &= (\mathbf{S}). \end{aligned} \quad (10-24)$$

De la regla de la multiplicación de dos matrices se deduce que la matriz unidad debe ser una cuadrada cuyos elementos están dados por

$$(\mathbf{1})_{ij} = \delta_{ij}. \quad (10-25)$$

Esto es, en la matriz unidad todos los elementos que no se encuentren en la diagonal principal son nulos y los de la diagonal son la unidad

$$(\mathbf{1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & & 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}. \quad (10-26)$$

Una matriz en que todos los elementos que no estén en la diagonal principal sean nulos se llama *matriz diagonal*, y sus elementos se expresan por

$$S_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}. \quad (10-27)$$

Entonces, la multiplicación de una matriz por un escalar,  $c$ , es equivalente a su multiplicación por la *matriz escalar*

$$(\mathbf{C}) = c(\mathbf{1}).$$

La *transpuesta* ( $\tilde{\mathbf{S}}$ ) de la matriz ( $\mathbf{S}$ ) es la matriz formada intercambiando las filas y las columnas de ( $\mathbf{S}$ ). Por consiguiente, si ( $\mathbf{S}$ ) es una matriz de  $m \times n$ , entonces su transpuesta ( $\tilde{\mathbf{S}}$ ) es una matriz de  $n \times m$  cuyos elementos son

$$\tilde{S}_{ij} = S_{ji}. \quad (10-28)$$

Por ejemplo, la transpuesta de la matriz

$$(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

es la matriz

$$(\tilde{\mathbf{S}}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si sucede que

$$(\tilde{\mathbf{S}}) = (\mathbf{S}), \quad (10-29)$$

entonces se dice que la matriz es *simétrica*. Por otra parte, si

$$\tilde{S}_{ij} = -S_{ji}, \quad (10-30)$$

o sea, si

$$(\tilde{\mathbf{S}}) = -(\mathbf{S}), \quad (10-31)$$

se dice que la matriz es *antisimétrica*.

Observaremos que una matriz siempre se puede descomponer en una parte simétrica y otra antisimétrica. Si llamamos, respectivamente ( $\mathbf{S}_s$ ) y ( $\mathbf{S}_a$ ) a las partes simétrica y antisimétrica de la matriz ( $\mathbf{S}$ ) y establecemos que

$$(\mathbf{S}) = (\mathbf{S}_s) + (\mathbf{S}_a) \quad \text{y} \quad (\tilde{\mathbf{S}}) = (\mathbf{S}_s) - (\mathbf{S}_a)$$

hallamos que

$$(\mathbf{S}_s) = \frac{1}{2}[(\mathbf{S}) + (\tilde{\mathbf{S}})] \quad (10-32)$$

y

$$(\mathbf{S}_a) = \frac{1}{2}[(\mathbf{S}) - (\tilde{\mathbf{S}})], \quad (10-33)$$

o sea,

$$(\mathbf{S}) = \frac{1}{2}[(\widetilde{\mathbf{S}}) + (\mathbf{S})] + \frac{1}{2}[(\mathbf{S}) - (\widetilde{\mathbf{S}})]. \quad (10-34)$$

Por ejemplo, para la matriz

$$(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

y su transpuesta

$$(\widetilde{\mathbf{S}}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

podemos construir la parte simétrica de  $(\mathbf{S})$ ,

$$(\mathbf{S}_s) = \frac{1}{2}[(\mathbf{S}) + (\widetilde{\mathbf{S}})] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

y la parte antisimétrica

$$(\mathbf{S}_a) = \frac{1}{2}[(\mathbf{S}) - (\widetilde{\mathbf{S}})] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observaremos que, como en una matriz antisimétrica

$$S_{ij} = -S_{ji},$$

una matriz antisimétrica de  $3 \times 3$ , quedará determinada si conocemos sus tres elementos no diagonales,

$$S_{23} = S_1, \quad S_{31} = S_2 \quad \text{y} \quad S_{12} = S_3.$$

La matriz transpuesta del producto de dos matrices  $(\mathbf{S})$  y  $(\mathbf{T})$  es igual al producto de la transpuesta de  $(\mathbf{T})$  por la transpuesta de  $(\mathbf{S})$ ,

$$[(\mathbf{S})(\mathbf{T})] = (\widetilde{\mathbf{T}})(\widetilde{\mathbf{S}}). \quad (10-35)$$

Este resultado se puede verificar muy fácilmente. En efecto, de la definición del producto de dos matrices y la definición de matriz transpuesta, se halla que

$$[(\mathbf{S})(\mathbf{T})]_{ij} = \sum_k S_{ik}T_{kj},$$

y, por lo tanto,

$$[(\mathbf{S})(\mathbf{T})]_{ji} = [(\mathbf{S})(\mathbf{T})]_{ij} = \sum_k S_{ik}T_{kj} = \sum_k \widetilde{T}_{jk}\widetilde{S}_{ki} = [(\widetilde{\mathbf{T}})(\widetilde{\mathbf{S}})]_{ji}.$$

Por ejemplo, vamos a determinar la transpuesta del producto de las dos matrices

$$(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se halla que

$$(\mathbf{S})(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 5 & 0 & 2 \\ 11 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

y, por consiguiente,

$$[(\mathbf{S})(\mathbf{T})] = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 11 \\ 6 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

que se ve es igual a

$$(\widetilde{\mathbf{T}})(\widetilde{\mathbf{S}}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 11 \\ 6 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Otra matriz importante es la *inversa o recíproca* de una matriz cuadrada. La inversa  $(\mathbf{S}^{-1})$  de la matriz cuadrada,  $(\mathbf{S})$ , es aquella cuyo producto por  $(\mathbf{S})$  da la matriz unidad

$$(\mathbf{S}^{-1})(\mathbf{S}) = (\mathbf{1}) \quad (10-36)$$

o, equivalentemente,

$$(\mathbf{S})(\mathbf{S}^{-1}) = (\mathbf{1}). \quad (10-37)$$

De la definición de matriz unidad [ecuación (10-24)], se deduce que las ecuaciones (10-36) y (10-37) son equivalentes, y que una cualquiera de ellas es suficiente para definir una inversa única. Multiplicando la ecuación (10-36) por  $(\mathbf{S})$ , hallamos que

$$[(\mathbf{S})(\mathbf{S}^{-1})](\mathbf{S}) = (\mathbf{S}),$$

lo que implica que

$$(\mathbf{S})(\mathbf{S}^{-1}) = (\mathbf{1}).$$

Se puede hallar una inversa de una matriz cuadrada,  $(\mathbf{S})$ , de orden  $n \times n$ , si y sólo si las  $n^2$  ecuaciones simultáneas

$$\sum_{k=1}^n S_{ik}^{-1} S_{kj} = \delta_{ij}, \quad (10-38)$$

que representan los elementos de la ecuación (10-36), se pueden resolver para determinar los  $S_{ij}^{-1}$ . La condición necesaria y suficiente para que esto sea posible es que no se anule el determinante formado por los elementos de la matriz  $(\mathbf{S})$ ; esto es,  $\det(\mathbf{S}) \neq 0$ . Una matriz cuadrada cuyo determinante no se anula se llama matriz cuadrada *no singular*; y si el determinante se anula, se llama *singular*.

### 10-3 Producto directo: operadores

Hay aún otra forma de multiplicar matrices. Es el *producto directo* de dos matrices,  $(\mathbf{S})$  y  $(\mathbf{T})$ , que se define por la matriz cuyos elementos son los productos de los de  $(\mathbf{S})$  y  $(\mathbf{T})$ . O sea, si  $(\mathbf{S})$  es una matriz de orden  $m \times n$  con  $m \cdot n$  elementos y  $(\mathbf{T})$  es otra de orden  $o \times p$  con  $o \cdot p$  elementos, su producto directo, designado por

$$(\mathbf{R}) = (\mathbf{S}) \otimes (\mathbf{T}), \quad (10-39)$$

es una matriz de orden  $(m \cdot o) \times (n \cdot p)$  con  $(m \cdot o \cdot n \cdot p)$  elementos dispuestos en un orden adecuado. Para distinguir el producto directo de una matriz fila por otra columna, del producto matricial de las mismas matrices, indicaremos el primero colocando la matriz columna a la izquierda de la fila. El producto directo de las matrices  $(\mathbf{A})$  y  $(\mathbf{B})$  se define, entonces, por

$$(\mathbf{A}) \otimes (\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} [B_1, B_2, B_3] = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{bmatrix}. \quad (10-40)$$

Podemos considerar que la matriz del producto directo  $(\mathbf{A}) \otimes (\mathbf{B})$  es la representación matricial del producto directo de los dos vectores  $|\mathbf{A}\rangle$  y  $|\mathbf{B}\rangle$ . Veremos que esta interpretación de producto directo de la matriz columna  $(\mathbf{A})$  por la matriz fila  $(\mathbf{B})$  es muy útil. Este producto de los dos vectores  $|\mathbf{A}\rangle$  y  $|\mathbf{B}\rangle$  se indicará por  $|\mathbf{A}\rangle |\mathbf{B}\rangle$  y la interpretación anterior del producto directo de las dos matrices  $(\mathbf{A})$  y  $(\mathbf{B})$  se expresa por

$$|\mathbf{A}\rangle |\mathbf{B}\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{bmatrix}. \quad (10-41)$$

Como ejemplo de la utilidad del producto directo de una matriz columna por otra fila, consideraremos el producto matricial de la matriz cuadrada  $(\mathbf{A}) \otimes (\mathbf{B}^*)$  por la matriz columna

$$(\mathbf{C}) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}.$$

El resultado es la matriz columna

$$(\mathbf{D}) = \begin{bmatrix} A_1(B_1^* C_1 + B_2^* C_2 + B_3^* C_3) \\ A_2(B_1^* C_1 + B_2^* C_2 + B_3^* C_3) \\ A_3(B_1^* C_1 + B_2^* C_2 + B_3^* C_3) \end{bmatrix} = (\mathbf{A})(\mathbf{B}^*|\mathbf{C}), \quad (10-42)$$

que se ve fácilmente es la representación matricial del vector

$$\mathbf{D} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A}. \quad (10-43)$$

Es decir, comenzamos por multiplicar la representación matricial del producto directo,  $|\mathbf{A}\rangle |\mathbf{B}^*\rangle$ , por la representación matricial del vector  $|\mathbf{C}\rangle$  y obtuvimos la representación matricial del vector  $|\mathbf{D}\rangle = |\mathbf{A}\rangle \{(\mathbf{B}^*|\mathbf{C})\}$ . Se desprende, por lo tanto, que podemos establecer

$$\{|\mathbf{A}\rangle |\mathbf{B}^*\rangle\} |\mathbf{C}\rangle = |\mathbf{A}\rangle \{(\mathbf{B}^*|\mathbf{C})\}, \quad (10-44)$$

y semejantemente

$$(\mathbf{C}|\{|\mathbf{A}^*\rangle\} |\mathbf{B}\rangle = \{(\mathbf{C}|\mathbf{A}^*\rangle\} |\mathbf{B}\rangle. \quad (10-45)$$

La ecuación (10-43) es una ecuación lineal que relaciona las componentes del vector  $|\mathbf{D}\rangle$  con las del vector  $|\mathbf{A}\rangle$ . Por la ecuación (10-42) vemos que también la podemos interpretar como una ecuación vectorial lineal que relaciona las componentes del vector  $|\mathbf{D}\rangle$  con las del vector  $|\mathbf{C}\rangle$ . En este sentido, podemos considerar el producto directo

$$\mathbf{P} = |\mathbf{A}\rangle |\mathbf{B}^*\rangle \quad (10-46)$$

como un operador que, cuando actúa sobre el vector  $|\mathbf{C}\rangle$ , da el vector  $|\mathbf{D}\rangle$ , expresado por

$$|\mathbf{D}\rangle = \mathbf{P}|\mathbf{C}\rangle. \quad (10-47)$$



Con esta notación podremos, por ejemplo, expresar la relación entre la cantidad de movimiento angular y los vectores de velocidad angular de un cuerpo rígido (sección 9-3) por

$$|\mathbf{L}| = \mathbf{I}|\boldsymbol{\omega}|,$$

donde los momentos de inercia y los productos de inercia se consideran, en dicho sentido, que son los elementos de la representación matricial del operador momento de inercia,  $\mathbf{I}$ . En igual forma, se puede expresar la relación más general entre el campo eléctrico y los vectores de desplazamiento eléctrico en un punto de un medio anisótropo por

$$|\mathbf{D}| = \epsilon|\mathbf{E}|,$$

y la relación entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  por

$$|\mathbf{B}| = \mu|\mathbf{H}|.$$

Se pueden citar otros muchos ejemplos en los que tengamos dos cantidades vectoriales relacionadas linealmente entre sí. En todas ellas, la notación y la manipulación matemática de sus ecuaciones, que se expondrán en las siguientes secciones, son las mismas. En consecuencia, las secciones subsiguientes a este capítulo son muy importantes. A medida que se continúe con éste y los siguientes capítulos se evidenciará la sencillez y utilidad de la notación que hemos establecido.

Como un último ejemplo † (problema 1-19), consideraremos la relación entre las representaciones matriciales de los vectores

$$|\mathbf{A}| = \sum_j \alpha_j |b_j| \quad \text{y} \quad |\mathbf{A}^*| = \sum_j \alpha_j^* |b_j^*|.$$

La representación en matriz columna de los vectores base,  $b_i$ , se halla que está dada por

$$|b_1| \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |b_2| \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |b_3| \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (10-48)$$

y

$$|b_1^*| \leftrightarrow \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{13} \end{bmatrix}, \quad |b_2^*| \leftrightarrow \begin{bmatrix} g_{21} \\ g_{22} \\ g_{23} \end{bmatrix}, \quad |b_3^*| \leftrightarrow \begin{bmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{bmatrix}, \quad (10-49)$$

† En este ejemplo, los elementos de las representaciones matriciales de un vector son los productos escalares del vector por los vectores base  $b_i$ , o por los vectores base recíprocos,  $b_i^*$ , cuyas componentes cartesianas se suponen conocidas. La dificultad de la notación aclarará por qué se prefiere escoger vectores base ortogonales en los que no hay distinción entre las componentes covariantes y contravariantes.

donde

$$g_{ij} = b_i \cdot b_j = (b_i | b_j^*). \quad (10-50)$$

Análogamente, la representación matricial de los vectores base recíprocos,  $b_i^*$ , está dada por

$$|b_1| \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |b_2| \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |b_3| \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (10-51)$$

y

$$|b_1^*| \leftrightarrow \begin{bmatrix} g_{11}^* \\ g_{12}^* \\ g_{13}^* \end{bmatrix}, \quad |b_2^*| \leftrightarrow \begin{bmatrix} g_{21}^* \\ g_{22}^* \\ g_{23}^* \end{bmatrix}, \quad |b_3^*| \leftrightarrow \begin{bmatrix} g_{31}^* \\ g_{32}^* \\ g_{33}^* \end{bmatrix}, \quad (10-52)$$

donde

$$g_{ij}^* = b_i \cdot b_j = (b_i | b_j^*). \quad (10-53)$$

De la definición de las  $\alpha_j^*$  tenemos

$$\alpha_j^* = (b_j^* | \mathbf{A}) = \sum_i (b_j^* | b_i) \alpha_i = \sum_i g_{ji}^* \alpha_i. \quad (10-54)$$

Pero (10-54) se puede interpretar como la ecuación que expresa la relación entre los elementos de la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \\ \alpha_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}^* & g_{12}^* & g_{13}^* \\ g_{21}^* & g_{22}^* & g_{23}^* \\ g_{31}^* & g_{32}^* & g_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad (10-55)$$

la cual, a su vez, se puede considerar que es la representación matricial de la ecuación

$$|\mathbf{A}^*| = \mathbf{g}^* |\mathbf{A}|, \quad (10-56)$$

donde el operador  $\mathbf{g}^*$  es

$$\mathbf{g}^* = \sum_i |b_i^*| (b_i^*|), \quad (10-57)$$

como se puede verificar operando con él en

$$|\mathbf{A}| = \sum_j \alpha_j |b_j|.$$

El producto escalar de dos vectores se puede expresar, en función de  $\mathbf{g}^*$ , en la forma

$$(\mathbf{B} | \mathbf{A}^*) = (\mathbf{B} | \mathbf{g}^* | \mathbf{A}). \quad (10-58)$$

Análogamente, vemos que

$$\alpha_i = (b_i | \mathbf{A}^*) = \sum_j (b_i | b_j^*) \alpha_j^*, \quad (10-59)$$

lo que nos da

$$|\mathbf{A}| = \mathbf{g} |\mathbf{A}^*|, \quad (10-60)$$

donde el operador  $\mathbf{g}$  está dado por

$$\mathbf{g} = \sum_i |b_i| (b_i|). \quad (10-61)$$

En función de  $\mathbf{g}$  se expresa el producto escalar de dos vectores por

$$(\mathbf{A}^* | \mathbf{B}) = (\mathbf{A}^* | \mathbf{g} | \mathbf{B}^*). \quad (10-62)$$

Se llama **g** operador métrico y los elementos  $g_{ij}$  de su representación matricial se denominan *elementos covariantes del tensor métrico*.

Combinando las ecuaciones (10-56) y (10-60) se halla que

$$|\mathbf{A}\rangle = \mathbf{g}\mathbf{g}^*|\mathbf{A}\rangle \quad \text{y} \quad |\mathbf{A}^*\rangle = \mathbf{g}^*\mathbf{g}|\mathbf{A}^*\rangle,$$

de donde se deduce que

$$\mathbf{g}^*\mathbf{g} = \mathbf{g}\mathbf{g}^* = \mathbf{1}, \tag{10-63}$$

siendo **1** el operador unidad cuya representación matricial es la matriz unidad. Por la definición de la inversa de una matriz, se ve que  $\mathbf{g}^*$  es el operador métrico inverso

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{g}^{-1}. \tag{10-64}$$

Como la matriz  $\mathbf{g}^*$  es la inversa de la representación matricial de **g**, obtenemos la importante relación

$$\sum_k g_{ik}^* g_{kj} = \delta_{ij}. \tag{10-65}$$

Utilizando las ecuaciones (10-57), (10-60) y (10-63) se halla que el operador unidad, **1**, que satisfaga las relaciones

$$\mathbf{1}|\mathbf{A}\rangle = |\mathbf{A}\rangle \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{A}^*|\mathbf{1} = \langle \mathbf{A}^*|$$

está dado por

$$\mathbf{1} = \mathbf{g}\mathbf{g}^* = \mathbf{g} \sum_i |b_i^*\rangle \langle b_i^*| = \sum_i |b_i\rangle \langle b_i|, \tag{10-66}$$

puesto que

$$\mathbf{g}|b_i^*\rangle = |b_i\rangle. \tag{10-67}$$

Equivalentemente, el operador unidad que satisfaga las relaciones

$$\mathbf{1}|\mathbf{A}^*\rangle = |\mathbf{A}^*\rangle \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{A}|\mathbf{1} = \langle \mathbf{A}| \tag{10-68}$$

está dado por

$$\mathbf{1} = \mathbf{g}^*\mathbf{g} = \mathbf{g}^* \sum_i |b_i\rangle \langle b_i| = \sum_i |b_i^*\rangle \langle b_i^*|, \tag{10-69}$$

puesto que

$$\mathbf{g}^*|b_i\rangle = |b_i^*\rangle.$$

La elección de cuál de los desarrollos, aparentemente diferentes, del operador unidad, haya de utilizarse depende del cual opere dicho operador unidad. Debemos escoger siempre el que forme un producto escalar con el vector sobre el que se opere. Así, por ejemplo, cuando se opere sobre los vectores  $|\mathbf{A}\rangle$  o  $\langle \mathbf{A}^*|$ , escogeremos la forma dada por la ecuación (10-66).

En conclusión, presentaremos una forma conveniente de disponer los elementos de la matriz del producto directo  $(\mathbf{R}) = (\mathbf{S}) \otimes (\mathbf{T})$ . Primero expresaremos  $(\mathbf{R})$  por una matriz cuyos elementos son en sí mismos matrices, esto es,

$$(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} S_{11}(\mathbf{T}) & S_{12}(\mathbf{T}) & S_{13}(\mathbf{T}) & \cdots \\ S_{21}(\mathbf{T}) & S_{22}(\mathbf{T}) & & \cdot \\ S_{31}(\mathbf{T}) & S_{32}(\mathbf{T}) & & \cdot \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}, \tag{10-70}$$

y después desarrollaremos la matriz  $(\mathbf{T})$ , obteniendo

$$(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} S_{11}T_{11} & S_{11}T_{12} & \cdots & S_{12}T_{11} & S_{12}T_{12} & \cdots \\ S_{11}T_{21} & S_{11}T_{22} & \cdots & S_{12}T_{21} & S_{12}T_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ S_{21}T_{11} & S_{21}T_{12} & \cdots & S_{22}T_{11} & S_{22}T_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ S_{21}T_{21} & S_{21}T_{22} & \cdots & S_{22}T_{21} & S_{22}T_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}. \tag{10-71}$$

Como ejemplo, hallaremos el producto directo de las dos matrices columna

$$(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix},$$

el cual es la matriz columna de nueve elementos

$$(\mathbf{R}) = (\mathbf{A}) \otimes (\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} A_1(\mathbf{B}) \\ A_2(\mathbf{B}) \\ A_3(\mathbf{B}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 \\ A_1B_2 \\ A_1B_3 \\ A_2B_1 \\ A_2B_2 \\ A_2B_3 \\ A_3B_1 \\ A_3B_2 \\ A_3B_3 \end{bmatrix},$$

que, como se verá en la sección siguiente, es la representación matricial del vector  $|\mathbf{R}\rangle$  en un espacio de nueve dimensiones. Esta representación se obtiene formando los productos directos de las representaciones matriciales de los vectores  $|\mathbf{A}\rangle$  y  $|\mathbf{B}\rangle$ . Expresamos este hecho por

$$|\mathbf{R}\rangle = |\mathbf{A}\rangle \otimes |\mathbf{B}\rangle = |\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\rangle. \tag{10-72}$$

Finalmente, observaremos que utilizando vectores base cartesianos, los elementos de la representación matricial del producto vectorial de dos vectores **A** y **B** forman los elementos de la representación matricial antisimétrica de orden  $3 \times 3$  del operador

$$|\mathbf{A}\rangle \langle \mathbf{B}| - |\mathbf{B}\rangle \langle \mathbf{A}|,$$

es decir, la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & A_1B_2 - A_2B_1 & A_1B_3 - A_3B_1 \\ A_2B_1 - A_1B_2 & 0 & A_2B_3 - A_3B_2 \\ A_3B_1 - A_1B_3 & A_3B_2 - A_2B_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

El vector  $\mathbf{C}$ , cuyas componentes son

$$\begin{aligned} C_1 &= A_2B_3 - A_3B_2, \\ C_2 &= A_3B_1 - A_1B_3, \\ C_3 &= A_1B_2 - A_2B_1, \end{aligned}$$

es claro que tendrá las características rotacionales de un vector. Sin embargo, ante una inversión del sistema de coordenadas en la que los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  cambien de signo al igual que el vector de posición,  $\mathbf{r}$ , el vector  $\mathbf{C}$  no cambiará de signo. Por consiguiente, este vector,  $\mathbf{C}$ , no se comporta como uno ordinario en una inversión del sistema de coordenadas. Tal tipo de vectores reciben el nombre de *seudovectores* o *vectores axiales*, mientras que los vectores que sí cambian de signo ante una inversión del sistema de coordenadas, se llaman *vectores polares*.

Igualmente, el producto escalar de un vector axial por otro polar forma lo que se denomina un *seudoescalar*, que es un escalar que cambia de signo ante una inversión.

#### 10-4 Espacios vectoriales lineales

El concepto de espacio vectorial lineal  $n$ -dimensional, es una generalización de los más familiares espacios vectoriales lineales bidimensional y tridimensional, en los que, en el espacio considerado, definimos la representación matricial de un vector por la disposición matricial de los productos escalares de dicho vector por los vectores base o por sus recíprocos. Generalizaremos ahora esta idea considerando una matriz fila o columna de dos o tres elementos como la representación matricial de un vector bi o tridimensional. Esto nos sugiere una mayor generalización en la que una matriz fila o columna  $n$ -dimensional se considere como la representación matricial de un vector  $n$ -dimensional.

En algunas ocasiones, los vectores base de tal espacio  $n$ -dimensional serán conocidos. Por ejemplo, esto sucedía en el espacio hexadimensional que construimos para representar el movimiento de un sistema de dos partículas (sección 8-7). Este espacio hexadimensional era la *suma directa* de los dos espacios vectoriales tridimensionales, usados, uno para des-

cribir el movimiento de la partícula  $a$  y otro el de la partícula  $b$ , expresada por

$$|\mathbf{A}\rangle = |\mathbf{A}_a \oplus \mathbf{A}_b\rangle, \quad (10-73)$$

donde  $\mathbf{A}_a$  es un vector tridimensional relacionado con la partícula  $a$  y  $\mathbf{A}_b$  otro semejante asociado a la  $b$ .

Los vectores base de este sistema hexadimensional se definieron como sigue:

$$|b_i\rangle = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right\rangle = \left| \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial q_i} \oplus \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial q_i} \right\rangle. \quad (10-74)$$

Sus vectores recíprocos, empleados para transformaciones de coordenadas independientes del tiempo, se indicaron que eran

$$|b_i\rangle = |\nabla_a q_i \oplus \nabla_b q_i\rangle, \quad (10-75)$$

donde

$$\nabla_a = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_a} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y_a} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z_a}$$

y

$$\nabla_b = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_b} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y_b} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z_b}.$$

En otras ocasiones, tendremos simplemente una matriz o disposición de números que satisfacen las reglas necesarias para la adición y la multiplicación con los elementos de otras matrices de la misma dimensión, y cuyas combinaciones dan nuevas matrices o escalares significantes sin que exista ningún vector base. Esta inexistencia de vectores base es completamente correcta mientras que se puedan sumar significativamente matrices  $n$ -dimensionales semejantes y siempre que se conozca y se cumpla la regla para la multiplicación de sus elementos para formar escalares significantes. Dicha multiplicación significativa requiere la introducción de un operador métrico (tensor) del espacio.

Por ejemplo, consideremos anticipadamente la descripción relativista de una partícula que se expone en el Capítulo 13. Se verá que la descripción completa del movimiento de la partícula requerirá no sólo la determinación o especificación de sus componentes cartesianas, sino también el instante en que la partícula fue observada en el punto  $(x, y, z)$ . Se verá además que las cuatro cantidades escalares  $x, y, z$  y  $ct$ , en que  $c$  es la velocidad de la luz, satisfacen las reglas de la combinación de los elementos de una matriz. Por consiguiente, podemos disponerlas en una matriz tetradimensional

$$(\mathbf{r}) = [x, y, z, ct],$$

que será la representación matricial del vector de posición,  $(\mathbf{r})$ , en un espacio de cuatro dimensiones.

Un producto escalar significativo en este espacio tetradimensional, es el escalar

$$\Delta s^2 = -\Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 + c^2 \Delta t^2,$$

el cual se puede considerar como el cuadrado de la magnitud del vector  $(\Delta \mathbf{s})$ . Si se toma como representación matricial del operador métrico  $\mathbf{g}$ , la matriz

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^{-1} \leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

se halla entonces

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= (\Delta \mathbf{s} | \mathbf{g}^{-1} | \Delta \mathbf{s}) \\ &= [\Delta x, \Delta y, \Delta z, c \Delta t] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ c \Delta t \end{bmatrix} \\ &= -\Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 + c^2 \Delta t^2. \end{aligned}$$

En la descripción relativista del movimiento de una partícula es posible, además, construir un espacio vectorial tetradimensional diferente, en que el métrico sea el operador unidad cuya representación matricial es la matriz unidad. En este espacio, la cuarta componente del vector de posición, u otro vector cualquiera, es imaginaria,

$$(\mathbf{r}) \leftrightarrow [x, y, z, ict],$$

y el escalar  $\Delta s^2$  está dado por

$$\begin{aligned} -\Delta s^2 &= (\Delta \mathbf{r} | \Delta \mathbf{r}) \\ &= [\Delta x, \Delta y, \Delta z, ic \Delta t] \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ ic \Delta t \end{bmatrix} \\ &= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2. \end{aligned}$$

Utilizaremos la última representación, en la que el métrico queda definido por el vector unidad. En mecánica cuántica, donde puede haber confusión entre la  $i$  relativista que aparece en la cuarta componente de cualquier vector tetradimensional y la llamada  $i$  de la mecánica cuántica, la primera representación es la más conveniente notacionalmente. El hecho de que el producto escalar de dos vectores en este espacio se pueda indicar por  $(\mathbf{A} | \mathbf{B})$ , significa que estamos tratando con un conjunto de vectores base ortonormales (o sea, ortogonales de valor unidad) que son sus propios vectores recíprocos. Esto hace que no haya distinción entre el vector  $(\mathbf{A})$  y el vector  $(\mathbf{A}^*)$ , y

$$(\mathbf{A}^* | \mathbf{B}) = (\mathbf{A} | \mathbf{B}).$$

En adelante nos limitaremos a la descripción o determinación de los vectores en función de conjuntos ortonormales de vectores base,  $\mathbf{e}_i$ , o sea, en función de sistemas de coordenadas cuyo operador métrico sea el unidad.

Matemáticamente, se define un espacio vectorial como un conjunto de vectores, en nuestro caso un conjunto de matrices, cuya adición y multiplicación por un escalar sigue las reglas siguientes:

- a) Dos vectores se pueden sumar y su suma dará un vector único.
- b) La adición de vectores es asociativa y conmutativa.
- c) Existe un vector nulo  $\mathbf{0}$  tal que

$$(\mathbf{A}) + (\mathbf{0}) = (\mathbf{A}),$$

el cual define el negativo de un vector  $(\mathbf{A})$  por el vector cuya suma con  $(\mathbf{A})$  dé el vector nulo:

$$(\mathbf{A}) + (-\mathbf{A}) = (\mathbf{0}) \quad \text{o} \quad |-\mathbf{A}) = -(\mathbf{A}).$$

d) La multiplicación de un vector,  $(\mathbf{A})$ , por un escalar,  $c$ , define un vector único,  $c(\mathbf{A})$ , y tal multiplicación tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} c_1 c_2 (\mathbf{A}) &= c_1 c_2 (\mathbf{A}), \\ (c_1 + c_2) (\mathbf{A}) &= c_1 (\mathbf{A}) + c_2 (\mathbf{A}), \\ c[(\mathbf{A}) + (\mathbf{B})] &= c(\mathbf{A}) + c(\mathbf{B}), \\ 1(\mathbf{A}) &= (\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Como las matrices satisfacen estas reglas, se podrá considerar que un conjunto de matrices semejantes de orden  $m \times n$  es el de las representaciones matriciales de los vectores de un espacio vectorial cuya dimensionalidad sea igual al número de elementos de cada matriz, o sea  $m \cdot n$ . Sin embargo se prefiere representar los vectores por matrices fila o matrices columna.

10-5 Vectores base de un espacio vectorial  $n$ -dimensional

Muy análogamente a nuestra exposición de la representación de un vector en un espacio tridimensional, encontraremos que cualquier vector  $n$ -dimensional (matriz columna  $n$ -dimensional) se puede expresar por la suma lineal de  $n$  vectores base, linealmente independientes. Un conjunto de  $n$  vectores,  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ , se dice que es linealmente independiente sólo si el conjunto de números

$$c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0,$$

satisface la condición

$$\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0}$$

Si puede hallarse un conjunto de las  $c$  que contenga, al menos, un elemento no nulo para el cual la suma lineal de los vectores base se pueda hacer igual a cero, entonces el conjunto de vectores  $\mathbf{b}_i$  es linealmente dependiente. Esto significa que uno o más de dichos vectores se puede expresar por una suma lineal de los vectores restantes.

La condición necesaria y suficiente para que  $n$  vectores,  $n$ -dimensionales,  $\mathbf{b}_i$  sean linealmente independientes, es que no se anule el determinante formado por los elementos de su representación matricial, esto es

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \neq 0. \quad (10-76)$$

Desde el punto de vista notacional, es más conveniente escoger como vectores base un conjunto de  $n$  vectores unidad ortogonales linealmente independientes,  $\mathbf{e}_i$ , que satisfagan las ecuaciones

$$(\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}. \quad (10-77)$$

Con esta elección, no hay distinción entre los  $\mathbf{e}_i$  y sus vectores recíprocos,  $\mathbf{e}_i$ ,

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i. \quad (10-78)$$

Por tanto, tampoco la habrá entre  $|\mathbf{A}\rangle$  y  $|\mathbf{A}^*\rangle$ .

Es claro que los vectores base  $\mathbf{e}_i$  expresados en función de sus productos escalares por sí mismos tendrían la representación matricial

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1 | &\leftrightarrow [1, 0, 0, 0, \dots], \\ (\mathbf{e}_2 | &\leftrightarrow [0, 1, 0, 0, \dots], \\ (\mathbf{e}_3 | &\leftrightarrow [0, 0, 1, 0, \dots], \\ &\text{etc.} \end{aligned} \quad (10-79)$$

Ahora bien, un vector  $n$ -dimensional,  $\mathbf{A}$ , queda determinado si se conoce su producto escalar por los  $n$  vectores base. Se desprende lo anterior de que si éstos son linealmente independientes podemos establecer

$$|\mathbf{A}\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i |\mathbf{e}_i\rangle, \quad (10-80)$$

y resolver las  $n$  ecuaciones simultáneas para hallar las  $\alpha_i$ . Estas están dadas por

$$\alpha_i = (\mathbf{e}_i | \mathbf{A}\rangle. \quad (10-81)$$

Este resultado se evidencia, considerando que

$$|\mathbf{A}\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

y, en consecuencia, por las reglas de la multiplicación de una matriz por un escalar y de la suma de matrices, que

$$|\mathbf{A}\rangle \leftrightarrow \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots$$

## 10-6 Transformaciones lineales

Básicamente, un conjunto de  $n$  ecuaciones lineales de la forma

$$y_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} x_j, \quad (10-82)$$

que relacione las  $n$  variables  $y_i$  con las  $n$  variables  $x_j$ , y en que las  $t_{ij}$  sean constantes, define una transformación lineal. De especial importancia para nosotros son los casos en que los  $n$  valores de las  $y_i$  y los  $n$  de las  $x_j$  se puedan considerar, respectivamente, que son los elementos de las representaciones matriciales de dos vectores  $|\mathbf{y}\rangle$  y  $|\mathbf{x}\rangle$  en un espacio vectorial  $n$ -dimensional. La ecuación (10-82) nos dará, entonces, los elementos de la representación matricial de la ecuación vectorial

$$|\mathbf{y}\rangle = \mathbf{T}|\mathbf{x}\rangle, \quad (10-83)$$

donde las  $t_{ij}$  se consideran que son los elementos de la representación matricial del operador  $\mathbf{T}$ .

Este operador es un ejemplo del *operador lineal*  $\mathbf{L}$  que definiremos como el operador que satisface la ecuación

$$\mathbf{L}[c_1|\mathbf{A}\rangle + c_2|\mathbf{B}\rangle] = c_1\mathbf{L}|\mathbf{A}\rangle + c_2\mathbf{L}|\mathbf{B}\rangle. \quad (10-84)$$

Ahora podemos expresar el operador  $\mathbf{T}$  por la suma lineal de los operadores

$$|\mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{e}_j|,$$

que son los productos directos de los vectores base  $|\mathbf{e}_i\rangle$  por los vectores base  $\langle\mathbf{e}_j|$ . Estos  $n^2$  operadores, cada uno de los cuales tiene un solo elemento no nulo, son linealmente independientes y cualquier otro operador lineal del espacio vectorial  $n$ -dimensional se puede desarrollar en función de ellos, ya que el otro operador tendrá  $n^2$  elementos en su representación matricial de  $n \times n$ , la que se podrá expresar siempre por la suma lineal de  $n^2$  matrices de orden  $n \times n$ , linealmente independientes.

El conjunto anterior es el más simple de  $n^2$  matrices de  $n \times n$  linealmente independientes, y nos da un conjunto de matrices cada una de las cuales sólo tiene un elemento no nulo, y éste es igual a la unidad. Sin embargo, este conjunto no siempre será el más útil. Por ejemplo, consideremos un espacio vectorial bidimensional en el que cualquier operador lineal tenga cuatro elementos en su representación matricial. Este operador se podrá expresar por la suma lineal de los cuatro operadores linealmente independientes

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}_1\rangle\langle\mathbf{e}_1| &\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & |\mathbf{e}_1\rangle\langle\mathbf{e}_2| &\leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ |\mathbf{e}_2\rangle\langle\mathbf{e}_1| &\leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & |\mathbf{e}_2\rangle\langle\mathbf{e}_2| &\leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

En la mecánica cuántica, se ve que los cuatro operadores linealmente independientes

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \sigma_2 &\leftrightarrow i \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \sigma_1 &\leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & \sigma_3 &\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

son más útiles para representar el efecto de un operador lineal sobre un vector de un espacio bidimensional, como, por ejemplo, el espacio del espín del electrón. Los operadores  $\sigma_i$  se conocen como *operadores de espín de Pauli*.

Observaremos que el espacio vectorial bidimensional del espín no es el mismo que el espacio vectorial bidimensional, corriente de los vectores planos, con el que el lector está familiarizado. En el Capítulo 12, mostraremos cómo el estado de polarización de una onda plana armónica se puede indicar por un vector de dicho espacio vectorial bidimensional. El efecto de un filtro polarizado o el efecto de un medio transmisor sobre el estado de polarización de una onda plana armónica, que se propaga por él, se podrá, por consiguiente, representar por un operador que actúe sobre el vector de polarización bidimensional incidente.

El operador  $\mathbf{T}$  se expresará en función de los operadores  $|\mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{e}_j|$  por

$$\mathbf{T} = \sum_{i,j=1}^n t_{ij} |\mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{e}_j|, \quad (10-85)$$

que da realmente

$$\begin{aligned} \mathbf{T}|\mathbf{x}\rangle &= \mathbf{T} \sum_{k=1}^n x_k |\mathbf{e}_k\rangle = \sum_{i,j,k} x_k t_{ij} |\mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{e}_j|\mathbf{e}_k\rangle \\ &= \sum_{i,k} x_k t_{ik} |\mathbf{e}_i\rangle = \sum_i y_i |\mathbf{e}_i\rangle = |\mathbf{y}\rangle. \end{aligned}$$

Una representación muy útil del operador unidad es

$$\mathbf{1} = \sum_{i=1}^n |\mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{e}_i|, \quad (10-86)$$

la cual se desprende de que era  $\delta_{ij}$  son los elementos de la matriz unidad que es la representación matricial de  $\mathbf{1}$ .

Es interesante observar que los elementos  $t_{ij}$  de la representación matricial del operador  $\mathbf{T}$ , se pueden expresar simbólicamente por

$$\langle\mathbf{e}_i|\mathbf{T}|\mathbf{e}_j\rangle = \sum_{kl} \langle\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_k\rangle \langle\mathbf{e}_l|\mathbf{e}_j\rangle t_{kl} = t_{ij}. \quad (10-87)$$

A veces habrá interés en relacionar las componentes del vector

$$|\mathbf{z}\rangle = \mathbf{S}|\mathbf{y}\rangle$$

con las del vector  $|\mathbf{x}\rangle$ , siendo

$$|\mathbf{y}\rangle = \mathbf{T}|\mathbf{x}\rangle.$$

Dicha relación se obtiene fácilmente introduciendo la última ecuación en la anterior lo que da

$$|\mathbf{z}\rangle = \mathbf{S}\mathbf{T}|\mathbf{x}\rangle. \tag{10-88}$$

La forma de las componentes de la ecuación (10-88) expresa el hecho de que

$$z_i = \sum_{jk} S_{ij}T_{jk}x_k = \sum_k \left( \sum_j S_{ij}T_{jk} \right) x_k, \tag{10-89}$$

que, a su vez, revela que la representación matricial del operador  $\mathbf{S}\mathbf{T}$  es el producto matricial de las matrices  $(\mathbf{S})$  y  $(\mathbf{T})$

$$(\mathbf{S}\mathbf{T})_{ik} = \sum_j S_{ij}T_{jk}. \tag{10-90}$$

Como ejemplo especial, consideremos el caso en que

$$|\mathbf{z}\rangle = \mathbf{S}|\mathbf{y}\rangle \tag{10-91}$$

sea la ecuación inversa de

$$|\mathbf{y}\rangle = \mathbf{T}|\mathbf{x}\rangle; \tag{10-92}$$

esto es, cuando

$$|\mathbf{z}\rangle = |\mathbf{x}\rangle.$$

La ecuación (10-91) representa el sistema de ecuaciones simultáneas de la (10-92) en que se han determinado las  $x_i$ . Es bien sabido que dichas soluciones sólo existen si el determinante de  $\mathbf{T}$  (o sea, el valor del determinante de su representación matricial) no se anula; en otras palabras, si la representación matricial de  $\mathbf{T}$  es no singular. Esto significa que habrá una matriz que representa el operador inverso de  $\mathbf{T}$ .

Como

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{1},$$

vemos que

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1},$$

de modo que

$$\mathbf{S}|\mathbf{y}\rangle = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}|\mathbf{x}\rangle.$$

Podemos hallar los elementos de la matriz del operador inverso por medio de la resolución por determinantes de las ecuaciones

$$y_i = \sum_j t_{ij}x_j.$$

Esto es

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & t_{1,i+1} & t_{1,i+2} & \cdots & t_{1n} & t_{11} & \cdots & t_{1,i-1} \\ y_2 & t_{2,i+1} & t_{2,i+2} & \cdots & t_{2n} & t_{21} & \cdots & t_{2,i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & t_{n,i+1} & t_{n,i+2} & \cdots & t_{nn} & t_{n1} & \cdots & t_{n,i-1} \end{vmatrix}}{\det(t_{kl})} \tag{10-93}$$

$$= \sum_j y_j \frac{\text{cofactor } t_{ji}}{\det(t_{kl})}$$

$$= \sum_j t_{ij}^{-1} y_j.$$

El determinante, cofactor  $t_{ji}$ , se forma a partir del  $\det(t_{kl})$ , y es igual al  $\det(t_{kl})$  con su fila  $j$  y su columna  $i$  suprimidas y el resultado multiplicado por  $(-1)^{i+j}$ . Podemos comprobar que  $t_{ij}^{-1}$ , definido de tal manera, nos da la matriz inversa de la representación matricial de  $\mathbf{T}$ . Hallamos que

$$(\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1})_{ij} = \sum_k t_{ik}t_{kj}^{-1} = \sum_k \frac{t_{ik}(\text{cofactor } t_{jk})}{\det(t_{rs})}$$

$$= \frac{\det(t_{rs})}{\det(t_{rs})} \delta_{ij} = \delta_{ij}. \tag{10-94}$$

Que

$$\sum_k t_{ik} \text{cofactor } t_{jk} = \begin{cases} \det(t_{ij}) & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{10-95}$$

se puede ver de la forma siguiente. Por definición

$$\det(t_{ij}) = \sum_k t_{jk} \text{cofactor } t_{jk}, \quad j = \text{constante}.$$

En el caso considerado, hemos usado los elementos de la fila  $j$  para desarrollar el determinante. Si cambiamos la columna  $j$  del determinante por la columna  $i$ , obtenemos un nuevo determinante que tiene dos columnas iguales y que, por lo tanto, se anula. Este hecho se expresa por las  $\delta_{ij}$  de la ecuación (10-94).

Como ejemplo, determinaremos la inversa de la matriz no singular

$$(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

el valor de cuyo determinante es

$$\det (t_{ij}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 31.$$

Vemos que

$$t_{11}^{-1} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}{31} = \frac{10}{31}, \quad t_{21}^{-1} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{31} = -\frac{5}{31}, \quad \text{etc.,}$$

que nos da la siguiente para la matriz inversa

$$(\mathbf{T}^{-1}) = \frac{1}{31} \begin{bmatrix} 10 & 17 & -6 \\ -5 & 7 & 3 \\ 2 & -9 & 5 \end{bmatrix}.$$

Es fácil verificar que, en efecto, ésta es la inversa de la matriz ( $\mathbf{T}$ ) anterior.

### 10-7 Transformación de coordenadas \*

En esta sección, consideraremos la relación entre las descripciones de un vector o un operador lineal con respecto a conjuntos diferentes de vectores base ortonormales. Para ello, supondremos dos conjuntos de vectores base ortonormales,  $\mathbf{e}_i$  y  $\mathbf{e}'_i$ , relacionados por

$$|\mathbf{e}'_i\rangle = \sum_j |\mathbf{e}_j\rangle (\mathbf{e}_j|\mathbf{e}'_i\rangle) \quad (10-96)$$

o por la ecuación

$$|\mathbf{e}_i\rangle = \sum_j |\mathbf{e}'_j\rangle (\mathbf{e}'_j|\mathbf{e}_i\rangle). \quad (10-97)$$

Observemos que en forma de operadores, estas ecuaciones son

$$|\mathbf{e}'_i\rangle = \mathbf{1}|\mathbf{e}'_i\rangle, \quad (10-98)$$

y

$$|\mathbf{e}_i\rangle = \mathbf{1}'|\mathbf{e}_i\rangle \quad (10-99)$$

donde  $\mathbf{1}$  es el operador unidad del sistema de coordenadas sin comillas o primas y  $\mathbf{1}'$  el mismo operador expresado en función de los vectores con

\* Véase la sección 3-5.

comillas o primas. En consecuencia parece que la aplicación de un operador unidad sobre un vector da el desarrollo del vector en función de los vectores base unidad que aparecen en el desarrollo de dicho operador. Se halla que así sucede. Por ejemplo, tenemos

$$|\mathbf{A}\rangle = \mathbf{1}|\mathbf{A}\rangle = \sum_i |\mathbf{e}_i\rangle (\mathbf{e}_i|\mathbf{A}\rangle) = \sum_i \alpha_i |\mathbf{e}_i\rangle$$

y

$$|\mathbf{A}\rangle = \mathbf{T}'|\mathbf{A}\rangle = \sum_i |\mathbf{e}'_i\rangle (\mathbf{e}'_i|\mathbf{A}\rangle) = \sum_i \alpha'_i |\mathbf{e}'_i\rangle.$$

Hallamos entonces que utilizando

$$|\mathbf{A}\rangle = \sum_j \alpha_j |\mathbf{e}_j\rangle,$$

podemos obtener

$$|\mathbf{A}'\rangle = \mathbf{T}'|\mathbf{A}\rangle = \sum_{ij} |\mathbf{e}'_i\rangle (\mathbf{e}'_i|\mathbf{e}_j\rangle) \alpha_j = \sum_i \left[ \sum_j (\mathbf{e}'_i|\mathbf{e}_j\rangle) \alpha_j \right] |\mathbf{e}'_i\rangle,$$

que nos da la relación

$$\alpha'_i = \sum_j (\mathbf{e}'_i|\mathbf{e}_j\rangle) \alpha_j. \quad (10-100)$$

Similarmente, hallamos

$$\alpha_i = \sum_j (\mathbf{e}_i|\mathbf{e}'_j\rangle) \alpha'_j. \quad (10-101)$$

Llamando  $|\mathbf{A}'\rangle$  al vector  $|\mathbf{A}\rangle$  expresado en función de los vectores base con primas, encontramos que las dos últimas ecuaciones se expresan en notación de operador por

$$|\mathbf{A}'\rangle = \mathbf{S}|\mathbf{A}\rangle \quad \text{y} \quad |\mathbf{A}\rangle = \mathbf{S}^{-1}|\mathbf{A}'\rangle, \quad (10-102)$$

donde  $\mathbf{S}$  es el operador de la transformación cuya representación matricial tiene los elementos

$$S_{ij} = (\mathbf{e}'_i|\mathbf{e}_j\rangle).$$

Su inverso tiene los elementos

$$S_{ji}^{-1} = (\mathbf{e}_j|\mathbf{e}'_i\rangle) = (\mathbf{e}'_i|\mathbf{e}_j\rangle) = S_{ij} = \tilde{S}_{ji}.$$

Esto es

$$\mathbf{S}^{-1} = \tilde{\mathbf{S}}. \quad (10-103)$$

Una transformación cuya matriz satisfaga la condición (10-103) se llama *transformación ortogonal*.



Debemos hacer ahora una aclaración. Comenzamos con un vector dado  $|\mathbf{A}\rangle$  y obtuvimos la relación entre las representaciones matriciales del vector con respecto a dos conjuntos diferentes de vectores base ortonormales y finalmente encontramos las ecuaciones de transformación que relacionan la descripción del vector  $|\mathbf{A}'\rangle$  con la del  $|\mathbf{A}\rangle$ . La razón por la que pudimos hacer esto, es que, ante todo, las ecuaciones importantes son la (10-100) y la (10-101) que relacionan las  $\alpha$  y definen la transformación que estamos considerando. Sucede ahora que obtenemos el mismo conjunto de ecuaciones de transformación para dos operaciones geométricas diferentes. Para entender mejor esto, consideremos un cambio de los vectores base de un espacio vectorial bidimensional (fig. 10-1), tal como el

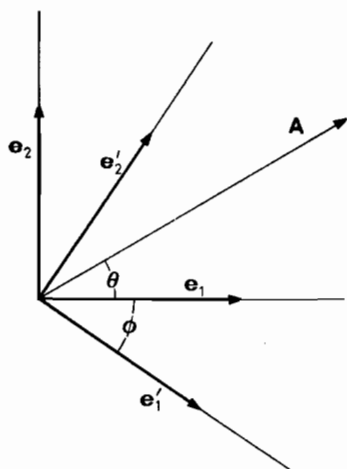


FIG. 10-1

debido a una rotación de un ángulo  $-\phi$  de los ejes. La ecuación (10-100) relacionará entonces las descripciones de un vector  $\mathbf{A}$  con respecto a los dos conjuntos de vectores base. Por otra parte, consideremos un sistema de coordenadas fijo y una rotación de un ángulo  $+\phi$  del vector  $\mathbf{A}$  (fig. 10-2). Como el nuevo vector  $\mathbf{A}'$  forma el mismo ángulo con  $\mathbf{e}_1$  que el  $\mathbf{A}$  formaba con el  $\mathbf{e}'_1$ , se sigue que la descripción de  $\mathbf{A}'$  en el sistema sin primas es la misma que la de  $\mathbf{A}$  en el sistema con primas.

Dadas las ecuaciones de transformación (10-100) y (10-101), es claro que estamos en libertad para darles cualquiera de las dos interpretaciones. Para deducir las ecuaciones de transformación, emplearemos la primera. Al fin sería más simple, notacionalmente, utilizar la segunda interpretación del cambio del vector  $|\mathbf{A}\rangle$  al  $|\mathbf{A}'\rangle$  como se indica por las ecuaciones (10-102). Esta última interpretación es notacionalmente menos confusiva.

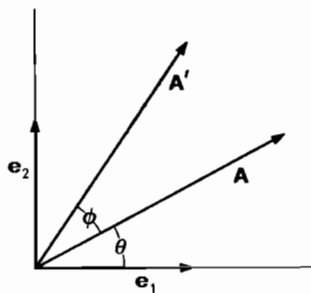


FIG. 10-2

Vemos que el valor del determinante de

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{1}$$

es uno. Por tanto, para una transformación ortogonal en la que

$$\det(\mathbf{S}) = \det(\tilde{\mathbf{S}}) = \det(\mathbf{S}^{-1}),$$

se halla que

$$[\det(\mathbf{S})]^2 = 1 \quad \text{o} \quad \det(\mathbf{S}) = \pm 1.$$

El valor del determinante en una rotación ordinaria del sistema de coordenadas, a la que llamamos *rotación propia*, es  $+1$ . Una transformación ortogonal cuya matriz de transformación tiene por valor del determinante  $-1$ , se puede expresar siempre por

$$\mathbf{S} = -\mathbf{1}\mathbf{T},$$

donde  $\mathbf{T}$  es un operador de rotación propia. El operador  $-\mathbf{1}$ , es un *operador de inversión*. Por consiguiente, una transformación ortogonal cuya matriz de transformación tiene el valor del determinante  $-1$ , comprende una rotación propia y una inversión del sistema de coordenadas. Tal tipo de transformación recibe el nombre de *rotación impropia*.

De una manera semejante, podemos obtener las ecuaciones de transformación para los elementos de la representación matricial de un operador  $\mathbf{K}$ . De nuestro análisis de los operadores en la sección anterior vemos que este operador,  $\mathbf{K}$ , se puede expresar, en función de los vectores base sin primas, por

$$\mathbf{K} = \sum_{ij} k_{ij} |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{e}_j|. \quad (10-104)$$

Y en función de los vectores base con primas, por

$$\mathbf{K}' = \sum_{ij} k'_{ij} |\mathbf{e}'_i\rangle \langle \mathbf{e}'_j|. \quad (10-105)$$

Igual que en el caso del vector  $|\mathbf{A}\rangle$  podemos cambiar los vectores  $|\mathbf{e}_i\rangle$  por los  $|\mathbf{e}'_i\rangle$  multiplicándolos por el operador unidad expresado en función de los vectores base con primas. Se halla así

$$\begin{aligned} \mathbf{K}' &= \mathbf{1}'\mathbf{K}\mathbf{1}' \\ &= \left[ \sum_i |\mathbf{e}'_i\rangle \langle \mathbf{e}'_i| \right] \left[ \sum_{lm} k_{lm} |\mathbf{e}_l\rangle \langle \mathbf{e}_m| \right] \left[ \sum_j |\mathbf{e}'_j\rangle \langle \mathbf{e}'_j| \right] \\ &= \sum_{ij} \left[ \sum_{lm} \langle \mathbf{e}'_i | \mathbf{e}_l \rangle k_{lm} \langle \mathbf{e}_m | \mathbf{e}'_j \rangle \right] |\mathbf{e}'_i\rangle \langle \mathbf{e}'_j|, \end{aligned}$$

que nos da la ecuación de transformación que buscamos para los elementos de la representación matricial de un operador

$$k'_{ij} = \sum_{lm} (\mathbf{e}'_i | \mathbf{e}_l) k_{lm} (\mathbf{e}_m | \mathbf{e}'_j) = (\mathbf{e}'_i | \mathbf{K} | \mathbf{e}'_j). \quad (10-106)$$

Una vez más, consideraremos esta ecuación como una relación entre los elementos de la representación matricial de la ecuación del operador

$$\mathbf{K}' = \mathbf{S} \mathbf{K} \mathbf{S}^{-1}. \quad (10-107)$$

Como ejemplo, tomemos la transformación de un operador de momento de inercia del sistema de coordenadas sin primas cuya representación matricial es

$$(\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

a un sistema de coordenadas con primas cuyos cosenos directores con el sistema anterior  $S_{ij} = (\mathbf{e}'_i | \mathbf{e}_j)$  son los elementos de la matriz de transformación ortogonal

$$(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

La representación del operador de momento de inercia en el sistema con primas está dada por

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}') &= (\mathbf{S})(\mathbf{I})(\mathbf{S}) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -2 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En la sección 10-9 mostraremos que siempre existe un sistema de coordenadas en el cual la matriz de momento de inercia es diagonal.

Otro ejemplo interesante es la transformación del vector de cantidad de movimiento angular. Este vector, que es el producto vectorial de dos vectores polares, como vimos anteriormente, se transforma bajo una rotación como un vector axial cuyos componentes son los elementos de la representación matricial de un operador antisimétrico. Concretamente, las componentes del vector de cantidad de movimiento angular son los elementos no nulos de la representación del operador

$$\mathbf{L} = |\mathbf{r}| (\mathbf{p} - |\mathbf{p}|) (\mathbf{r}).$$

Esta representación matricial es

$$(\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 0 & L_x & -L_y \\ -L_x & 0 & L_z \\ L_y & -L_z & 0 \end{bmatrix}.$$

Investiguemos las propiedades de la transformación de este vector y nos satisfará que ante una rotación,  $L_x$ ,  $L_y$  y  $L_z$ , se transforman como las componentes de un vector polar. Dejamos al lector, como ejercicio, verificar que ante una rotación impropia no se transforman como las componentes de un vector de esta clase.

La matriz de transformación para una rotación de un sistema de coordenadas de un ángulo  $-\phi$  (fig. 10-1) alrededor del eje  $z$  es

$$(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi & 0 \\ \text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De donde se halla

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}') &= (\mathbf{S})(\mathbf{L})(\mathbf{S}) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi & 0 \\ \text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & L_x & -L_y \\ -L_x & 0 & L_z \\ L_y & -L_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi & 0 \\ \text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -L_x \text{sen } \phi & L_x \cos \phi & -L_y \\ -L_x \cos \phi & -L_x \text{sen } \phi & L_z \\ L_y \cos \phi + L_z \text{sen } \phi & L_y \text{sen } \phi - L_z \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & L_z & -(L_y \cos \phi + L_x \sin \phi) \\ -L'_z & 0 & -(L_y \sin \phi - L_x \cos \phi) \\ L'_y & -L'_x & 0 \end{bmatrix},$$

lo que nos da las ecuaciones de transformación

$$L'_x = L_x \cos \phi - L_y \sin \phi,$$

$$L'_y = L_x \sin \phi + L_y \cos \phi,$$

$$L'_z = L_z.$$

Siendo éstas idénticas a las ecuaciones de transformación de las componentes de un vector, queda demostrado que los elementos  $L_{23}$ ,  $L_{31}$  y  $L_{12}$  de la representación matricial del operador  $\mathbf{L} = |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{p}| - |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{r}|$  se transforma, bajo una rotación propia, como las componentes de un vector polar.

El vector de rotación es otro ejemplo de un vector axial. Como se vio en la sección 3-5 sus componentes forman, también, los elementos no nulos de una matriz antisimétrica que representa al operador

$$\mathbf{\Omega} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Se infiere de la ecuación (3-5) que  $\boldsymbol{\omega}$  es realmente un vector axial el cual da para la derivada con respecto al tiempo de un vector de magnitud constante

$$\dot{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}.$$

Es claro que  $\mathbf{A}$  y  $\dot{\mathbf{A}}$  son ambos vectores polares o ambos axiales. De consiguiente, para que esta ecuación se transforme correctamente por una inversión,  $\boldsymbol{\omega}$  no deberá cambiar de signo, esto es,  $\boldsymbol{\omega}$  tiene que ser un vector axial.

El vector de inducción magnética es un tercer ejemplo de un pseudo-vector. Esto puede verse con la ecuación del movimiento de una partícula cargada en un campo magnético,

$$\dot{\mathbf{p}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Se evidencia que, como  $\dot{\mathbf{p}}$  y  $\mathbf{v}$  cambian de signo en una inversión del sistema de coordenadas,  $\mathbf{B}$  no deberá cambiar el suyo. Observemos que la última ecuación se expresa en notación matricial por

$$(\mathbf{F}) = q(\mathbf{B})(\mathbf{v}),$$

donde  $(\mathbf{B})$  es la matriz cuadrada antisimétrica

$$\begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}.$$

En el Capítulo 13 veremos que las componentes de un campo electromagnético forman los elementos de una matriz antisimétrica de  $4 \times 4$ .

### 10-8 Espacio vectorial complejo

Si los elementos de las matrices columna  $n$ -dimensionales son números complejos, tendremos un espacio vectorial complejo. La suma de dos vectores en este espacio y la multiplicación de vectores por escalares siguen las reglas que definen un espacio vectorial; estas reglas se vieron en la sección 10-4. Sin embargo, la definición de un producto escalar de dos vectores en un espacio complejo no es ya única. Por ejemplo; podemos definir su producto escalar, como lo hicimos con dos vectores reales, por

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = (\mathbf{B}|\mathbf{A}). \quad (10-108)$$

Por otra parte, también podemos definir un producto escalar de dos vectores complejos por

$$(\mathbf{A}^*|\mathbf{B}) = [\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = (\mathbf{B}^*|\mathbf{A})^*, \quad (10-109)$$

donde las estrellas indican los complejos conjugados del vector o del escalar.

Ambas definiciones tienen aplicaciones prácticas. Por ejemplo, como indicamos anteriormente, en la teoría especial de la relatividad emplearemos vectores tetradimensionales complejos cuya cuarta componente es imaginaria. El vector de posición en el espacio tetradimensional relativista es

$$|\mathbf{r}\rangle \leftrightarrow [x, y, z, ict].$$

El producto escalar de dos vectores en este espacio vectorial complejo relativista se definirá por la primera definición  $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ , puesto que ésta dará para el vector  $|\Delta\mathbf{r}\rangle$  la magnitud requerida

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 = -\Delta s^2.$$

Por otra parte, en la mayoría de las aplicaciones se requerirá que las magnitudes de los vectores no nulos se definan positivas. Esta propiedad se asegura si el producto escalar de dos vectores se define por  $(\mathbf{A}^*|\mathbf{B})$ , lo que nos da

$$A^2 = (\mathbf{A}^*|\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2.$$

Como ilustración, diremos que la representación matricial compleja

$$|\mathbf{A}\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y) \\ A_z \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - iA_y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}A_+ \\ A_z \\ \frac{1}{\sqrt{2}}A_- \end{bmatrix}$$

de un vector  $|\mathbf{A}\rangle$  es extremadamente importante en mecánica cuántica. Observaremos además que la coordenada compleja  $x_+ = x + iy$  se usó en la resolución del problema del oscilador isótropo y en la de un oscilador armónico cargado sometido a un campo magnético. La magnitud del vector está dada por

$$A^2 = (\mathbf{A}^*|\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}A_-, A_z, \frac{1}{\sqrt{2}}A_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}A_+ \\ A_z \\ \frac{1}{\sqrt{2}}A_- \end{bmatrix} \\ = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2.$$

Siempre que admitamos esta última definición del producto escalar en un espacio vectorial complejo, hemos de tener presente que dicha definición se está utilizando por la sustitución notacional por los símbolos  $|\mathbf{A}\rangle$  y  $\langle\mathbf{A}|$  de los  $|\mathbf{A}\rangle$  y  $(\mathbf{A}^*|$ . Esto es

$$|\mathbf{A}\rangle = |\mathbf{A}\rangle \\ \langle\mathbf{A}| = (\mathbf{A}^*|. \quad (10-110)$$

y

En la nueva notación el producto escalar  $(\mathbf{A}^*|\mathbf{B})$  se indica por

$$\langle\mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle.$$

Como las representaciones matriciales de  $\langle\mathbf{A}|$  y  $|\mathbf{A}\rangle$  satisfacen la ecuación

$$[\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*] = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}^*$$

podemos relacionar semejantemente los vectores. O sea, establecer

$$\langle\mathbf{A}| = |\tilde{\mathbf{A}}\rangle^* = |\mathbf{A}\rangle^\dagger. \quad (10-111)$$

El complejo conjugado transpuesto de un vector  $|\mathbf{A}\rangle$  o de un operador  $\mathbf{L}$  recibe el nombre de *hermitiano adjunto* del vector o del operador. El hermitiano adjunto de un operador se indica por un superíndice en forma de puñal,

$$\mathbf{L}^\dagger = \tilde{\mathbf{L}}^*. \quad (10-112)$$

Es claro que los operadores lineales que actúan sobre los vectores de un espacio vectorial complejo son también complejos. Es decir, que sus representaciones matriciales tienen elementos complejos.

Las matrices complejas cuyo hermitiano adjunto es igual a la matriz, como se expresa por

$$\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{S}, \quad (10-113)$$

se llaman *matrices hermitianas*. Se evidenciará que todos los operadores reales son *operadores hermitianos*. Estos operadores juegan un papel muy importante en la mecánica cuántica. Por el contrario, los operadores que satisfagan la ecuación

$$\mathbf{S}^\dagger = -\mathbf{S} \quad (10-114)$$

se denominan *antihermitianos*. Se desprende que todos los operadores reales antisimétricos son antihermitianos.

Igual que un operador real se podía descomponer en una parte simétrica y otra antisimétrica, un operador complejo se puede descomponer en una parte hermitiana y otra antihermitiana, por lo que un operador se podrá expresar por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{S} + \mathbf{S}^\dagger) + \frac{1}{2}(\mathbf{S} - \mathbf{S}^\dagger). \quad (10-115)$$

El lector no encontrará dificultad para verificar que la primera parte,  $\frac{1}{2}(\mathbf{S} + \mathbf{S}^\dagger)$ , es hermitiana y que la segunda,  $\frac{1}{2}(\mathbf{S} - \mathbf{S}^\dagger)$ , es antihermitiana.

También se ve fácilmente que si descomponemos un operador hermitiano en una parte real,  $\mathbf{R}$ , y otra imaginaria,  $\mathbf{I}$ ,

$$\mathbf{S} = \mathbf{R} + \mathbf{I},$$

la parte real es simétrica

$$\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{R}},$$

y la parte imaginaria antisimétrica

$$\mathbf{I} = -\tilde{\mathbf{I}}.$$

La deducción de las ecuaciones restantes de esta sección se hace siguiendo exactamente las deducciones de las ecuaciones análogas para vectores y operadores reales en un espacio vectorial real. Un vector  $|\mathbf{A}\rangle$  se puede expresar en función de los vectores base unidad ortogonales,  $|\mathbf{e}_i\rangle$ , por

$$|\mathbf{A}\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i |\mathbf{e}_i\rangle, \quad (10-116)$$

donde

$$\alpha_i = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{A} \rangle, \quad (10-117)$$

y un operador  $\mathbf{T}$  se puede expresar por

$$\mathbf{T} = \sum_{ij} T_{ij} |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{e}_j|, \quad (10-118)$$

donde los elementos,  $T_{ij}$ , de la matriz se representan por

$$T_{ij} = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{T} | \mathbf{e}_j \rangle. \quad (10-119)$$

El operador unidad  $\mathbf{1}$  está dado por

$$\mathbf{1} = \sum_i |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{e}_i|. \quad (10-120)$$

El cambio de la descripción de un vector  $|\mathbf{A}\rangle$  de los vectores base unidad ortogonales,  $|\mathbf{e}_i\rangle$ , a los vectores base ortonormales,  $|\mathbf{e}'_i\rangle$  por una transformación de coordenadas se puede expresar en función de la matriz de transformación,  $(\mathbf{S})$ , cuyos elementos son

$$S_{ij} = \langle \mathbf{e}'_i | \mathbf{e}_j \rangle. \quad (10-121)$$

En función del operador  $\mathbf{S}$  se halla que la transformación, interpretada como una transformación del vector  $|\mathbf{A}\rangle$ , se expresa por

$$|\mathbf{A}'\rangle = \mathbf{S}|\mathbf{A}\rangle. \quad (10-122)$$

Similarmente, para un operador  $\mathbf{L}$  obtenemos

$$\mathbf{L}' = \mathbf{S}\mathbf{L}\mathbf{S}^{-1}, \quad (10-123)$$

donde  $\mathbf{S}^{-1}$  es el operador de transformación inversa. Los elementos de la matriz de este operador,  $\mathbf{S}^{-1}$ , son

$$S_{ji}^{-1} = \langle \mathbf{e}_j | \mathbf{e}'_i \rangle = \tilde{S}_{ij}^*. \quad (10-124)$$

Una transformación en la que el inverso del operador de la transformación sea su adjunto hermitiano,

$$\mathbf{S}^{-1} = \tilde{\mathbf{S}}^* = \mathbf{S}^\dagger, \quad (10-125)$$

se llama *transformación unitaria* y un operador cuyo inverso sea igual a su adjunto hermitiano,

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger, \quad (10-126)$$

se denomina *operador unitario*. En una transformación unitaria, el producto escalar  $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$  de dos vectores permanece invariante.

Como ilustración, consideremos la representación compleja de un vector tridimensional en que los vectores base son

$$\mathbf{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y),$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y).$$

y

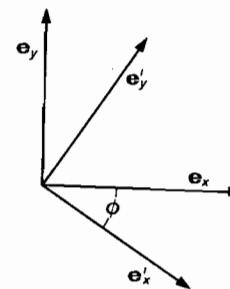


FIG. 10-3 Si efectuamos una rotación de un ángulo  $-\phi$  de los ejes coordenados alrededor del eje  $z$ , tenemos (fig. 10-3)

$$\langle \mathbf{e}'_x | \mathbf{e}_x \rangle = \cos \phi, \quad \langle \mathbf{e}'_x | \mathbf{e}_y \rangle = -\text{sen } \phi,$$

$$\langle \mathbf{e}'_y | \mathbf{e}_x \rangle = \text{sen } \phi, \quad \langle \mathbf{e}'_y | \mathbf{e}_y \rangle = \cos \phi,$$

con las que se hallan

$$\mathbf{e}'_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}'_x + i\mathbf{e}'_y)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}[\cos \phi \mathbf{e}_x - \text{sen } \phi \mathbf{e}_y + i(\text{sen } \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y)] = e^{i\phi} \mathbf{e}_1.$$

$$\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{e}'_3 = e^{-i\phi} \mathbf{e}_3.$$

Luego, la matriz de transformación es

$$(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix}.$$

La matriz inversa es la misma matriz ( $\mathbf{S}$ ) en que se ha sustituido  $\phi$  por  $-\phi$ , o sea,

$$(\mathbf{S}^{-1}) = (\tilde{\mathbf{S}})^*.$$

En los vectores que varían sinusoidalmente

$$|\mathbf{A}\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} A_+ \\ A_x \\ \frac{1}{\sqrt{2}} A_- \end{bmatrix} e^{i\omega t},$$

observaremos que

$$\begin{bmatrix} A_+ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

representa un vector que gira en sentido contrario al reloj en el plano  $xy$ , y que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A_- \end{bmatrix}$$

representa un vector que gira en sentido del reloj en el mismo plano, como se indica en la figura 10-4 (véase sección 1-9). Esto se ve claramente por la matriz de transformación, que nos dice que, con respecto a un sistema de coordenadas que gira con la velocidad angular  $\omega$  alrededor del eje  $z$ , siendo  $\phi = -\omega t$  (obsérvese que  $\phi$  representa una rotación de  $-\phi$  de dicho sistema alrededor del eje  $z$ ), tenemos

$$A'_+ = A_+ e^{i\omega t} e^{i\phi} = A_+.$$

Es decir, que con respecto al sistema de coordenadas que gira, el vector representado por  $A'_+$  es constante. Igualmente, con respecto al sistema de

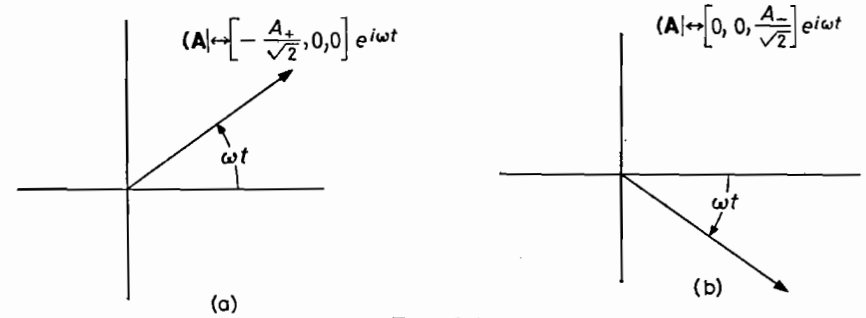


FIG. 10-4

coordenadas que gira con velocidad angular  $-\omega$  alrededor del eje  $z$ , tenemos  $\phi = \omega t$  y

$$A'_- = A_- e^{i\phi} e^{-i\omega t} = A_-$$

permanece fijo.

Este resultado tiene una aplicación importante. Por ejemplo, en la propagación de una onda electromagnética plana armónica,

$$E_+ = E_x + iE_y \quad \text{y} \quad E_- = E_x - iE_y$$

se utilizan para la representación matemática de los modos polarizados circulares.

### 10-9 Valores propios y vectores propios de un operador: diagonalización de operadores normales

De especial importancia es la ecuación de valores propios (o eigenvalores) de un operador

$$\mathbf{L}|\mathbf{u}\rangle = \lambda|\mathbf{u}\rangle, \tag{10-127}$$

donde  $\lambda$  es constante. Con un operador  $\mathbf{L}$  dado, esta ecuación tiene solución sólo para determinados valores específicos de  $\lambda$ , que se llaman *valores propios* del operador  $\mathbf{L}$ . Con cada uno de estos valores propios,  $\lambda_i$ , está relacionado, generalmente, un solo vector,  $|\mathbf{u}_i\rangle$ , que satisface la ecuación de valores propios. Los vectores  $|\mathbf{u}_i\rangle$  se denominan *vectores propios* (o *eigen-vectores*) del operador  $\mathbf{L}$ .

Para hallar los valores propios, volveremos a escribir la ecuación (10-127) en la forma

$$(\mathbf{L} - \lambda \mathbf{1})|\mathbf{u}\rangle = 0, \quad (10-128)$$

que nos da las  $n$  ecuaciones simultáneas homogéneas

$$\sum_{j=1}^n (L_{ij} - \lambda \delta_{ij}) u_j = 0. \quad (10-129)$$

Estas ecuaciones sólo tendrán solución si el determinante de los coeficientes de las componentes  $u_j$  del vector  $|\mathbf{u}\rangle$  es nulo. Esta ecuación del determinante

$$\det (L_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0,$$

recibe el nombre de *ecuación secular*. Como es de orden  $n$  en  $\lambda$ , puede ser satisfecha por  $n$  valores de  $\lambda$ . Supondremos por el momento que las raíces de la ecuación secular son distintas. En este caso, podremos encontrar un  $|\mathbf{u}_i\rangle$  para cada una de las raíces  $\lambda_i$ , lo que se logrará resolviendo  $n - 1$  de las ecuaciones simultáneas para hallar las  $n - 1$  componentes del vector  $|\mathbf{u}_i\rangle$  en función de la  $n$ -ésima componente. Como la magnitud del vector que satisfaga la ecuación (10-128) es arbitraria, quedamos en libertad de ajustarla para que sea uno, fijando además con ello la magnitud de la  $n$ -ésima componente.

Por ejemplo, consideremos el operador simétrico cuya representación matricial está dada por

$$\mathbf{L} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La ecuación secular de este operador es

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 5 \\ 0 & -2 - \lambda & 0 \\ 5 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2(-2 - \lambda) + 25(2 + \lambda) = 0.$$

Sus raíces son

$$\lambda = -2, -4, 6.$$

Para el valor propio  $\lambda_1 = -2$  obtenemos, entonces, dos ecuaciones independientes para las componentes del vector propio  $|\mathbf{u}_1\rangle$ . Estas ecuaciones son

$$3u_{11} + 5u_{13} = 0 \quad \text{y} \quad 5u_{11} + 3u_{13} = 0,$$

las cuales sólo pueden ser satisfechas si  $u_{11} = u_{13} = 0$ . Luego

$$|\mathbf{u}_1\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Similarmente, para el segundo valor propio,  $\lambda_2 = -4$ , tendremos el vector propio  $|\mathbf{u}_2\rangle$  cuyas componentes se obtienen con las ecuaciones

$$\begin{aligned} 5u_{21} + 5u_{23} &= 0, \\ 0u_{21} + (-2 + 4)u_{22} + 0u_{23} &= 0. \end{aligned}$$

La solución de estas ecuaciones es  $u_{22} = 0$  y  $u_{23} = -u_{21}$ , lo que nos conduce al vector propio normalizado

$$|\mathbf{u}_2\rangle \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Igualmente, el vector propio normalizado correspondiente al tercer valor propio se halla que es

$$|\mathbf{u}_3\rangle \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si las raíces de una ecuación secular no son distintas, tenemos una *degeneración*. Para ver cómo se maneja tal degeneración, consideremos el caso en que uno de los valores propios sea una raíz doble de una ecuación secular. Esto significa que sólo  $n - 2$  de las ecuaciones simultáneas para las componentes del vector propio son linealmente independientes, lo cual nos indica que debemos determinar  $n - 2$  de sus componentes en función de las dos componentes restantes. Elijamos que éstas sean las componentes  $u_{\lambda_1}$  y  $u_{\lambda_2}$ . Hallaremos entonces que un conjunto de valores de  $u_{\lambda_1}$  y  $u_{\lambda_2}$  da un vector propio de  $\mathbf{L}$  asociado o relacionado con el valor propio degene-

rado  $\lambda$ . En un problema de valores propios degenerados de  $n$  dimensiones, debemos buscar  $n$  vectores propios. Dos de éstos pertenecen, obviamente, al valor degenerado que es una raíz doble de la ecuación secular. Estos dos se pueden tomar como los vectores propios normalizados que se obtienen cuando hacemos primero  $u_{\lambda 1}$  y luego  $u_{\lambda 2}$  iguales a cero, o bien establecemos una combinación lineal normalizada de ambas igualdades. La extensión a valores propios degenerados triples y de mayor multiplicidad queda así clara.

Como ejemplo, procederemos a hallar los momentos de inercia principales de un cubo uniforme con respecto a uno de sus vértices. Estos momentos principales son los de inercia con respecto al conjunto de ejes principales que pasan por el punto en cuestión. Estos ejes son, a su vez, aquellos sobre los que un cuerpo rígido debe girar para que su vector de cantidad de movimiento angular sea paralelo a su vector de velocidad angular, es decir, que el vector de cantidad de movimiento angular sea

$$\mathbf{L} = \lambda \boldsymbol{\omega}.$$

Esto nos da la ecuación de valores propios

$$|\mathbf{u}\rangle = \lambda |\mathbf{u}\rangle.$$

Las raíces de la ecuación secular resultante son los momentos principales de inercia, y los vectores propios indican las direcciones de los ejes principales. Utilizando los resultados obtenidos en la sección 9-3 para los momentos y productos de inercia de un paralelepípedo rectángulo, obtenemos para  $a = b = c$  la matriz del momento de inercia

$$(I) = Ma^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Haciendo  $\lambda = Ma^2 K$ , hallamos la ecuación secular

$$Ma^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - K & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - K & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - K \end{bmatrix} = 0,$$

o sea,

$$(K - \frac{1}{12})^2 (K - \frac{1}{6}) = 0.$$

Los momentos de inercia principales son, por consiguiente

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12} Ma^2 \quad \text{e} \quad I_3 = \frac{1}{6} Ma^2.$$

Para  $K = \frac{1}{6}$ , las componentes del vector propio se hallan con las ecuaciones

$$(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}) u_1 - \frac{1}{3} u_2 = \frac{1}{3} u_3$$

y

$$-\frac{1}{3} u_1 + (\frac{2}{3} - \frac{1}{6}) u_2 = \frac{1}{3} u_3.$$

Lo que nos da

$$u_1 = u_2 = u_3,$$

que significa que el eje principal se extiende en la dirección de  $[1, 1, 1]$ .

Los otros vectores propios se determinan con

$$(\frac{2}{3} - \frac{1}{12}) u_1 = \frac{1}{3} u_2 + \frac{1}{3} u_3.$$

O sea que los ejes principales se extienden en las direcciones de los vectores designados por

$$[-(u_2 + u_3), u_2, u_3]$$

para cualquier valor de  $u_2$  y  $u_3$ . Todos estos vectores están en un plano normal a la dirección de  $[1, 1, 1]$ , como puede verificarse tomando el producto vectorial de los últimos ejes principales por el vector que está en dicha dirección. Por tanto podemos escoger dos vectores cualesquiera linealmente independientes que estén en dicho plano normal como ejes principales. Sin embargo, es costumbre escoger dos que sean ortogonales. Si hemos obtenido dos vectores que no lo son partiendo de valores arbitrarios de  $u_2$  y  $u_3$ , será fácil hallar un nuevo conjunto ortogonal utilizando el método de ortogonalización de Schmidt que veremos más adelante.

Este problema de valores propios es análogo al problema matemático de hallar el sistema de coordenadas con respecto al cual el elipsoide

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 + 2I_{xy}xy + 2I_{xz}xz + 2I_{yz}yz = C \quad (10-130)$$

se expresa en su forma más simple

$$I_1x'^2 + I_2y'^2 + I_3z'^2 = C. \quad (10-131)$$

La superficie generada por (10-130) se llama *elipsoide de momentos de inercia*. Ahora entenderemos por qué la coincidencia de dos de los momentos principales de inercia implica que el elipsoide sea de revolución, pues cualquier eje perpendicular al eje principal asociado a un momento de inercia principal se puede tomar también como otro eje principal.

► Como un segundo ejemplo, nos referiremos al problema de dos osciladores armónicos acoplados explicado en la sección 8-11. En ese caso, el problema se mantenía invariable respecto de una permutación de las dos partículas, lo cual se expresa por el operador de permutación.

$$P \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



actuando sobre el vector de posición bidimensional

$$|r\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

de las partículas:

$$(P) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

La ecuación de valor propio de este operador es

$$P|u\rangle = \lambda|u\rangle,$$

que nos da la ecuación secular

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

que tiene las raíces

$$\lambda = \pm 1.$$

El vector propio normalizado del operador de permutación asociado o relacionado con el valor propio  $\lambda_1 = +1$  es

$$|u_1\rangle \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El vector propio normalizado relacionado con el valor propio  $\lambda_2 = -1$  es

$$|u_2\rangle \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

El vector de posición en función de estos vectores propios se halla que es

$$|r\rangle = \xi_1|u_1\rangle + \xi_2|u_2\rangle$$

o sea,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{\xi_1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\xi_2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Esto nos da

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_1 + \xi_2) \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_1 - \xi_2),$$

o sea,

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2) \quad \text{y} \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - x_2),$$

que son las coordenadas normales pares e impares. ◀

De especial interés resultan los valores y vectores propios de los *operadores normales* que son operadores conmutativos con su hermitiano adjunto

$$LL^\dagger = L^\dagger L. \quad (10-132)$$

Estos operadores son importantes porque, como se demostrará, sus vectores propios normalizados son ortogonales entre sí y satisfacen la ecuación

$$\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (10-133)$$

En consecuencia, se pueden escoger como un conjunto ortonormal de vectores base. Si se emplean como éstos, la representación matricial del operador normal  $L$ , del cual son los vectores propios, toma su forma más simple, que es la de una matriz diagonal. Esto se puede reconocer fácilmente, hallando los elementos de la matriz de  $L$  que, por la ecuación (10-119), están dados por

$$L_{ij} = \langle u_i | L | u_j \rangle = \lambda_j \langle u_i | u_j \rangle. \quad (10-134)$$

Proseguiremos ahora con la demostración de la ecuación (10-133). Operando sobre la ecuación de valores propios

$$L|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle$$

con  $L^\dagger$ , obtenemos la ecuación

$$L^\dagger L |u_i\rangle = \lambda_i L^\dagger |u_i\rangle, \quad (10-135)$$

o bien, por la ecuación (10-132),

$$LL^\dagger |u_i\rangle = \lambda_i L^\dagger |u_i\rangle. \quad (10-136)$$

Hemos hallado, por tanto, que el vector  $L^\dagger |u_i\rangle$  es también un vector propio del operador  $L$ , relacionado con el mismo valor propio,  $\lambda_i$ , que el vector  $|u_i\rangle$ . Pero si las  $\lambda_i$  son distintas, entonces sólo habrá un vector propio relacionado con cada  $\lambda_i$ . Por consiguiente, se deduce que para valores propios discretos podemos establecer

$$L^\dagger |u_i\rangle = c_i |u_i\rangle, \quad (10-137)$$

que nos da

$$\langle u_i | L^\dagger L | u_i \rangle = \langle u_i | \lambda_i L^\dagger | u_i \rangle = \lambda_i c_i \langle u_i | u_i \rangle. \quad (10-138)$$

La hermitiana adjunta de esta ecuación da el resultado

$$\langle u_i | L^\dagger L | u_i \rangle^\dagger = \langle u_i | LL^\dagger | u_i \rangle = \lambda_i^* c_i^* \langle u_i | u_i \rangle. \quad (10-139)$$

Las ecuaciones (10-138) y (10-139) nos dicen que

$$\lambda_i c_i = \lambda_i^* c_i^*,$$

lo que implica que  $\lambda_i c_i$  sea real, o que

$$c_i = \lambda_i^*.$$

De donde llegamos al resultado

$$\lambda_i c_i = |\lambda_i|^2.$$

Habiendo hallado que  $L^\dagger L|u_j\rangle = |\lambda_j|^2|u_j\rangle$ , se desprende que

$$\langle u_i | L^\dagger L | u_j \rangle = |\lambda_j|^2 \langle u_i | u_j \rangle,$$

cuya hermitiana adjunta es

$$|\lambda_j|^2 \langle u_j | u_i \rangle = \langle u_j | L^\dagger L | u_i \rangle = |\lambda_i|^2 \langle u_j | u_i \rangle$$

o sea,

$$[|\lambda_i|^2 - |\lambda_j|^2] \langle u_j | u_i \rangle = 0.$$

Si  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , se tendrá

$$\langle u_j | u_i \rangle = 0, \tag{10-141}$$

que es lo que queríamos demostrar. Como supusimos que las  $|u_j\rangle$  estaban normalizadas, se desprende la ecuación (10-133). Así queda demostrado que los vectores propios normalizados relacionados con diferentes valores propios de un operador normal forman un conjunto ortonormal de vectores.

Ahora bien, observaremos que un operador hermitiano es un operador normal, de lo que se deduce que los vectores propios normalizados de un operador hermitiano forman un conjunto ortonormal de vectores, y un operador hermitiano se podrá expresar por

$$H = \sum_i h_i |u_i\rangle \langle u_i|, \tag{10-142}$$

donde las  $h_i$  son sus valores propios.

Proseguiremos ahora para demostrar que los valores propios de un operador hermitiano son reales. Esto se deduce fácilmente de

$$\langle u_i | H | u_i \rangle = \langle u_i | H^\dagger | u_i \rangle,$$

y del hecho de que los valores propios del hermitiano adjunto de un operador normal son los complejos conjugados de los valores propios del operador (ecuación 10-40). Luego,

$$h_i = h_i^*, \tag{10-143}$$

lo que prueba que las  $h_i$  son reales.

En el caso de una degeneración, esto es, si dos o más vectores propios de un operador normal están relacionados con el mismo valor propio, veremos claramente que los vectores propios relacionados o asociados con diferentes valores propios son todavía ortogonales entre sí. Pues para los  $k$  vectores propios relacionados con un valor propio,  $\lambda_i$ , degenerado  $k$  veces (o sea, una raíz de orden  $k$  de la ecuación secular), siempre será posible construir o formar a partir de esos  $k$  vectores linealmente independientes,

otras tantas combinaciones lineales que sean ortogonales entre sí y además, es claro, a los vectores propios del operador normal asociados con el valor propio  $\lambda_j \neq \lambda_i$ . El método para construir estos vectores mutuamente ortogonales es conocido como procedimiento de ortogonalización de Schmidt para un conjunto de vectores unidad linealmente independientes  $|u_i\rangle$ . Supondremos que los vectores  $|u_i\rangle$  son vectores unidad. Si no lo fueran, se podría hacer fácilmente que lo sean.

Dicho método de Schmidt consiste en establecer

$$\begin{aligned} |u'_1\rangle &= |u_1\rangle, \\ |u'_2\rangle &= \alpha_2 |u_1\rangle + \beta_2 |u_2\rangle, \\ |u'_3\rangle &= \alpha_3 |u_1\rangle + \beta_3 |u_2\rangle + \gamma_3 |u_3\rangle \end{aligned}$$

y luego ajustar  $\alpha_2$  y  $\beta_2$  para que

$$\langle u'_2 | u'_2 \rangle = 1 \quad \text{y} \quad \langle u'_2 | u'_1 \rangle = 0.$$

Esto nos dará dos ecuaciones con que se determinarán,  $\alpha_2$  y  $\beta_2$ , obteniendo

$$\beta_2 = -\frac{1}{\langle u'_1 | u_2 \rangle} \quad \text{y} \quad \alpha_2 = (\beta_2^2 - 1)^{-1/2}.$$

Los valores de  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$  y  $\gamma_3$  se hallan a su vez, con las tres ecuaciones

$$\langle u'_3 | u'_3 \rangle = 1, \quad \langle u'_3 | u'_2 \rangle = 0, \quad \langle u'_3 | u'_1 \rangle = 0.$$

Se puede continuar este procedimiento hasta obtener  $k$  vectores unidad nuevos que sean ortogonales entre sí y también, naturalmente, a los vectores propios asociados o relacionados con los diferentes valores propios. La fórmula general para el  $i$ -ésimo vector es

$$|u'_i\rangle = \alpha_i \left[ 1 - \sum_{j=1}^{i-1} |u'_j\rangle \langle u'_j| \right] |u_i\rangle, \tag{10-144}$$

donde  $\alpha_i$  es la constante de normalización que hace que

$$\langle u'_i | u'_i \rangle = 1.$$

Para los valores propios degenerados del operador de momentos de inercia del cubo uniforme tratado anteriormente, hallamos los dos vectores propios

$$|u_1\rangle \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [-1, 1, 0]$$

y

$$|u_2\rangle \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [-1, 0, 1]$$

haciendo sucesivamente  $u_3$  y  $u_2$  iguales a cero.

Estos dos vectores no son ortogonales entre sí, por lo que obtenemos los dos vectores propios,

$$\langle \mathbf{u}'_1 | = \langle \mathbf{u}_1 | \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [-1, 1, 0]$$

y  
 $\langle \mathbf{u}'_2 | = \alpha \langle \mathbf{u}_1 | + \beta \langle \mathbf{u}_2 |$ ,  
 que, para el valor apropiado de  $\beta$ , son ortogonales entre sí. Se halla que este valor es

$$\beta = -\frac{1}{\langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_1 \rangle} = -2$$

Para que  $\langle \mathbf{u}'_2 |$  sea normalizado,  $\alpha$  debe tener el valor  $1/\sqrt{3}$ . Luego

$$\langle \mathbf{u}'_2 | \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right].$$

Observaremos que el operador de momentos de inercia de un cuerpo rígido es hermitiano, ya que es un operador simétrico real. Siempre existirán tres vectores mutuamente perpendiculares para los que

$$I | \mathbf{u}_i \rangle = I_i | \mathbf{u}_i \rangle,$$

donde las  $I_i$  son los momentos de inercia principales, y donde los vectores unidad  $| \mathbf{u}_i \rangle$  determinan los ejes principales del cuerpo rígido. La matriz (tensor) de momentos de inercia con respecto a los ejes principales toma su forma más simple en que se anulan los elementos que no están en la diagonal principal, que son los productos de inercia.

### 10-10 Diagonalización simultánea de operadores normales de conmutación

Se puede demostrar que dos o más operadores de conmutación que actúen sobre vectores del mismo espacio vectorial tienen un conjunto común de vectores propios.

Si estos vectores propios no son degenerados, la demostración del principio anterior se desprende fácilmente. Consideremos los dos operadores de conmutación  $L_1$  y  $L_2$ . Si suponemos que  $| \mathbf{u}_i \rangle$  representan los vectores propios asociados a los valores propios no degenerados del operador  $L_1$  tales que

$$L_1 | \mathbf{u}_i \rangle = \lambda_i | \mathbf{u}_i \rangle,$$

se halla que cuando operamos sobre esta ecuación con  $L_2$  obtendremos

$$L_2 L_1 | \mathbf{u}_i \rangle = L_1 L_2 | \mathbf{u}_i \rangle = \lambda_i L_2 | \mathbf{u}_i \rangle.$$

Vemos entonces que  $L_2 | \mathbf{u}_i \rangle$  es también un vector propio del operador  $L_1$  asociado con el valor propio  $\lambda_i$ . Como  $\lambda_i$  no es degenerado se sigue que

$$L_2 | \mathbf{u}_i \rangle = c_i | \mathbf{u}_i \rangle,$$

lo que prueba que  $| \mathbf{u}_i \rangle$  es también un vector propio de  $L_2$ .

Si  $\lambda_i$  tiene más de un vector propio asociado con él, los vectores propios  $| \mathbf{u}_i^{(k)} \rangle$ , entonces el vector propio  $L_2 | \mathbf{u}_i^{(1)} \rangle$  de  $L_1$  se puede expresar por una suma lineal de los vectores propios  $| \mathbf{u}_i^{(k)} \rangle$  de  $L_1$  asociados con el valor propio  $\lambda_i$ , esto es,

$$L_2 | \mathbf{u}_i^{(1)} \rangle = \sum_j \alpha_j^{(1)} | \mathbf{u}_i^{(j)} \rangle.$$

Similarmente,

$$L_2 | \mathbf{u}_i^{(k)} \rangle = \sum_j \alpha_j^{(k)} | \mathbf{u}_i^{(j)} \rangle.$$

Para simplificar, supongamos que hay dos vectores propios asociados al valor propio  $\lambda_i$ . Tendremos entonces

$$L_2 | \mathbf{u}_i^{(1)} \rangle = \alpha_1^{(1)} | \mathbf{u}_i^{(1)} \rangle + \alpha_2^{(1)} | \mathbf{u}_i^{(2)} \rangle \tag{10-145}$$

y

$$L_2 | \mathbf{u}_i^{(2)} \rangle = \alpha_1^{(2)} | \mathbf{u}_i^{(1)} \rangle + \alpha_2^{(2)} | \mathbf{u}_i^{(2)} \rangle.$$

Se puede ahora investigar la existencia de una combinación lineal de  $| \mathbf{u}_i^{(1)} \rangle$  y  $| \mathbf{u}_i^{(2)} \rangle$  que sea un vector propio de  $L_2$ . Esto es, buscaremos la

$$| \mathbf{v}_i \rangle = A | \mathbf{u}_i^{(1)} \rangle + B | \mathbf{u}_i^{(2)} \rangle$$

que satisfaga la ecuación

$$L_2 | \mathbf{v}_i \rangle = K | \mathbf{v}_i \rangle,$$

o sea,

$$L_2 [A | \mathbf{u}_i^{(1)} \rangle + B | \mathbf{u}_i^{(2)} \rangle] = K [A | \mathbf{u}_i^{(1)} \rangle + B | \mathbf{u}_i^{(2)} \rangle].$$

Esta es una ecuación de valores propios que, utilizando la ecuación (10-145), nos conduce a

$$\{A[\alpha_1^{(1)} - K] + B\alpha_1^{(2)}\} | \mathbf{u}_i^{(1)} \rangle + \{A\alpha_2^{(1)} + B[\alpha_2^{(2)} - K]\} | \mathbf{u}_i^{(2)} \rangle = 0.$$

Si se escogieran los vectores propios  $| \mathbf{u}_i^{(k)} \rangle$  de tal forma que sean ortogonales entre sí, sus coeficientes de la ecuación anterior anularán,

$$A(\alpha_1^{(1)} - K) + B\alpha_1^{(2)} = 0$$

y

$$A\alpha_2^{(1)} + B(\alpha_2^{(2)} - K) = 0.$$

Con estas ecuaciones simultáneas sólo se podrá determinar  $A$  y  $B$  si el determinante de sus coeficientes se anula,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} - K & \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} - K \end{vmatrix} = 0.$$

La ecuación de este determinante da dos raíces, o sea, dos valores propios de  $L_2$  y, por lo tanto, dos vectores propios de  $L_2$ . De esta manera, todos los vectores propios de  $L_1$  se pueden ajustar para que sean simultáneamente vectores propios de  $L_2$ . E inversamente, todos los vectores propios de  $L_2$  se pueden ajustar para que sean simultáneamente vectores propios de  $L_1$ , que es lo que se quería demostrar.

Se deja como ejercicio para el lector la extensión de este teorema a tres o más operadores de conmutación. El empleo del conjunto de vectores propios ortogonales simultáneos de un conjunto de operadores normales de conmutación como vectores base del espacio vectorial dará representaciones matriciales diagonales de dichos operadores.

Este resultado es muy importante y muy útil. Como ejemplo, consideremos, una vez más, el problema de los dos osciladores armónicos acoplados de la sección 8-11. Las ecuaciones de movimiento de las dos partículas se pueden expresar en función del operador diferencial  $L$  cuya representación matricial es

$$L \leftrightarrow \begin{bmatrix} m \frac{d^2}{dt^2} + 2k & -k \\ -k & m \frac{d^2}{dt^2} + 2k \end{bmatrix}$$

Es decir, las ecuaciones (8-156) y (8-157) se pueden expresar por

$$L|x\rangle = 0,$$

donde

$$|x\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, como la operación de permutación deja invariables las ecuaciones de movimiento

$$PL|x\rangle = PLP^{-1}P|x\rangle = LP|x\rangle.$$

Esto significa que

$$PLP^{-1} = L \quad \text{o} \quad PL = LP.$$

O sea, el operador de permutación es conmutativo con el operador diferencial  $L$ , como se puede verificar directamente. Por consiguiente, habrá una combinación lineal de los vectores propios de  $L$  asociados con el valor propio cero, los cuales son simultáneamente vectores propios del operador de permutación  $P$ . De hecho, las soluciones que hallamos eran, ellas mismas, los vectores propios simultáneos. Inversamente, los vectores propios no degenerados de  $P$  son simultáneamente vectores propios de  $L$ . Realmente, los vectores propios

$$|v_1\rangle \leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |v_2\rangle \leftrightarrow \frac{x_1 - x_2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

de  $P$  lo son también de  $L$ . Estas consideraciones de simetría son muy útiles y se emplean extensamente para simplificar la resolución de las ecuaciones de movimiento de un sistema de osciladores acoplados (problema 11-23).

**Problemas**

10-1. Calcular cada uno de los siguientes productos matriciales

$$a) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b) [2 \ 3 \ 1 \ 4] \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

10-2. Identifíquense las matrices no singulares que hay entre las siguientes y hállese sus inversas

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

10-3. Exprésese cada una de las matrices del problema anterior por la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

10-4. a) Hállese los vectores recíprocos del conjunto de vectores representados por las siguientes matrices

$$[3, 2, 1], \quad [4, 3, -4] \quad \text{y} \quad [-7, 3, 1].$$

b) Exprésese el vector  $[6, 8, 1]$  por una combinación lineal de los vectores de la parte a).

10-5. a) Utilícese el método de ortogonalización de Schmidt para obtener un conjunto de vectores ortonormales a partir de los vectores del problema 10-4 a).

b) Repítase la parte a) para los vectores  $[1, 0, 0]$ ,  $[1, 1, 0]$  y  $[1, 1, 1]$ .

10-6. a) Demuéstrase que la no anulación del determinante

$$\begin{vmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{11}^{(2)} & \dots & \dots & M_{11}^{(n^2)} \\ M_{12}^{(1)} & M_{12}^{(2)} & & & M_{12}^{(n^2)} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ M_{1n}^{(1)} & M_{1n}^{(2)} & & & \vdots \\ M_{21}^{(1)} & M_{21}^{(2)} & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ M_{2n}^{(1)} & & & & \vdots \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{31}^{(1)} \\ \vdots \\ M_{nn}^{(1)} & M_{nn}^{(2)} & \dots & M_{nn}^{(n^2)} \end{bmatrix}$$

formado con los elementos de las  $n^2$  matrices  $(M^{(k)})$  de orden  $n \times n$  es una condición necesaria y suficiente para que las  $n^2$  matrices sean linealmente independientes.

b) Demuéstrese que las matrices de Pauli

$$(M^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (M^{(2)}) = i \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (M^{(3)}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

y la matriz unidad

$$(M^{(4)}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son cuatro matrices de orden  $2 \times 2$  linealmente independientes.

c) Exprésese la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

por una combinación lineal de las cuatro matrices  $(M^{(i)})$  de la parte b).

10-7. Fórmense los productos directos  $(A) \otimes (B)$  de las siguientes matrices

$$a) (A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad y \quad (B) = [2, 2, -1]$$

$$b) (A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad y \quad (B) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$c) (A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad y \quad (B) = [3, 0, 2]$$

10-8. a) Empleando la ecuación (10-107), transformar el operador  $M = |A\rangle\langle B| + |B\rangle\langle A|$ , donde  $|A\rangle \leftrightarrow [5, -3, 2]$  y  $|B\rangle \leftrightarrow [0, 5, 10]$ , en un sistema de coordenadas girado  $45^\circ$  alrededor del eje  $z$ .

b) Transformar los vectores  $|A\rangle$  y  $|B\rangle$  empleando la ecuación (10-102) y demostrar que  $M' = |A'\rangle\langle B'| - |B'\rangle\langle A'|$  coincide con la  $M'$  obtenida en la parte a) del problema.

10-9. a) Hállese la inversa de la matriz de transformación de Lorentz

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & 0 & 0 & -\frac{iV}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{iV}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{bmatrix}$$

que transforma la descripción de un fenómeno relativista (un vector del espacio tetradimensional relativista) de un sistema de coordenadas inercial (marcado con primas) a otro (marcado sin primas) cuando el primer sistema se mueve con la velocidad  $V$  a lo largo de la parte positiva del eje  $x$  con respecto al segundo sistema.

b) Sabiendo que con una transformación de Lorentz el campo electromagnético se transforma como los elementos de la matriz de un operador, hállese las ecuaciones de transformación de Lorentz de los vectores de los campos magnético y eléctrico cuyas componentes constituyan los elementos de la matriz de campo electromagnético

$$(F) = \begin{bmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{bmatrix}$$

10-10. La traza de una matriz cuadrada  $(M)$  se define por la ecuación

$$\text{Traza}(M) = \sum_i M_{ii}$$

a) Demuéstrese que la traza de la representación matricial de un operador es invariante bajo una transformación unitaria.

b) Compruébese que la suma  $\sum_{ij} M_{ij} N_{ji}$  formada con los elementos de las matrices cuadradas  $(M)$  y  $(N)$  es invariante bajo una transformación unitaria.

c) Demuéstrese que podemos formar el invariante  $(c^2 B^2 - E^2)$  con los elementos de la matriz del campo electromagnético del problema anterior.

d) Demuéstrese que los valores propios de una matriz cuadrada son invariantes con una transformación unitaria.

e) Demuéstrese que, por lo anterior, el valor del determinante de una matriz cuadrada es invariante con una transformación unitaria.

f) Demuéstrese que con el resultado de la parte e) se puede obtener la expresión invariante  $B \cdot E$  de Lorentz de la matriz de campo electromagnético del problema 10-9.

10-11. Diagonalizar las matrices siguientes

$$a) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} -1 & 5 & 10 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 7 & \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & 2 & -5\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -5\sqrt{2} & -3 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 20 & 0 & 16 \\ 0 & 9 & 0 \\ 16 & 0 & 20 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

10-12. a) Demuéstrese que los valores propios de una matriz antisimétrica son imaginarios o nulos.

b) Hállense los valores propios y un conjunto de vectores propios de la matriz antisimétrica de la velocidad angular

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

10-13. a) Repítase el problema 9-4. b) Repítase el 9-5.

10-14. Utilizando los resultados del problema 9-1 a), hállese el momento de inercia de un cono circular con respecto a una de sus generatrices.

10-15. Despéjese de la ecuación matricial

$$(\mathbf{R})(\mathbf{X}) = (\mathbf{S})$$

la matriz  $(\mathbf{X})$ , sabiendo que

$$(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

10-16. Sabiendo que la definición de la  $n$ -ésima potencia de una matriz cuadrada,  $(\mathbf{M})$ , siendo  $n$  un entero se expresa por  $(\mathbf{M})^n = (\mathbf{M})(\mathbf{M})(\mathbf{M}) \cdots [n \text{ factores}]$ , demuéstrese que:

- a) La transformación que diagonaliza  $(\mathbf{M})$  también diagonaliza  $(\mathbf{M})^n$ .  
 b) Los valores propios de  $(\mathbf{M})^n$  son los de  $(\mathbf{M})$  elevados a la potencia  $n$ .  
 c) Si

$$\sum_{i=0}^n C_i (\mathbf{M})^i = 0, \quad \text{entonces} \quad \sum_{i=1}^n C_i \lambda^i = 0,$$

donde  $\lambda$  es un valor propio de  $(\mathbf{M})$ .

$$d) \frac{1}{(1 - (\mathbf{M}))} \equiv \{(1 - (\mathbf{M}))\}^{-1} = (1) + (\mathbf{M}) + (\mathbf{M})^2 + \cdots$$

10-17. La definición de  $(\mathbf{M})^{1/n}$ , con  $n$  entero, para una matriz cuadrada  $(\mathbf{M})$  se expresa por

$$\{(\mathbf{M})^{1/n}\}^n = (\mathbf{M}).$$

a) Demuéstrese que los valores propios de  $(\mathbf{M})^{1/n}$  son  $\lambda^{1/n}$  donde  $\lambda$  son los valores propios de  $(\mathbf{M})$ .

b) Hállese la matriz  $(\mathbf{M})$  que satisfaga la ecuación

$$(\mathbf{M})^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10-18. Si  $f(x)$  es una función continua de  $x$  que se puede desarrollar en serie de potencias de  $x$ , esto es, si

$$f(x) = \sum_n a_n x^n,$$

entonces, por la función  $f(\mathbf{M})$  del operador  $\mathbf{M}$  se entenderá

$$f(\mathbf{M}) = \sum_n a_n \mathbf{M}^n.$$

Demuéstrese que el operador de transformación

$$\mathbf{R}_z(\phi_3) \leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos \phi_3 & -\text{sen } \phi_3 & 0 \\ \text{sen } \phi_3 & \cos \phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para la rotación de un ángulo  $\phi_3$  de un vector alrededor del eje  $z$ , de modo que  $|\mathbf{r}'\rangle = \mathbf{R}|\mathbf{r}\rangle$  se expresa por

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_z(\phi_3) &= 1 + \{-i\phi_3 \mathbf{M}_3\} + \frac{1}{2!} \{-i\phi_3 \mathbf{M}_3\}^2 + \cdots \\ &= e^{-i\phi_3 \mathbf{M}_3}, \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{M}_3 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De igual manera, demostrar que (problema 3-16)

$$\mathbf{R}_x(\phi_1) = e^{-i\phi_1 \mathbf{M}_1} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}_y(\phi_2) = e^{-i\phi_2 \mathbf{M}_2},$$

donde

$$\mathbf{M}_1 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

10-19. Un grupo de matrices se define como un conjunto de matrices cuadradas que satisfacen las siguientes propiedades:

- a) La matriz unidad es un miembro del grupo.  
 b) Por cada miembro del grupo hay otro miembro del mismo que es su inverso.  
 c) El producto matricial de dos miembros del grupo da una matriz que también es miembro del grupo.

Demuéstrese que el conjunto de matrices

$$(\mathbf{M}_1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{M}_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{M}_3) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{M}_4) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{M}_5) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{M}_6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

forman un grupo.

10-20. a) Hállense los vectores propios simultáneos de las dos matrices de conmutación

$$(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

y sus valores propios.

b) Obténgase la matriz de transformación que diagonalice simultáneamente las dos matrices anteriores.

10-21. Pruébese que

$$a) \{\mathbf{AB}\}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1},$$

$$b) \{\mathbf{AB}\}^\dagger = \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger,$$

donde  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son dos operadores.

10-22. La derivada de una matriz  $(\mathbf{M})$ , se define por la matriz cuyos elementos son las derivadas de los elementos de  $(\mathbf{M})$ . Luego, si

$$(\mathbf{N}) = \frac{d(\mathbf{M})}{dt},$$

entonces

$$N_{ij} = \frac{d}{dt} M_{ij}.$$

a) Demuéstrese que la derivada con respecto a  $t$  de la representación matricial de un operador,  $\mathbf{M}$ , representa el operador  $d\mathbf{M}/dt$ , si los vectores base ortonormales del espacio vectorial no dependen de  $t$ .

b) Demuéstrese que si los vectores base sí cambian con  $t$ , y si podemos poner

$$\frac{d|\mathbf{e}\rangle}{dt} = \mathbf{\Omega}|\mathbf{e}\rangle$$

(suponemos que los vectores base son ortonormales), entonces la derivada  $d\mathbf{M}/dt$  del operador  $\mathbf{M}$  está dada por

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{d'\mathbf{M}}{dt} + \mathbf{\Omega}\mathbf{M} + \mathbf{M}\tilde{\mathbf{\Omega}},$$

donde  $d'\mathbf{M}/dt$  es la derivada de  $\mathbf{M}$  con respecto a un sistema de coordenadas que gira.

c) Demuéstrese que la representación matricial de  $d\mathbf{M}/dt$  está dada por

$$\left(\frac{d\mathbf{M}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\mathbf{M}) + (\mathbf{\Omega})(\mathbf{M}) + (\mathbf{M})(\tilde{\mathbf{\Omega}}).$$

10-23. a) Demostrar que

$$P(a) = e^{a(d/dx)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \frac{d^n}{dx^n}$$

es el operador diferencial que representa el efecto sobre una función  $\psi(x)$ , de una traslación del origen de coordenadas desde el punto  $(0, 0, 0)$  hasta el punto  $(-a, 0, 0)$ . Esto es

$$P(a)\psi(x) = \psi(x + a).$$

b) Demuéstrese que el operador de traslación  $P(a)$  es conmutativo con el operador diferencial  $d/dx$ .

c) Demostrar que las funciones propias de  $d/dx$  que satisfacen la ecuación de valores propios

$$\frac{d}{dx} \psi_\lambda(x) = \lambda \psi_\lambda(x)$$

son simultáneamente funciones propias del operador  $P(a)$ . Hállense los valores propios de  $P(a)$  a que corresponden. ¿A qué valores de las  $\lambda$  nos debemos limitar si se exige que las funciones propias de  $P(a)$  permanezcan finitas para toda  $x$ ?

d) Demuéstrese que las funciones propias de  $d/dx$  que corresponden a los valores propios

$$\lambda = \mu + i \left( \frac{2\pi n}{a} \right)$$

son funciones propias degeneradas del operador  $P(a)$  que corresponden al mismo valor propio. Demuéstrese que en consecuencia, las funciones propias del operador  $P(a)$  se pueden expresar en la forma

$$\Psi(\kappa, x) = e^{i\kappa x} \phi(x),$$

donde  $\phi(x)$  es una función periódica de  $x$  con período  $a$ .

## Teoría de las oscilaciones pequeñas

En el Capítulo 8 tratamos el problema de los osciladores dobles acoplados, y aplazamos entonces el estudio general del movimiento oscilatorio de un sistema de partículas alrededor de sus posiciones de equilibrio estable, para tratar antes la teoría de las transformaciones lineales. La razón para esto fue que hasta el Capítulo 10 no hemos expuesto las técnicas adecuadas para manipular eficazmente los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales simultáneas, que se presentan en el problema de las oscilaciones pequeñas de un sistema a un lado y otro de su posición de equilibrio estable.

La situación ideal se presenta cuando las coordenadas elegidas para la descripción del movimiento del sistema, nos llevan a un sistema de ecuaciones diferenciales independientes, cuya solución se puede obtener por los métodos indicados en el Capítulo 4. Aunque no siempre es probable esta situación ideal, encontraremos que en muchos problemas se puede hallar un conjunto de coordenadas en el que se tiene tal situación. Las coordenadas respecto a las cuales las ecuaciones de movimiento del sistema, que representan las pequeñas oscilaciones, a un lado y otro de los puntos de equilibrio, son independientes, se llaman *coordenadas normales*, y la solución de las ecuaciones independientes, se denomina *modos normales de oscilación* del sistema.

Empezaremos por analizar la estabilidad de las configuraciones de equilibrio de un sistema de partículas.

### 11-1 Condiciones para la estabilidad de una configuración de equilibrio de un sistema conservativo de partículas

Se dice que un sistema de partículas está en equilibrio estático, cuando todas las partículas están y permanecen en reposo. Esta situación puede ocurrir únicamente si la suma de las fuerzas que actúan en cada partícula del sistema es nula. En un sistema conservativo cuyas fuerzas se pueden

obtener partiendo de una función de energía potencial, este hecho se expresa por la anulación de las fuerzas generalizadas (sección 9-13),

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0. \quad (11-1)$$

Esta ecuación da los valores  $q_i^0$  de las coordenadas generalizadas para las configuraciones de equilibrio. Aunque esta condición es suficiente para identificar las configuraciones de equilibrio, no lo es para la determinación de la estabilidad de una de estas configuraciones. Para saber si una configuración de equilibrio es o no estable se emplean las derivadas de segundo orden de la función de energía potencial evaluadas para  $q_i = q_i^0$ . La definición general de equilibrio estable es casi la misma que la del caso unidimensional. Se define una configuración de equilibrio como estable si para un valor pequeño de la energía total, tomando como cero la energía potencial de la configuración de equilibrio, la energía cinética del sistema es limitada en todas las configuraciones cercanas. En otras palabras

$$T \leq E.$$

Para todas las configuraciones cercanas, la función de energía potencial se puede calcular aproximadamente con el primer término no nulo de su desarrollo en serie de Taylor en las cercanías de los puntos

$$q_i = q_i^0.$$

El desarrollo en serie de Taylor de la función de energía potencial está dado por

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) = U(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0) + \sum_i \frac{\partial U(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)}{\partial q_i^0} x_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 U(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)}{\partial q_i^0 \partial q_j^0} x_i x_j + \dots, \quad (11-2)$$

donde:

$$x_i = \Delta q_i = q_i - q_i^0.$$

Ahora, por la elección tomada, tenemos que el primer término  $U(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)$  de la ecuación (11-2) es nulo. Por la ecuación (11-1) se encuentra que el segundo término también es nulo y, por consiguiente, en una primera aproximación, obtenemos

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) = \mathcal{U}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

donde

$$\mathcal{U}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j \quad (11-3)$$



con

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 U(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)}{\partial q_i^0 \partial q_j^0} = k_{ji}. \quad (11-4)$$

Para que la energía cinética,  $T = E - U$ , sea menor que la energía total  $E$ , la energía potencial de las configuraciones cercanas tiene que ser precisamente positiva. En realidad, si para pequeños desplazamientos a partir de la posición de equilibrio

$$U \geq 0, \quad (11-5)$$

entonces

$$T \leq E.$$

La condición para que una configuración de equilibrio de un sistema de  $N$  partículas sea estable es, por tanto, la misma que la hallada para el caso unidimensional, esto es, que la energía potencial para una configuración de equilibrio sea mínima con respecto a la energía potencial para cualquiera otra configuración cercana.

Las condiciones respecto a las constantes  $k_{ij}$  que aseguran que las expresiones cuadráticas de  $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sean precisamente positivas son \*

$$k_{11} > 0, \quad \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} > 0, \quad \text{etc.} \quad (11-6)$$

Como ejemplo, consideremos la función de energía potencial

$$U = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) + m_1 g l_1 + m_2 g (l_1 + l_2)$$

del péndulo doble de la sección 8-11. Por la ecuación (11-1) debemos tener

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = (m_1 g l_1 + m_2 g l_1) \sin \theta_1 = 0$$

y

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0$$

para el equilibrio. Estas condiciones quedan satisfechas para

$$\theta_1 = 0 \quad \text{ó} \quad \pi \quad \text{y} \quad \theta_2 = 0 \quad \text{ó} \quad \pi$$

Obviamente, por experiencia nos damos cuenta que la configuración de equilibrio estable se presenta para  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ . Comprobemos para ver si la ecuación (11-6) se satisface sólo para estos valores de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

\* W. F. Osgood, *Advanced Calculus*, pág. 179. Nueva York: Macmillan, 1925.

Vemos que

$$k_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1^2} = (m_1 g l_1 + m_2 g l_1) \cos \theta_1$$

es precisamente positiva sólo para  $\theta_1 = 0$  y que, como

$$k_{12} = k_{21} = 0,$$

el determinante  $\det(k_{ij})$  es positivo sólo si  $k_{22}$  es positivo también. Esto nos conduce a que  $\theta_2$  sea cero en el punto de equilibrio estable.

### 11-2 Ecuaciones de movimiento para desplazamientos pequeños a partir de la posición de equilibrio: movimiento no amortiguado

Para obtener las ecuaciones de movimiento partiendo de la lagrangiana, necesitamos que la energía cinética esté expresada en función de las  $x_i$  y sus derivadas con respecto al tiempo. En general, la energía cinética es función de las coordenadas y velocidades generalizadas. Por tanto, la energía cinética se puede expresar en la forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (11-7)$$

donde las  $m_{ij}$  expresan la dependencia funcional de la energía cinética sobre las coordenadas generalizadas.

Para pequeños desplazamientos respecto de la posición de equilibrio, las funciones  $m_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_n)$  se pueden desarrollar en una serie de Taylor con relación a la configuración de equilibrio, dando

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij}(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0) \dot{x}_i \dot{x}_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left[ \sum_{\alpha} \frac{\partial m_{ij}(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)}{\partial q_{\alpha}^0} x_{\alpha} \right] \dot{x}_i \dot{x}_j + \dots \quad (11-8)$$

Como la energía cinética para el movimiento a un lado y otro de una configuración estable es limitada, se deduce que las velocidades generalizadas  $\dot{q}_i = \dot{x}_i$  son igualmente limitadas. Supondremos que son pequeñas, de modo que nos permitan despreciar todos los términos, menos el primero, del desarrollo en serie de Taylor de la energía cinética.

Así, obtenemos la lagrangiana aproximada

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j), \quad (11-9)$$

en la que hemos establecido

$$m_{ij} = m_{ij}(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0) = m_{ji}. \quad (11-10)$$

Esta lagrangiana da las ecuaciones diferenciales simultáneas de movimiento

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,$$

o

$$\sum_j m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j = 0. \quad (11-11)$$

Estas son  $n$  ecuaciones lineales diferenciales simultáneas homogéneas que pueden ser consideradas como las  $n$  componentes de la ecuación matricial

$$(\mathbf{M})(\ddot{\mathbf{x}}) + (\mathbf{K})(\mathbf{x}) = 0, \quad (11-12)$$

donde las matrices  $(\mathbf{M})$ ,  $(\mathbf{K})$ ,  $(\ddot{\mathbf{x}})$  y  $(\mathbf{x})$  están definidas por

$$(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}, \quad (11-13)$$

$$(\mathbf{K}) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}, \quad (11-14)$$

$$(\ddot{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad (11-15)$$

y

$$(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (11-16)$$

La ecuación (11-12) puede ser considerada, a su vez, como la representación matricial de la ecuación con operadores

$$\mathbf{M}|\ddot{\mathbf{x}}\rangle + \mathbf{K}|\mathbf{x}\rangle = 0, \quad (11-17)$$

donde  $|\mathbf{x}\rangle$  es el vector  $n$ -dimensional cuya representación matricial es  $(\mathbf{x})$ , y  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{K}$  son dos operadores que tienen las representaciones matriciales  $(\mathbf{M})$  y  $(\mathbf{K})$ . Como la energía cinética es, en todo momento, una cantidad concretamente positiva, resulta o se desprende de la ecuación (11-6) que  $\mathbf{M}$  es un operador no singular simétrico para el que el operador inverso  $\mathbf{M}^{-1}$  y los operadores  $\mathbf{M}^{1/2}$  y  $\mathbf{M}^{-1/2}$  existen (problema 10-17). De aquí que podamos expresar la ecuación (11-17) en la forma

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{M}^{1/2}|\mathbf{x}\rangle = -\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}^{1/2}|\mathbf{x}\rangle$$

o

$$\frac{d^2}{dt^2} |\bar{\mathbf{x}}\rangle = -\lambda|\bar{\mathbf{x}}\rangle, \quad (11-18)$$

donde

$$|\bar{\mathbf{x}}\rangle = \mathbf{M}^{1/2}|\mathbf{x}\rangle.$$

Observaremos que  $\mathbf{M}^{-1/2}$  y  $\mathbf{K}$  son operadores simétricos, por consiguiente, resulta que el operador

$$\lambda = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2}$$

es también simétrico.

Como ejemplo, reconsideremos el péndulo doble que estudiamos en la sección 8-11. La energía potencial de este péndulo

$$U = m_1gl_1(1 - \cos \theta_1) + m_2gl_1(1 - \cos \theta_1) + m_2gl_2(1 - \cos \theta_2),$$

tiene, respecto a la configuración de equilibrio ( $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ), el desarrollo en serie de Taylor

$$U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2gl_2\theta_2^2,$$

lo que da

$$k_{11} = (m_1 + m_2)gl_1, \quad k_{12} = k_{21} = 0, \quad k_{22} = m_2gl_2.$$

Anteriormente, encontramos que la energía cinética está dada por (sección 8-11)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2, \end{aligned}$$

de donde hallamos

$$\begin{aligned} m_{11} &= (m_1 + m_2)l_1^2, \\ m_{12} &= m_{21} = m_2l_1l_2, \\ m_{22} &= m_2l_2^2. \end{aligned}$$

Las dos ecuaciones de movimiento para pequeños desplazamientos respecto al equilibrio se pueden obtener, por lo tanto, a partir de la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m_{11}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_{22}\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}(m_{12} + m_{21})\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}k_{11}\theta_1^2 - \frac{1}{2}k_{22}\theta_2^2.$$

Se expresan ellas por

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = 0.$$

En este ejemplo se encuentra que se vuelve más simple algebraicamente si se escribe esta última ecuación en la forma

$$(\mathbf{K}^{1/2})(\ddot{\theta}) + (\mathbf{K}^{1/2})(\mathbf{M}^{-1})(\mathbf{K}^{1/2})(\mathbf{K}^{1/2})(\theta) = 0$$

o

$$\frac{d^2}{dt^2}(\bar{\theta}) + (\lambda)(\bar{\theta}) = 0,$$

donde

$$(\mathbf{K}^{1/2}) = \begin{bmatrix} k_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & k_{22}^{1/2} \end{bmatrix},$$

$$(\bar{\theta}) = (\mathbf{K}^{1/2})(\theta)$$

y

$$(\lambda) = (\mathbf{K}^{1/2})(\mathbf{M}^{-1})(\mathbf{K}^{1/2}).$$

Los elementos de la matriz  $(\mathbf{M}^{-1})$  son (sección 10-6)

$$m_{11}^{-1} = \frac{m_{22}}{\det(m_{ij})},$$

$$m_{22}^{-1} = \frac{m_{11}}{\det(m_{ij})},$$

$$m_{21}^{-1} = m_{12}^{-1} = \frac{-m_{12}}{\det(m_{ij})},$$

donde

$$\det(m_{ij}) = m_{11}m_{22} - m_{12}^2 = m_1m_2l_1^2l_2^2.$$

Esto le da a la ecuación de movimiento la forma de la ecuación (11-18).

### 11-3 Coordenadas normales

Habiendo encontrado posible expresar, en notación con operadores, las ecuaciones de movimiento de un sistema con pequeños desplazamientos desde la posición de equilibrio, estamos en condiciones de utilizar el eficiente

lenguaje del capítulo anterior para explicar la simplificación y solución subsecuente de las ecuaciones de movimiento.

En el lenguaje del capítulo anterior, la (11-18) representa una ecuación vectorial que nos dice que la segunda derivada con respecto al tiempo del vector  $|\bar{x}\rangle$  es igual al vector producido al operar con  $-\lambda$  sobre el vector  $|\bar{x}\rangle$ . Como el operador

$$\lambda = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2}$$

es uno simétrico real, su descripción más simple es la descripción diagonal, la cual se obtiene si usamos sus vectores propios ortonormales como vectores base. La descripción de  $\lambda$  más simple nos dará, igualmente, las ecuaciones de movimiento más simples, que serán un sistema de ecuaciones unidimensionales independientes. Por lo tanto, consideraremos primero el problema de los valores propios

$$\lambda|\rho_i\rangle = \lambda_i|\rho_i\rangle, \quad (11-19)$$

que es equivalente a la ecuación con operadores

$$\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2}|\rho_i\rangle = \lambda_i|\rho_i\rangle. \quad (11-20)$$

Con (11-20) hallamos el resultado de que los valores propios de  $\lambda$  están dados por la ecuación

$$\lambda_i = \frac{\langle \rho_i | \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} | \rho_i \rangle}{\langle \rho_i | \rho_i \rangle}. \quad (11-21)$$

Como tanto la energía cinética como la potencial son cantidades precisamente positivas, resulta que

$$\langle \rho_i | \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} | \rho_i \rangle > 0,$$

y, por tanto, que

$$\lambda_i > 0.$$

Esto nos permite establecer

$$\lambda_i = \omega_i^2. \quad (11-22)$$

En función de los vectores propios ortonormales,  $|\rho_i\rangle$  de  $\lambda$ , el vector  $|\bar{x}\rangle$  se puede expresar por

$$|\bar{x}\rangle = \sum_i y_i |\rho_i\rangle, \quad (11-23)$$

donde

$$y_i = \langle \rho_i | \bar{x} \rangle. \quad (11-24)$$

Introduciendo este resultado en la ecuación de movimiento, ecuación (11-18), obtenemos

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i y_i |\rho_i\rangle = -\lambda |\bar{x}\rangle = -\sum_i \lambda_i y_i |\rho_i\rangle. \quad (11-25)$$

El producto escalar de la ecuación anterior por el vector propio constante  $\langle \rho_j |$  nos da, en consecuencia, la ecuación de movimiento para la coordenada generalizada  $y_j$ ,

$$\frac{d^2 y_j}{dt^2} = -\omega_j^2 y_j. \quad (11-26)$$

La solución de esta ecuación fue estudiada en el Capítulo 4 y se vio que es

$$y_j = A_j \cos(\omega_j t + \phi_j). \quad (11-27)$$

Por lo tanto, hemos demostrado que para el movimiento no amortiguado de un sistema de partículas respecto a su configuración estable, se puede hallar siempre un sistema de coordenadas,  $y_j$ , que nos dé un sistema de ecuaciones generalizadas de movimiento independientes.

La relación lineal de las  $y_j$  con las  $\bar{x}_i$  está dada por la ecuación (11-24), la cual, en función de las componentes de los vectores  $\langle \rho_j |$  y  $|\bar{x}\rangle$  está expresada por

$$y_j = \rho_{j1} \bar{x}_1 + \rho_{j2} \bar{x}_2 + \dots + \rho_{jn} \bar{x}_n. \quad (11-28)$$

Las componentes  $\rho_{ji}$  del  $j$ -ésimo vector propio, se tienen de la resolución de (11-19), el problema del valor propio para  $\lambda$ .

Las coordenadas  $y_j$  se llaman *coordenadas normales*, y las  $\omega_j$  *frecuencias normales*. Las soluciones

$$y_j = A_j \cos(\omega_j t + \phi_j) \quad (11-29)$$

o, en forma equivalente

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1^{(j)} \\ \bar{x}_2^{(j)} \\ \vdots \\ \bar{x}_n^{(j)} \end{bmatrix} = A_j \cos(\omega_j t + \phi_j) \begin{bmatrix} \rho_{j1} \\ \rho_{j2} \\ \vdots \\ \rho_{jn} \end{bmatrix} \quad (11-30)$$

se denominan *modos normales de vibración* del sistema.

Como ejemplo, consideremos la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales simultáneas con coeficientes constantes,

$$\begin{bmatrix} \ddot{\bar{x}}_1 \\ \ddot{\bar{x}}_2 \\ \ddot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}.$$

De la representación matricial de  $\lambda$ ,

$$(\lambda) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

obtenemos la ecuación de valores propios

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix},$$

que sólo tiene solución si

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Esta ecuación secular tiene las tres raíces

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 6.$$

Para  $\lambda_2 = 4$ , obtenemos el vector propio  $|\rho_2\rangle$  cuyas componentes están relacionadas por las ecuaciones

$$(5 - 4)\rho_{21} + \rho_{23} = 0,$$

$$(2 - 4)\rho_{22} = 0,$$

$$\rho_{21} + (5 - 4)\rho_{23} = 0.$$

Entonces, tenemos

$$\rho_{21} = -\rho_{23}, \quad \rho_{22} = 0$$

o sea

$$|\rho_2\rangle \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Similarmente, obtenemos los vectores propios

$$|\rho_1\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad |\rho_3\rangle \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que nos dan las coordenadas normales

$$y_j = \langle \rho_j | \bar{x} \rangle = \sum_{i=1}^3 \rho_{ji} \bar{x}_i.$$

En notación matricial, esta última ecuación se expresa por

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix},$$

que puede considerarse como la representación matricial de la ecuación con operador

$$|y\rangle = S|\bar{x}\rangle.$$

Como ya se demostró, las  $y_j$  así definidas satisfacen las ecuaciones

$$\ddot{y}_j + \lambda_j y_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Lo que se puede ver del hecho de que operando en la ecuación de movimiento del vector  $|\bar{x}\rangle$ ,

$$\frac{d^2}{dt^2} |\bar{x}\rangle + \lambda |\bar{x}\rangle = 0,$$

con el operador de transformación  $S$ , obtenemos

$$\frac{d^2}{dt^2} S|\bar{x}\rangle + S\lambda S^{-1}S|\bar{x}\rangle = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d^2}{dt^2} |y\rangle + \lambda' |y\rangle = 0,$$

donde  $\lambda' = S\lambda S^{-1}$ . En nuestro ejemplo, la representación matricial de  $\lambda'$  es

$$(\lambda') = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente, se halla que  $(\lambda')$  es la forma diagonal de  $(\lambda)$ . Lo que hemos demostrado es que la matriz de transformación formada con las representaciones matriciales de los vectores propios de un operador simétrico, diagonaliza la representación matricial del operador.

Observaremos que si el operador  $\lambda$  tiene dos o más valores propios idénticos, todavía podemos hallar un sistema de vectores propios ortonormales, como se indicó en el capítulo anterior. Como para los modos normales de oscilación del sistema, esto significa justamente que el modo normal de

la frecuencia correspondiente no es único. Cualquiera combinación lineal de los dos o más modos normales que tengan la misma frecuencia normal, es también un modo normal de dicha frecuencia.

#### 11-4 Movimiento amortiguado

Volveremos ahora nuestra atención al caso más real en que se presentan fuerzas disipativas. Una vez más, consideremos sólo el efecto de las fuerzas disipativas proporcionales a la primera potencia de la velocidad de las partículas del sistema. El movimiento bajo la acción de tales fuerzas se denomina *movimiento amortiguado*.

El movimiento amortiguado de un sistema de partículas respecto de un punto de equilibrio estable es más complicado matemáticamente que el del caso no amortiguado, porque las coordenadas normales que satisfacen las ecuaciones independientes y no acopladas de movimiento no siempre existen para este tipo de movimiento. La existencia de modos normales en un problema es una simplificación bienvenida. Esto es especialmente cierto si se desea considerar el efecto de fuerzas adicionales sobre el movimiento. Si estas fuerzas adicionales son pequeñas, como por ejemplo, las introducidas cuando se retienen términos adicionales en el desarrollo en series de Taylor de la energía potencial, entonces, para aquellos problemas en los que existen soluciones de modos normales, existe un método sistemático de cálculo aproximado del efecto de las fuerzas perturbadoras sobre el sistema (sección 11-7). Cuando no conocemos modos normales de vibración, la situación es, matemáticamente, mucho más complicada.

Admitiendo, para simplificar, que las fuerzas disipativas sobre la partícula  $l$ -ésima sean de la forma

$$F^{(l)} = -\mu^{(l)} \dot{v}^{(l)}, \quad (11-31)$$

se halla que las fuerzas disipativas generalizadas totales están expresadas por

$$\begin{aligned} Q_i &= -\sum_j \mu_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_n) \dot{q}_j \\ &\simeq -\sum_j \mu_{ij}(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0) \dot{q}_j = -\sum_j \mu_{ij} \dot{x}_j. \end{aligned} \quad (11-32)$$

Las  $\mu_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_n)$  son, generalmente, funciones de las coordenadas generalizadas  $q_j$  y satisfacen la condición

$$\mu_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_n) = \mu_{ji}(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Este hecho se puede ver comparando la expresión de la fuerza de amortiguamiento generalizada

$$Q_i = \sum_l \mathbf{F}^{(l)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^{(l)}}{\partial q_i} = - \sum_l \mu^{(l)} \mathbf{v}^{(l)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^{(l)}}{\partial q_i}$$

con la expresión de la cantidad de movimiento generalizada

$$p_i = \sum_l m^{(l)} \mathbf{v}^{(l)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^{(l)}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_{ij} \dot{q}_j$$

Para pequeños desplazamientos a partir de la posición de equilibrio, reemplazamos  $\mu_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_n)$  por su valor para las coordenadas  $q_i^0$  de la configuración de equilibrio,

$$\mu_{ij} = \mu_{ij}(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0) \tag{11-33}$$

La inclusión de fuerzas disipativas modifica las ecuaciones de movimiento, que, entonces, se expresan generalmente por

$$\sum_j (m_{ij} \ddot{x}_j + \mu_{ij} \dot{x}_j + k_{ij} x_j) = 0 \tag{11-34}$$

o en forma operacional por

$$\mathbf{M}|\ddot{\mathbf{x}}\rangle + \mu|\dot{\mathbf{x}}\rangle + \mathbf{K}|\mathbf{x}\rangle = 0. \tag{11-35}$$

Como mencionamos anteriormente, aparte de casos especiales, no existe ninguna transformación lineal de las coordenadas generalizadas que dé un sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento no acopladas.

Tales casos excepcionales se presentan algunas veces. Un ejemplo, es el caso en el que los dos operadores simétricos  $\mathbf{M}^{-1/2} \mu \mathbf{M}^{-1/2}$  y  $\mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2}$  pueden ser diagonalizados simultáneamente. Esto siempre se podrá hacer si los operadores son conmutativos, o sea, si uno de los operadores,  $\mu$  o  $\mathbf{K}$ , es un múltiplo escalar del operador  $\mathbf{M}$ . Así, por ejemplo, podemos tener

$$\mu_{ij} = 2\mu m_{ij},$$

caso en el cual obtenemos para  $|\bar{\mathbf{x}}\rangle = \mathbf{M}^{1/2} |\mathbf{x}\rangle$  la ecuación de movimiento

$$\frac{d^2}{dt^2} |\bar{\mathbf{x}}\rangle + 2\mu \frac{d}{dt} |\bar{\mathbf{x}}\rangle + \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} |\bar{\mathbf{x}}\rangle = 0. \tag{11-36}$$

El operador  $\mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2}$  se puede diagonalizar ahora por el operador de transformación  $\mathbf{S}$  de la manera expuesta en la sección anterior, donde los elementos matriciales  $S_{ij}$  de  $\mathbf{S}$  son los elementos de las representaciones matriciales de los vectores propios  $|\rho_i\rangle$  del operador  $\lambda = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2}$ ; esto es

$$(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & \rho_{nn} \end{bmatrix}.$$

Operando con  $\mathbf{S}$  sobre la ecuación (11-36) obtenemos entonces las ecuaciones no acopladas de movimiento representadas por

$$\frac{d^2}{dt^2} |\mathbf{y}\rangle + 2\mu \frac{d}{dt} |\mathbf{y}\rangle + \lambda' |\mathbf{y}\rangle = 0, \tag{11-37}$$

donde

$$|\mathbf{y}\rangle = \mathbf{S}|\bar{\mathbf{x}}\rangle = \mathbf{S} \mathbf{M}^{1/2} |\mathbf{x}\rangle \tag{11-38}$$

y

$$\lambda' = \mathbf{S} \lambda \mathbf{S}^{-1}. \tag{11-39}$$

Las ecuaciones no acopladas son las de movimiento unidimensional para un oscilador armónico amortiguado.

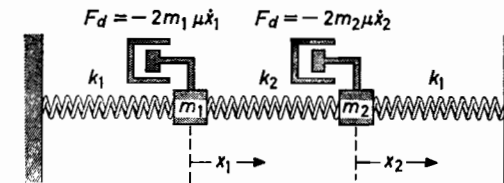


FIG. 11-1

► Como ilustración, consideremos el movimiento amortiguado de los osciladores acoplados que se muestran en la figura 11-1, sobre los cuales actúan las fuerzas amortiguadoras

$$F_i = -2m_i \mu \dot{x}_i, \quad i = 1, 2.$$

Las ecuaciones de Lagrange de movimiento para este sistema de partículas son

$$m_1 \ddot{x}_1 + 2m_1 \mu \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0$$

y

$$m_2 \ddot{x}_2 + 2m_2 \mu \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_2 - k_2 x_1 = 0,$$

o sea,

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + 2\mu \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + (\lambda) \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = 0,$$

donde

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1^{1/2} & 0 \\ 0 & m_2^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1^{1/2} x_1 \\ m_2^{1/2} x_2 \end{bmatrix}$$

y

$$(\lambda) = (\mathbf{M}^{-1/2})(\mathbf{K})(\mathbf{M}^{-1/2}) = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{\sqrt{m_1 m_2}} \\ -\frac{k_2}{\sqrt{m_1 m_2}} & \frac{k_1 + k_2}{m_2} \end{bmatrix}$$

Para el caso en que  $m_1 = m_2 = m$ ,

$$(\lambda) = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de esta matriz son

$$\lambda_1 = \frac{k_1}{m} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{2k_2 + k_1}{m},$$

y las representaciones matriciales de los vectores propios  $|\rho_1\rangle$  y  $|\rho_2\rangle$ , que pertenecen a dichos valores son

$$|\rho_1\rangle \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad |\rho_2\rangle \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

De ahí que la representación matricial del operador  $\mathbf{S}$  que diagonaliza  $\lambda$  sea

$$(\mathbf{S}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Esta  $(\mathbf{S})$  nos da las coordenadas normales

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2),$$

que satisfacen al conjunto de ecuaciones diferenciales no acopladas

$$\ddot{y}_1 + 2\mu\dot{y}_1 + \frac{k_1}{m} y_1 = 0,$$

$$\ddot{y}_2 + 2\mu\dot{y}_2 + \frac{2k_2 + k_1}{m} y_2 = 0.$$

Las soluciones de estas ecuaciones fueron estudiadas en el Capítulo 4. ◀

Usualmente, las ecuaciones de movimiento para un sistema amortiguado no pueden desacoplarse por una transformación lineal. En tales casos, intentaremos hallar una solución suponiendo una solución de tanteo y viendo si satisface las ecuaciones de movimiento. Como éstas son ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes podemos anticipar que pueden tener soluciones de la forma

$$x_i = A_i e^{\alpha t}.$$

Cuando introducimos esta solución de tanteo en la ecuación (11-34), obtenemos el sistema de ecuaciones simultáneas homogéneas

$$\sum_j (\alpha^2 m_{ij} + \alpha \mu_{ij} + k_{ij}) A_j = 0 \quad (11-40)$$

o la ecuación con operadores equivalente

$$(\alpha^2 \mathbf{M} + \alpha \boldsymbol{\mu} + \mathbf{K}) \mathbf{x} = 0. \quad (11-41)$$

Una solución no trivial de estas ecuaciones sólo es posible si el determinante de los coeficientes se anula

$$\det(\alpha^2 m_{ij} + \alpha \mu_{ij} + k_{ij}) = 0. \quad (11-42)$$

Este determinante da un polinomio de orden  $2n$  en  $\alpha$ . La ecuación (11-42) tiene, por lo tanto,  $2n$  raíces, las que, si son distintas, dan  $2n$  soluciones únicas de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} e^{\alpha t} \quad (11-43)$$

para las  $n$  ecuaciones diferenciales de movimiento de segundo orden.

► Como ejemplo, consideremos los dos osciladores acoplados amortiguados mostrados en la figura 11-2, cuyo movimiento rectilíneo es descrito por las ecuaciones de movimiento

$$2\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 + 6x_1 - 4x_2 = 0,$$

$$\ddot{x}_2 + 6\dot{x}_2 + 4x_2 - 4x_1 = 0.$$

Como las dos matrices

$$(\mathbf{M}^{-1/2})(\boldsymbol{\mu})(\mathbf{M}^{-1/2}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

y

$$(M^{-1/2})(K)(M^{-1/2}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$$

no son conmutativas, no existen coordenadas normales. Por lo tanto, intentaremos hallar una solución que tenga la forma

$$x_1 = Ae^{\alpha t} \quad \text{y} \quad x_2 = Be^{\alpha t}.$$

Esta solución de tanteo nos lleva a las dos ecuaciones simultáneas homogéneas

$$(2\alpha^2 + 3\alpha + 6)A - 4B = 0,$$

$$-4A + (\alpha^2 + 6\alpha + 4)B = 0.$$

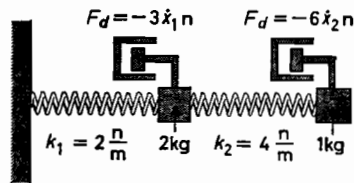


FIG. 11-2

Estas ecuaciones sólo pueden ser satisfechas si  $\alpha$  es una raíz de la ecuación en forma de determinante de los coeficientes de  $A$  y  $B$

$$\begin{vmatrix} 2\alpha^2 + 3\alpha + 6 & -4 \\ -4 & \alpha^2 + 6\alpha + 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Los valores de  $\alpha$  que satisfacen la anterior ecuación son

$$\alpha_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3}, \quad \alpha_{3,4} = \frac{-11 \pm \sqrt{105}}{4}.$$

La solución homogénea general se puede expresar, en consecuencia, por

$$x_1 = \sum_{i=1}^4 A_i e^{\alpha_i t} \quad \text{y} \quad x_2 = \sum_{i=1}^4 B_i e^{\alpha_i t},$$

donde

$$B_i = \frac{2\alpha_i^2 + 3\alpha_i + 6}{4} A_i.$$

Si las raíces son degeneradas, entonces una solución de tanteo que tenga la forma

$$x_j = (A_j + B_j t + \dots + G_j t^{m-1}) e^{\alpha t}, \quad (11-44)$$

donde  $m$  es el orden de la raíz, se substituye en las ecuaciones de movimiento. Para una raíz de segundo orden, la solución de tanteo

$$x_j = (A_j + B_j t) e^{\alpha t} \quad (11-45)$$

introducida en la ecuación (11-34) da, por ejemplo, las ecuaciones

$$e^{\alpha t} \left[ \sum_j (m_{ij}\alpha^2 + \mu_{ij}\alpha + k_{ij})(A_j + B_j t) + \sum_j (2\alpha m_{ij} + \mu_{ij})B_j \right] = 0.$$

Como las funciones  $te^{\alpha t}$  y  $e^{\alpha t}$  son linealmente independientes, la última ecuación puede ser satisfecha para toda  $t$  sólo si los coeficientes de estas funciones se anulan. Obtenemos, así, las  $2n$  ecuaciones simultáneas homogéneas

$$\sum_j (\alpha^2 m_{ij} + \alpha \mu_{ij} + k_{ij}) B_j = 0 \quad (11-46)$$

y

$$\sum_j (2\alpha m_{ij} + \mu_{ij}) B_j + \sum_j (\alpha^2 m_{ij} + \alpha \mu_{ij} + k_{ij}) A_j = 0. \quad (11-47)$$

Como el determinante formado por los coeficientes de las ecuaciones (11-46) y (11-47) se anula para el valor de  $\alpha$  que es una raíz doble de la ecuación (11-42), con estas ecuaciones pueden determinarse  $n - 1$  de los coeficientes  $B_j$  y  $A_j$ , respectivamente, en función de las constantes restantes.

Para simplificar nos limitaremos al caso en que las raíces de la ecuación (11-42) sean discretas e indicamos al lector el muy útil y más directo método de transformación operacional de Laplace para hallar las soluciones homogéneas de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales simultáneas con coeficientes constantes.\* Este método evita algunas de las dificultades que podemos encontrar al intentar resolver por el método de la solución de tanteo esbozado aquí las ecuaciones simultáneas de movimiento cuando existan raíces degeneradas.

Las raíces de la ecuación (11-42) serán, en general, complejas y, por lo tanto, se presentarán en pares de complejos conjugados. Desde un punto de vista físico, es probable que la parte real de las raíces sea negativa, para que éstas den una solución amortiguada de la forma

\* H. S. Carslaw y J. C. Jaeger, *Operational Methods in Applied Mathematics*, Nueva York: Oxford University Press, 1941 y R. V. Churchill, *Modern Operational Mathematics in Engineering*. Nueva York: McGraw Hill, 1944.



$$x_j = A_j e^{-\beta t \pm i\gamma t}.$$

Tal solución expresa el hecho de que la energía se está disipando y que, como es de esperar, las oscilaciones desaparecen gradualmente después de un tiempo suficientemente largo.

Podemos demostrar que éste es realmente el caso. Considérese el operador

$$\mathcal{E} = \alpha^2 \mathbf{M} + \alpha \boldsymbol{\mu} + \mathbf{K}, \quad (11-48)$$

cuya hermitiana adjunta es

$$\mathcal{E}^\dagger = \alpha^{*2} \mathbf{M} + \alpha^* \boldsymbol{\mu} + \mathbf{K} = \mathcal{E}^*. \quad (11-49)$$

De la ecuación (11-41) obtenemos

$$\langle \mathbf{x} | \mathcal{E} | \mathbf{x} \rangle = 0.$$

La hermitiana adjunta de esta expresión también se anula,

$$\langle \mathbf{x} | \mathcal{E} | \mathbf{x} \rangle^\dagger = \langle \mathbf{x} | \mathcal{E}^\dagger | \mathbf{x} \rangle = 0.$$

De donde obtenemos

$$\langle \mathbf{x} | \mathcal{E} - \mathcal{E}^* | \mathbf{x} \rangle = 0$$

o sea,

$$(\alpha^2 - \alpha^{*2}) \langle \mathbf{x} | \mathbf{M} | \mathbf{x} \rangle + (\alpha - \alpha^*) \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\mu} | \mathbf{x} \rangle = 0. \quad (11-50)$$

Poniendo

$$\alpha = -\beta + i\gamma, \quad (11-51)$$

tenemos

$$-4i\beta\gamma \langle \mathbf{x} | \mathbf{M} | \mathbf{x} \rangle + 2i\gamma \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\mu} | \mathbf{x} \rangle = 0$$

o sea

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\mu} | \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x} | \mathbf{M} | \mathbf{x} \rangle}. \quad (11-52)$$

Ahora bien, la energía cinética es precisamente positiva. En consecuencia, resulta que el escalar  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{M} | \mathbf{x} \rangle$  es concretamente positivo. Además considerando que la disipación de energía da lugar a una disminución de la energía del sistema, esto es, que

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \langle \dot{\mathbf{x}} | \mathbf{F}_{\text{amort}} \rangle = -\langle \dot{\mathbf{x}} | \boldsymbol{\mu} | \dot{\mathbf{x}} \rangle \quad (11-53)$$

es una cantidad negativa, vemos que en el caso que analizamos la cantidad escalar  $\langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\mu} | \mathbf{x} \rangle$  también es precisamente positiva. Por lo tanto, hemos conseguido demostrar que  $\beta$  es una constante positiva.

Observaremos que las ecuaciones de movimiento de un sistema de osciladores cargados acoplados en un campo magnético, tienen la misma forma

que la dada por la ecuación (11-35). Sin embargo, en tal caso, como las fuerzas magnéticas no hacen trabajo,

$$\langle \dot{\mathbf{x}} | \boldsymbol{\mu} | \dot{\mathbf{x}} \rangle = 0$$

para toda  $|\dot{\mathbf{x}}\rangle$ . Entonces, para fuerzas magnéticas

$$\langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\mu} | \mathbf{x} \rangle = 0,$$

y  $\beta$  también es nula. Esto significa que en este problema, únicamente debemos esperar raíces imaginarias y ninguna disipación de energía.

### 11-5 Oscilaciones forzadas: fuerza excitadora sinusoidal

Una vez más, al tratar con fuerzas excitadoras dependientes del tiempo, consideraremos, como hicimos en el caso unidimensional estudiado en el Capítulo 4, sólo fuerzas sinusoidales e impulsoras, pues la solución para cualquier otra fuerza se puede hallar sumando las soluciones para estas fuerzas dependientes del tiempo. Además, subdividiremos nuestra explicación en los casos en que existen modos normales y en los que no existen. En esta sección consideraremos el efecto de las fuerzas excitadoras sinusoidales de la forma

$$\mathbf{F}^{(l)} = \mathbf{F}_0^{(l)} e^{i\omega t} \quad (11-54)$$

sobre la partícula  $l$  de un sistema acoplado de osciladores. Para estas fuerzas excitadoras, obtenemos las ecuaciones generalizadas de movimiento

$$\sum_j (m_{ij} \ddot{x}_j + \mu_{ij} \dot{x}_j + k_{ij} x_j) = Q_i e^{i\omega t}. \quad (11-55)$$

La magnitud de la fuerza excitadora generalizada está dada por

$$Q_i = \sum_l \mathbf{F}_0^{(l)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^{(l)}}{\partial q_i}, \quad (11-56)$$

donde  $\mathbf{F}_0^{(l)}$  especifica la amplitud, dirección y sentido de la fuerza excitadora externa que actúa sobre la partícula  $l$  del sistema.

La existencia de modos normales de vibración implica la existencia de un operador de transformación de coordenadas  $\mathbf{S}$ , que transforma el vector  $|\mathbf{M}|^{1/2} |\mathbf{x}\rangle$  en el vector  $|\mathbf{y}\rangle$ , expresado por

$$|\mathbf{y}\rangle = \mathbf{S} \mathbf{M}^{1/2} |\mathbf{x}\rangle, \quad (11-57)$$

y cuyas componentes satisfagan las ecuaciones independientes de movimiento. Esto significa que el operador de transformación  $\mathbf{S}$  diagonaliza simultáneamente los operadores  $\mathbf{M}^{-1/2} \boldsymbol{\mu} \mathbf{M}^{-1/2}$  y  $\mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2}$ , dando las ecuaciones

$$\ddot{y}_j + 2\mu_j \dot{y}_j + \omega_j^2 y_j = \mathcal{F}_j e^{i\omega t}, \quad (11-58)$$

donde

$$|\mathcal{F}\rangle = \mathbf{SM}^{-1/2} |\mathbf{Q}\rangle, \quad (11-59)$$

y  $2\mu_j$  y  $\omega_j^2$  son respectivamente los elementos diagonales de las representaciones matriciales diagonalizadas simultáneamente de los operadores  $\mathbf{M}^{-1/2} \mu \mathbf{M}^{-1/2}$  y  $\mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2}$ . Como se dijo antes, esta diagonalización simultánea sólo es posible bajo circunstancias muy especiales.

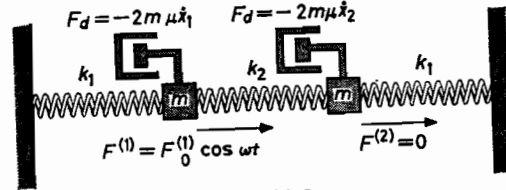


FIG. 11-3

La ecuación (11-58) es la de movimiento para un oscilador armónico forzado unidimensional. Su solución es

$$y_j = \frac{\mathcal{F}_j e^{i(\omega t - \phi_j)}}{\sqrt{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4\mu_j^2 \omega^2}}, \quad (11-60)$$

donde

$$\text{tg } \phi_j = \frac{2\mu_j \omega}{\omega_j^2 - \omega^2}. \quad (11-61)$$

El caso en que existan modos normales es, por consiguiente, el más simple, dando el resultado de que la excitación de un modo es independiente de los demás. La excitación de un modo es función de la amplitud de la fuerza generalizada,  $\mathcal{F}_j$ , y de la frecuencia de impulsión o excitación  $\omega$ . Es máxima en la frecuencia de resonancia

$$\omega_j^{\text{res}} = \sqrt{\omega_j^2 - 2\mu_j^2}. \quad (11-62)$$

► Como ejemplo, hallaremos las ecuaciones de movimiento para las coordenadas normales de la vibración forzada del primer sistema de osciladores acoplados considerado en la sección anterior. Consideremos el caso en que  $m_1 = m_2 = m$  y la primera masa sea forzada por una fuerza impulsora o excitadora sinusoidal (fig. 11-3) para la cual

$$\mathbf{F}^{(1)} = \text{Re } \mathbf{F}_0^{(1)} e^{i\omega t}, \quad \mathbf{F}^{(2)} = 0.$$

Esta fuerza da las ecuaciones de movimiento

$$\mathbf{M}|\ddot{\mathbf{x}}\rangle + \mu|\dot{\mathbf{x}}\rangle + \mathbf{K}|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{F}_0\rangle e^{i\omega t},$$

donde

$$\mathbf{M} \leftrightarrow \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mu \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2m\mu & 0 \\ 0 & 2m\mu \end{bmatrix} = 2m\mu \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{F}_0\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} F_0^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Operando sobre la ecuación de movimiento con el operador

$$\mathbf{SM}^{-1/2} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

se tienen, para las coordenadas normales

$$|\mathbf{y}\rangle = \mathbf{SM}^{1/2} |\mathbf{x}\rangle$$

o sea

$$y_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} (x_1 + x_2), \quad y_2 = \sqrt{\frac{m}{2}} (x_1 - x_2),$$

las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{y}_1 + 2\mu y_1 + \frac{k_1}{m} y_1 = \frac{F_0}{\sqrt{2m}} e^{i\omega t},$$

$$\ddot{y}_2 + 2\mu \dot{y}_2 + \frac{(k_1 + 2k_2)}{m} y_2 = \frac{F_0}{\sqrt{2m}} e^{i\omega t}.$$

Las soluciones a estas ecuaciones independientes se estudiaron en el Capítulo 4.◀

Cuando no existan modos normales, intentaremos resolver directamente la ecuación (11-55), admitiendo una solución particular de la forma

$$x_j = A_j e^{i\omega t}. \quad (11-63)$$

Para esta solución de tanteo obtenemos las ecuaciones

$$e^{i\omega t} \sum_j (-\omega^2 m_{ij} + i\omega \mu_{ij} + k_{ij}) A_j = Q_i e^{i\omega t}, \quad (11-64)$$

que se expresan, en notación con operador por

$$\mathbf{P}|\mathbf{A}\rangle = |\mathbf{Q}\rangle, \quad (11-65)$$

donde el operador  $\mathbf{P}$  es

$$\mathbf{P} = -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \boldsymbol{\mu} + \mathbf{K}. \quad (11-66)$$

Como  $\omega$  no es igual a una de las raíces, generalmente completas, de la ecuación (11-42), resulta que  $\mathbf{P}$  no es singular. Por consiguiente, existe el operador inverso  $\mathbf{P}^{-1}$ . Operando con  $\mathbf{P}^{-1}$  sobre la ecuación (11-65) encontramos la solución

$$|\mathbf{A}\rangle = \mathbf{P}^{-1}|\mathbf{Q}\rangle. \quad (11-67)$$

El inverso de un operador se explicó en la sección 10-6. En esta sección se demostró que su representación matricial contiene el valor del determinante del operador  $\mathbf{P}$  como denominador. Este valor del determinante se puede descomponer en factores. En función de las raíces de la ecuación (11-42) que son los valores de  $i\omega$  que anulan el determinante  $\det[\mathbf{P}(i\omega)]$ ,

$$\det(\mathbf{P}) = \prod_{j=1}^n (i\omega + \beta_j + i\gamma_j)(i\omega + \beta_j - i\gamma_j). \quad (11-68)$$

La solución puede, por lo tanto, desarrollarse en una suma de fracciones parciales que contengan los factores de  $\det(\mathbf{P})$  como denominadores. Esto es, la solución se puede expresar por una suma de términos que contienen las fracciones

$$\frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta_j}, \quad (11-69)$$

siendo en este caso

$$\omega_j^2 = \gamma_j^2 + \beta_j^2 = |\alpha_j|^2.$$

Una vez más, como en el caso unidimensional, advertimos la presencia de denominadores de resonancia que determinan la respuesta o reacción del sistema a las fuerzas excitadoras sinusoidales externas.

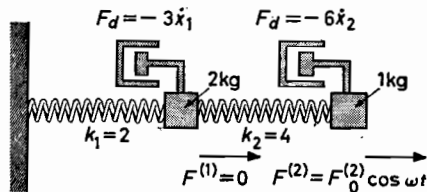


FIG. 11-4

► Como ejemplo, obtendremos la solución particular para el movimiento forzado del segundo sistema acoplado de la sección anterior, para el que no existe coordenadas normales (fig. 11-4). La aplicación de una

fuerza excitadora sinusoidal a la segunda partícula da las ecuaciones de movimiento

$$2\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 + 6x_1 - 4x_2 = 0,$$

$$\ddot{x}_2 + 6\dot{x}_2 + 4x_2 - 4x_1 = F_0^{(2)}e^{i\omega t}.$$

Suponiendo una solución de la forma

$$x_1 = Ae^{i\omega t}$$

y

$$x_2 = Be^{i\omega t},$$

obtenemos las ecuaciones simultáneas

$$(-2\omega^2 + 3i\omega + 6)A - 4B = 0$$

y

$$-4A + (-\omega^2 + 6i\omega + 4)B = F_0^{(2)}.$$

La solución de estas ecuaciones es

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ F_0^{(2)} & -\omega^2 + 6i\omega + 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2\omega^2 + 3i\omega + 6 & -4 \\ -4 & -\omega^2 + 6i\omega + 4 \end{vmatrix}},$$

y

$$B = \frac{\begin{vmatrix} -2\omega^2 + 3i\omega + 6 & 0 \\ -4 & F_0^{(2)} \end{vmatrix}}{(i\omega - \alpha_1)(i\omega - \alpha_2)(i\omega - \alpha_3)(i\omega - \alpha_4)},$$

donde las  $\alpha_i$  son los valores de  $i\omega$  que son raíces del determinante de los coeficientes de  $A$  y  $B$ . Las hallamos anteriormente como

$$\alpha_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3}, \quad \alpha_{3,4} = \frac{-11 \pm \sqrt{105}}{4}.$$

### 11-6 Oscilación forzada: fuerzas de impulso, función tensorial de Green

La solución al problema de fuerzas de impulso que actúan sobre un sistema, en el caso de que existan modos normales de vibración, se halla, una vez más, por la resolución de un sistema de ecuaciones unidimensionales de movimiento. Para la fuerza de impulso generalizada

$$\mathcal{F}_l = \delta_{lm}\delta(t - t') \quad (11-70)$$

que actúa sobre el  $m$ -ésimo modo normal [ecuación (11-58)] tenemos para las coordenadas normales las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{y}_i + 2\mu_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \delta_{im} \delta(t - t'), \quad (11-71)$$

cuya solución fue hallada en la sección 4-12. La solución del modo normal  $y_m$  para tal fuerza de impulso se denomina *función de Green* y está representada, generalmente, por el símbolo  $G_m(t|t')$ . Esto es, para la citada fuerza de impulso, la solución particular a la ecuación (11-71) es

$$y_i(t) = G_i(t|t') \delta_{im}. \quad (11-72)$$

En relación con la función de Green, la solución general, que tiene un desplazamiento igual a cero y una derivada de primer orden con respecto al tiempo nula en el instante inicial  $t = 0$ , para una fuerza excitadora generalizada dependiente del tiempo  $|Q(t)\rangle$ , está dada por

$$y_i(t) = \int_0^t G_i(t|t') \mathcal{F}_i(t') dt', \quad (11-73)$$

o sea, en notación operacional, por

$$|y\rangle = \int_0^t \mathbf{G}(t|t') \mathbf{S} \mathbf{M}^{-1/2} |Q(t')\rangle dt', \quad (11-74)$$

donde  $\mathbf{G}(t|t')$  es el operador cuya representación matricial, llamada *función tensorial de Green*, es la matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} G_1(t|t') & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_2(t|t') & 0 & & \cdot \\ 0 & 0 & G_3(t|t') & & \cdot \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & G_n(t|t') \end{bmatrix}.$$

La solución para las coordenadas del vector

$$|x\rangle = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{S}^{-1} |y\rangle$$

está dada, en notación operacional, por

$$\begin{aligned} |x\rangle &= \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{S}^{-1} |y\rangle = \int_0^t \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{G}(t|t') \mathbf{S} \mathbf{M}^{-1/2} |Q(t')\rangle dt' \\ &= \int_0^t \bar{\mathbf{G}}(t|t') |Q(t')\rangle dt', \end{aligned} \quad (11-75)$$

donde el operador

$$\bar{\mathbf{G}}(t|t') = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{G}(t|t') \mathbf{S} \mathbf{M}^{-1/2} \quad (11-76)$$

tiene una representación matricial que comprende elementos de la matriz fuera de la diagonal. Esto es

$$\bar{\mathbf{G}}(t|t') \leftrightarrow \begin{bmatrix} \bar{G}_{11}(t|t') & \bar{G}_{12}(t|t') & \dots \\ \bar{G}_{21}(t|t') & \bar{G}_{22}(t|t') & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (11-77)$$

donde

$$\bar{G}_{ij}(t|t') = \sum_{klm} M_{ik}^{-1/2} S_{kl}^{-1} G_l(t|t') S_{lm} M_{mj}^{-1/2}. \quad (11-78)$$

Si no existen coordenadas normales, la solución para una fuerza impulsora puede hallarse desarrollándola en una integral de Fourier (una serie de Fourier que contiene todas las frecuencias) y usando los resultados de la sección anterior y el principio de superposición aplicable a las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales.

La integral de Fourier para la función delta de Dirac se halla fácilmente. Proseguiremos con la demostración de que

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega. \quad (11-79)$$

Para obtener esta expresión, desarrollamos la función delta entre los tiempos  $-\tau$  y  $\tau$  en una serie de Fourier, y luego hallamos su límite cuando  $\tau$  se hace muy grande. Vemos que si ponemos

$$\delta(t - t') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{\tau},$$

debemos tener

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\tau}, \\ a_n &= \frac{1}{\tau} \cos \frac{n\pi t'}{\tau}, \quad n \neq 0, \\ b_n &= \frac{1}{\tau} \sin \frac{n\pi t'}{\tau}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, para un instante  $t$  entre los tiempos  $-\tau$  y  $\tau$ , podemos establecer

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tau} \cos \frac{n\pi(t-t')}{\tau} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(n\pi/\tau)(t-t')}}{\tau}. \quad (11-80)$$

En el límite, cuando  $\tau$  tiende a infinito, y haciendo

$$\omega_n = \frac{n\pi}{\tau}, \quad \Delta\omega = \frac{\pi}{\tau},$$

hallamos que realmente

$$\begin{aligned} \delta(t - t') &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n(t-t')} \Delta\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega. \end{aligned} \quad (11-81)$$

Utilizando la ecuación (11-80), el desarrollo en serie Fourier de la función delta de Dirac entre los tiempos  $-\tau$  y  $\tau$ , obtenemos para la fuerza generalizada

$$Q_j = \delta_{jl} \delta(t - t') \tag{11-82}$$

las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \sum_j m_{ij} \ddot{x}_j^{(l)} + \mu_{ij} \dot{x}_j^{(l)} + k_{ij} x_j^{(l)} &= \delta_{il} \delta(t - t') \\ &= \delta_{il} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\tau} e^{i(n\pi/\tau)(t-t')} \end{aligned} \tag{11-83}$$

Usando (11-67) la solución a este sistema de ecuaciones simultáneas está dada por

$$x_j^{(l)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\tau} e^{i(n\pi/\tau)(t-t')} P_{jl}^{-1} \left( \frac{in\pi}{\tau} \right) \tag{11-84}$$

Haciendo

$$x_j^{(l)} = \bar{G}_{jl}(t|t'),$$

hallamos que en el límite, cuando  $\tau$  se aproxime a infinito, podemos escribir

$$\bar{G}_{jl}(t|t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} P_{jl}^{-1}(i\omega) d\omega, \tag{11-85}$$

donde  $\bar{G}_{jl}(t|t')$  es el elemento  $jl$  de la matriz de la función de Green, llamada función tensorial de Green. Esta es la representación matricial del operador de la función de Green  $\bar{G}(t|t')$ . En función de este operador, la solución que tiene un desplazamiento inicial y una velocidad inicial nulos para una fuerza generalizada dependiente del tiempo  $|Q(t)\rangle$ , puede demostrarse que se expresa por

$$|x(t)\rangle = \int_{t_0}^t \bar{G}(t|t') |Q(t')\rangle dt'. \tag{11-86}$$

### 11-7 Teoría de las perturbaciones

La descripción física del movimiento de un sistema en función de sus modos normales es tanto más simple que el caso en que no existen modos normales que se intenta expresar las soluciones de este caso en el lenguaje de los modos normales. Esto puede resultar si las ecuaciones de movimiento se pueden expresar

$$\left( M^{(0)} \frac{d^2}{dt^2} + \mu^{(0)} \frac{d}{dt} + K^{(0)} \right) |x\rangle = \left( M^{(1)} \frac{d^2}{dt^2} + \mu^{(1)} \frac{d}{dt} + K^{(1)} \right) |x\rangle, \tag{11-87}$$

donde  $M^{(0)-1/2} \mu^{(0)} M^{(0)-1/2}$  y  $M^{(0)-1/2} K^{(0)} M^{(0)-1/2}$  son operadores conmutativos que se pueden diagonalizar simultáneamente, y

$$M^{(1)} = M - M^{(0)}, \tag{11-88}$$

$$\mu^{(1)} = \mu - \mu^{(0)}, \tag{11-89}$$

$$K^{(1)} = K - K^{(0)} \tag{11-90}$$

son operadores pequeños tales que los términos del segundo miembro de (11-87) pueden tomarse como pequeñas perturbaciones del sistema cuyo movimiento está dado por

$$\left( M^{(0)} \frac{d^2}{dt^2} + \mu^{(0)} \frac{d}{dt} + K^{(0)} \right) |x^{(0)}\rangle = 0. \tag{11-91}$$

Representemos por  $\mathcal{L}^{(0)}$  el operador cuya representación matricial diagonal tiene los elementos

$$\mathcal{L}_{ij}^{(0)} = \left( \frac{d^2}{dt^2} + 2\mu_i \frac{d}{dt} + \omega_i^2 \right) \delta_{ij}, \tag{11-92}$$

donde  $2\mu_i$  y  $\omega_i^2$  son los elementos diagonales de las representaciones matriciales diagonales de los operadores  $M^{(0)-1/2} \mu^{(0)} M^{(0)-1/2}$  y  $M^{(0)-1/2} K^{(0)} M^{(0)-1/2}$ . Por lo tanto,  $\mathcal{L}^{(0)}$  operando sobre el vector de modo normal  $|y^{(0)}\rangle = SM^{(0)1/2}|x^{(0)}\rangle$  da, para el sistema no perturbado, la ecuación de modo normal

$$\mathcal{L}^{(0)} |y^{(0)}\rangle = 0 \tag{11-93}$$

para la ecuación (11-91).

El sistema perturbado satisface las ecuaciones

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + 2\mu_i \frac{d}{dt} + \omega_i^2 \right) y_i = \sum_j \left( \bar{m}_{ij} \frac{d^2}{dt^2} + \bar{\mu}_{ij} \frac{d}{dt} + \bar{k}_{ij} \right) y_j. \tag{11-94}$$

En notación operacional estas ecuaciones se expresan por

$$\mathcal{L}^{(0)} |y\rangle = \mathcal{L}^{(1)} |y\rangle. \tag{11-95}$$

La solución de esta ecuación operacional se puede expresar en función del operador de la función de Green considerando el segundo miembro de (11-94) como no homogéneo. Así hallamos que la solución particular se expresa formalmente por

$$|y\rangle = \int_{t_0}^t G(t|t') \mathcal{L}^{(1)} |y(t')\rangle dt'. \tag{11-96}$$

La ecuación (11-96) es una ecuación integral que podemos intentar resolver por un método iterativo (sección 4-14). Si éste resulta, da la misma solución que el de aproximación sucesivas aplicado a las ecuaciones diferenciales originales.

Observaremos que la ecuación (11-94) se puede generalizar para que incluya la perturbación del sistema debida a pequeños términos no lineales en  $y_j$  y  $\dot{y}_j$ .

Así, por ejemplo, si la ecuación (11-95) toma la forma no lineal

$$\sum_j \mathcal{L}_{ij}^{(0)} y_j = \sum_j \mathcal{L}_{ij}^{(1)} y_j + \sum_{jk} \mathcal{L}_{ijk}^{(2)} y_j y_k + \dots, \tag{11-97}$$

la solución se expresa formalmente por

$$y_i(t) = \int_{t_0}^t G_i(t|t') \left[ \sum_j \mathcal{L}_{ij}^{(1)} y_j(t') + \sum_{jk} \mathcal{L}_{ijk}^{(2)} y_j(t') y_k(t') + \dots \right]. \tag{11-98}$$

Es conveniente observar que el método iterativo no resultará bien a menos que las fuerzas de amortiguamiento sean muy pequeñas, de modo que todos los términos de amortiguación puedan tomarse como pequeñas perturbaciones, esto es,  $\mu^0 = 0$ .

**Problemas**

11-1. a) Una masa  $m$  está sometida a una fuerza conservativa cuya energía potencial es

$$U = U_0 \exp \frac{1}{a^2} [5x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz - 7ya - 3za],$$

donde  $U_0$  y  $a$  son constantes positivas. Demuéstrese que  $U$  tiene un punto mínimo, y hállese las frecuencias normales de vibración con respecto a este mínimo.

b) Si la masa está sometida a una fuerza adicional cuyas componentes son

$$F_x = F_y = F_z = Be^{-bt},$$

¿Cuál es su movimiento con respecto al punto de equilibrio?

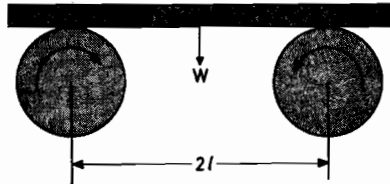


FIG. 11-5

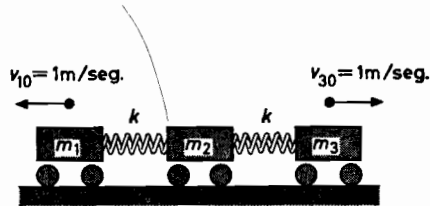


FIG. 11-6

11-2. Una barra de peso  $W$  descansa sobre dos ruedas cuyos centros están a una distancia  $2l$  y las cuales se mueven en sentidos contrarios con las mismas velocidades angulares constantes  $\omega$ , como se indica en la figura 11-5. El coeficiente de rozamiento entre las ruedas y la barra es  $\mu$ . La barra se pone en movimiento a partir del equilibrio por un leve empujón que le da una velocidad inicial  $v_0$ . Hállese y resuélvase la ecuación diferencial para su movimiento subsiguiente.

11-3. Una masa  $m$  cuelga del extremo de un resorte cuya constante de fuerza es  $k$  y cuya masa por unidad de longitud es  $\lambda$ . La longitud natural del resorte (o sin carga) es  $l$ . Cada punto del resorte oscila verticalmente una distancia proporcional a la distancia natural del punto al soporte fijo.

a) Hállese la energía cinética del sistema, incluyendo la masa del resorte.

b) Escríbase la ecuación de movimiento de Lagrange, resuélvasela, y demuéstrese que el período de oscilación es

$$\tau = 2\pi \sqrt{(3m + \lambda l)/3k}.$$

11-4. La configuración de equilibrio de una molécula está representada por tres átomos de igual masa en los vértices de un triángulo rectángulo isósceles, conectados por resortes de igual constante de fuerza. Hállese el determinante secular cuyas raíces son frecuencias normales de vibración en el plano, y demuéstrese que la ecuación secular tiene la raíz triple  $\omega = 0$ . Determinéense las frecuencias de vibración libre no nulas [Sugerencia: este problema tiene simetría de reflexión con respecto a la altura sobre la hipotenusa.]

11-5. Considerando el sistema de tres masas de la figura 11-6: a) escribir las ecuaciones diferenciales del movimiento. b) Si  $m_1 = 1 \text{ Kg}$ ,  $m_2 = 3 \text{ Kg}$ ,  $m_3 = 2 \text{ Kg}$  y  $k = 6\text{n/m}$ , hállese las frecuencias naturales del sistema. c) Para las condiciones iniciales de los resortes sin estirar, el centro de masa  $m_2$  estacionario y las masas de los extremos moviéndose, como se indica a una velocidad  $v_{i0} = 1 \text{ m/seg.}$ , encontrar la expresión para el movimiento de la masa  $m_2$  en función del tiempo.

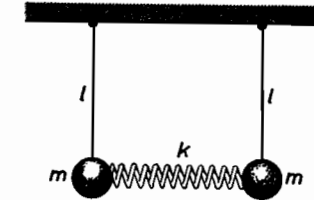


FIG. 11-7

11-6. Demuéstrese que la energía total de un sistema con tres grados de libertad, que oscila respecto a su configuración de equilibrio, es igual a la suma de las energías de sus modos principales de oscilación. Demostrar que el promedio respecto al tiempo de la energía cinética de un modo principal de oscilación es igual al promedio de su energía potencial cuando los promedios se toman durante un intervalo grande de tiempo.

11-7. Hágase el problema 6-15 e).

11-8. Háganse los problemas 6-16 y 6-17.

11-9. Hágase el problema 6-19.

11-10. Dedúzcanse las ecuaciones de movimiento de los dos péndulos simples conectados por un resorte lineal relativamente ligero, como se indica en la figura 11-7. Admítase que el movimiento sólo tiene lugar en el plano del dibujo, y calcúlense las frecuencias naturales de vibración para pequeños desplazamientos a partir del equilibrio, que caracterizan este sistema.

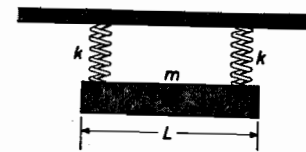


FIG. 11-8

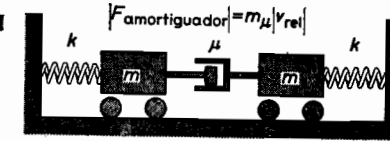


FIG. 11-9

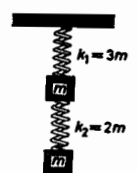


FIG. 11-10

11-11. Dedúzcanse y resuélvase las ecuaciones diferenciales del movimiento de una barra rígida uniforme, de longitud  $L$ , soportada elásticamente como se ve en la figura 11-8. Considérese únicamente el movimiento en el plano del dibujo.

11-12. Dos masas iguales, sobre una superficie sin rozamiento, están conectadas por un amortiguador viscoso y refrenadas por un resorte, como se ve en la figura 11-9. Hállese el movimiento del sistema, que parte del reposo con la masa de la izquierda desplazada inicialmente en una distancia  $x_{10}$  de su posición de equilibrio y con la

otra masa en su posición de equilibrio. Considérese únicamente un movimiento rectilíneo simple.

11-13. El sistema a base de masas y resortes ilustrado en la figura 11-10 puede moverse libremente sólo linealmente en la dirección vertical. Cuando el sistema está en equilibrio estático bajo la acción de la gravedad, los resortes tienen, por supuesto, cierta tensión (o tracción). Supóngase que la masa más baja se levanta hasta que el resorte inferior quede sin tensión, y luego se suelta esta masa repentinamente, ¿cuál será la expresión para el movimiento subsiguiente de la masa más alta? (Nota: Defínase los orígenes de sus coordenadas cuidadosamente.)

11-14. Las masas ilustradas en la figura 8-10 están acopladas por medio de un amortiguador, como se ve en la figura 11-11. La masa del lado izquierdo es impulsada por una fuerza

$$F = F_0 \cos \omega t.$$

Los desplazamientos a partir de la posición de equilibrio son  $x_1$  y  $x_2$ .

a) Obtener las expresiones de la energía cinética y la energía potencial del sistema.

b) Suponiendo que las fuerzas amortiguadoras sean proporcionales a la diferencia en velocidad entre las dos masas, establézcanse las ecuaciones de movimiento para  $x_1$  y  $x_2$ . Hállese la ecuación característica y resuélvase para las frecuencias de vibración libre. ¿Cómo se pueden comparar estas frecuencias con las del movimiento no amortiguado?

c) Hállese el movimiento de estado estacionario del sistema bajo la acción de la fuerza  $F = F_0 \cos \omega t$  que actúa en la masa del lado izquierdo como se muestra.

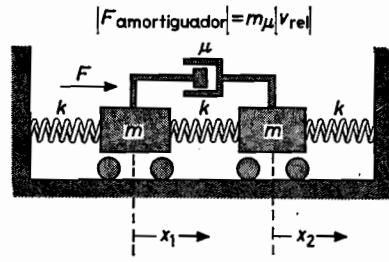


FIG. 11-11

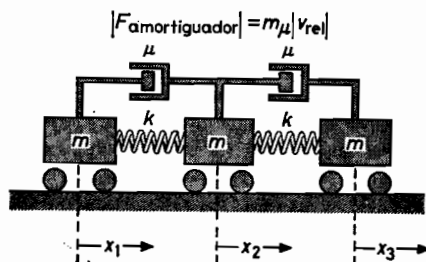


FIG. 11-12

11-15. Tres masas iguales están conectadas por resortes, como se ve en la figura 11-12, con amortiguadores, de coeficientes  $\mu$ , entre ellas.

a) Establecer las expresiones de  $T$  y  $U$  para este sistema y hallar las ecuaciones de movimiento.

b) Utilizando soluciones de tanteo de la forma  $x_1 = Ae^{\lambda t}$ ,  $x_2 = Be^{\lambda t}$  y  $x_3 = Ce^{\lambda t}$ , hállese la ecuación característica del sistema.

c) Demostrar que la ecuación característica puede ponerse en la forma

$$m\lambda^2(m\lambda^2 + m\mu\lambda + k)(m\lambda^2 + 3m\mu\lambda + 3k) = 0.$$

Si este sistema ha de tener movimiento no oscilatorio, el discriminante de cada uno de los dos últimos factores cuadráticos debe ser  $\geq 0$ . Demuéstrese que  $\mu \geq 2\sqrt{k/m}$  satisfará la condición para movimiento no oscilatorio.

11-16. En la figura 11-13, las cuatro masas se mueven únicamente a lo largo de una línea recta horizontal bajo la acción de cuatro resortes idénticos de constante de elasticidad (o de fuerza)  $k$  y de un resorte débil de constante  $k' \ll k$ . Encontrar una solución aproximada, hasta el primer orden de  $k'$ , para los modos normales de vibración del sistema.

11-17. Háganse los problemas 8-21 y 8-22.

11-18. Háganse los problemas 8-23 y 8-24.

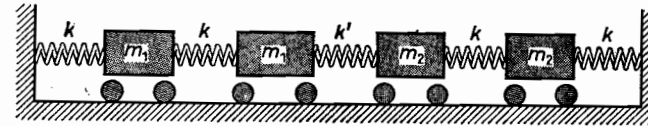


FIG. 11-13

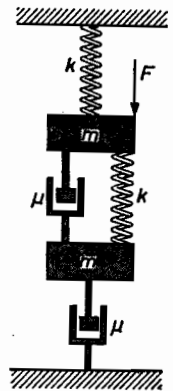


FIG. 11-14

11-19. Dedúzcase y hállese la solución de estado estacionario de las ecuaciones del movimiento vertical del sistema mostrado en la figura 11-14. Defínase cuidadosamente los orígenes de sus dos coordenadas. La fuerza aplicada es  $F = F_0(1 - e^{-t})$ .

11-20. Un péndulo triple se forma suspendiendo una masa,  $M$ , de un hilo de longitud  $l$  desde un soporte fijo. De  $M$  se cuelga otra masa  $m$  por un hilo de longitud  $l$ , y de esta segunda masa se cuelga otra tercera masa  $m$  también por un tercer hilo de longitud  $l$ . Las masas se balancean en un solo plano vertical. Establézcanse las ecuaciones para pequeñas oscilaciones del sistema, empleando como coordenadas los ángulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  formados por los tres hilos con la vertical. Demuéstrese que si  $M \gg m$ , las coordenadas normales se pueden hallar fácilmente si se desprecian

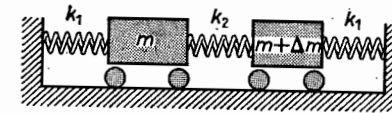


FIG. 11-15

los términos de orden  $(m/M)^{1/2}$ . Hállese las frecuencias normales aproximadas al orden  $m/M$ .

11-21. Obtener una estimación de primer orden en  $\Delta m/m$  para las frecuencias normales de vibración del sistema de masas mostrado en la figura 11-15.

11-22. Obtener una estimación de primer orden en  $\Delta k/k$  para las frecuencias de resonancia del sistema de partículas representado en la figura 11-16.

11-23. La configuración de equilibrio de una molécula  $X_3$  está representada por tres átomos de igual masa situados en los vértices de un triángulo equilátero y conectados por resortes de la misma constante elástica (fig. 11-17).

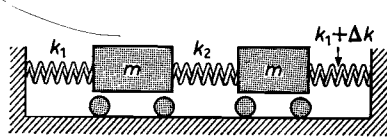


FIG. 11-16

a) Utilizando las coordenadas generalizadas que se indican, hállese la lagrangiana del sistema de partículas.

b) Demuéstrese que la lagrangiana es invariante bajo las seis operaciones  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, R(2\pi/3)$  y  $R(4\pi/3)$ , donde  $\sigma_i$  indica una reflexión alrededor de una altura del triángulo formado por las partículas y  $R(\phi)$  designa una rotación alrededor del eje perpendicular al triángulo y que pasa por su centro.

c) Demuéstrese que las seis operaciones de la parte b) no son conmutativas.

d) Hállese la representación matricial  $6 \times 6$  de las operaciones conmutativas

$$O_1 = R\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ y } O_2 = R\left(\frac{4\pi}{3}\right).$$

Estas matrices, cuando operan sobre la matriz columna de seis elementos  $(r)$  cuyos elementos representan en sucesión las coordenadas del sistema y cuya transpuesta es

$$(\tilde{r}) = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6],$$

dan los nuevos valores de las coordenadas de las partículas.

e) Obténganse las representaciones matriciales de los vectores propios simultáneos de los dos operadores conmutativos de la parte d) y la matriz de transformación que diagonaliza simultáneamente sus representaciones matriciales conmutativas.

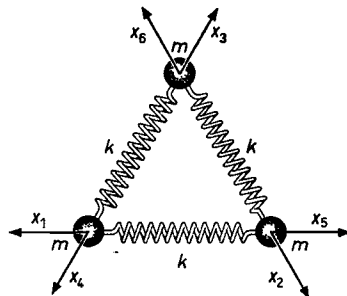


FIG. 11-17

f) Exprésese el vector hexadimensional  $|r\rangle$  por una suma lineal de los vectores propios hallados en la parte e) y demuéstrese que la lagrangiana expresada en función de los vectores propios de  $O_1$  y  $O_2$  de las ecuaciones de movimiento más simples.

g) Obténganse las frecuencias normales de vibración del sistema.

12

## Propagación de ondas a lo largo de una cuerda

En este capítulo consideraremos el comportamiento dinámico de una cuerda tensada. Para pequeños desplazamientos de la posición de equilibrio de la cuerda veremos que la descripción cinemática de pequeñas porciones de la misma, con respecto a su posición de equilibrio, está representada por la propagación de una onda transversal a lo largo de la cuerda. Después nos familiarizaremos con las características más sobresalientes de los movimientos ondulatorios, tales como reflexión, transmisión, interferencia y la polarización de ondas transversales considerando cierta cantidad de problemas en los que intervengan discontinuidades en la densidad de la cuerda y restricciones en el movimiento de algunos de sus puntos. Estas son características que se relacionan con cualquier movimiento ondulatorio y no sólo con el movimiento de ondas a lo largo de una cuerda.

Al limitarnos al movimiento de ondas sobre una cuerda, nos estamos refiriendo al caso más simple: la propagación unidimensional de una onda. Sin embargo, esta limitación no disminuye la importancia y aplicación general de nuestro estudio. Las ondas planas unidimensionales son buenas aproximaciones para todas las ondas a grandes distancias de la fuente que las produce. Concretándonos al movimiento unidimensional de ondas tenemos la ventaja de poder estudiar las características importantes del movimiento ondulatorio sin el embarazo de las dificultades matemáticas.

### 12-1 Representación matemática de ondas planas, el principio de superposición, ecuaciones de onda

En esta sección, obtendremos de una manera general la dependencia matemática formal de las coordenadas y el tiempo de una cantidad física,  $\Psi$ , que se observa se propaga con una velocidad  $v$  en una dirección dada.



Consideremos, por ejemplo, una cuerda tensada muy larga, uno de cuyos extremos ha sido desplazado momentáneamente de su posición de equilibrio en el instante  $t = 0$ . Las formas que va tomando la cuerda a intervalos periódicos de tiempo revelarán, si no hay disipación de energía, una situación como la representada en la figura 12-1. Esto es, la forma de la

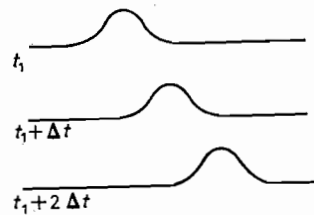


FIG. 12-1

cuerda al cabo de un tiempo  $t_2$ , que muestra los desplazamientos de los puntos de la cuerda como una función de la posición en ese tiempo, parecerá que es igual a la de un tiempo anterior,  $t_1$ , con la cuerda aparentemente desplazada hacia la derecha (fig. 12-2) una distancia

$$d = v(t_2 - t_1).$$

Matemáticamente esto se expresa por

$$\Psi = \Psi(z - vt), \tag{12-1}$$

donde  $\Psi$  representa el desplazamiento de cuerda a partir de su posición de equilibrio.

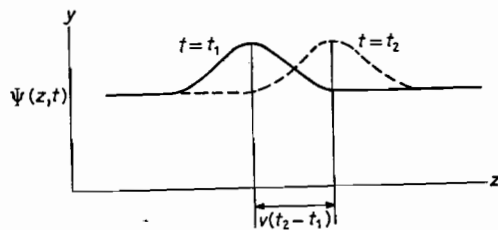


FIG. 12-2

De la misma manera, se halla que una perturbación en la cuerda que se propague hacia la izquierda (dirección decreciente de  $z$ ) con la misma velocidad, se expresa matemáticamente por la ecuación

$$\Psi = \Psi(z + vt). \tag{12-2}$$

Las ecuaciones (12-1) y (12-2) describen generalmente la propagación de una onda en la dirección creciente o decreciente de  $z$  en un medio en que no hay ni disipación ni dispersión. En este caso,  $\Psi$  podría representar igualmente bien: la magnitud del vector eléctrico de una onda electromagnética polarizada plana; la presión en un medio a través del cual se propaga una onda sonora; o la amplitud de probabilidad de una onda de materia a partir de la cual se puede determinar la probabilidad de que una partícula se encuentre dentro de un volumen dado del espacio.

Hay una condición adicional, el principio de superposición, que necesitaremos que satisfaga la cantidad física que se propaga. El principio de superposición establece que si dos ondas independientes se propagan simultáneamente por un medio, entonces la cantidad física resultante en un punto es la suma lineal de las dos ondas

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2. \tag{12-3}$$

Esta condición sólo es satisfecha por las soluciones a ecuaciones diferenciales parciales lineales. Con esto, quedamos restringidos a ondas cuya ecuación sea una diferencial parcial lineal. Una onda de choque es un ejemplo de onda que no satisface el principio de superposición.

Existen muchas ecuaciones diferenciales parciales lineales cuyas soluciones son funciones que tienen la forma de las ecuaciones (12-1) y (12-2). Por ejemplo, vemos que la función

$$\Psi = \Psi(z \pm vt) \tag{12-4}$$

satisface cualquiera de las ecuaciones de onda siguientes

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \pm \frac{1}{v} \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^4} = \frac{1}{v^4} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial t^4}.$$

Las funciones específicas de  $z \pm vt$  satisfacen ecuaciones de onda aún más complicadas. En la próxima sección demostraremos que la ecuación, que se presenta muy frecuentemente,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{12-5}$$

es la de onda satisfecha por ondas que se propagan en una cuerda que vibra.

Surge la cuestión sobre si las funciones de la forma dada por la ecuación (12-4) son las únicas soluciones posibles de la ecuación (12-5). Se puede comprobar que lo son haciendo la transformación de coordenadas

$$\xi_1 = z + vt \quad \text{y} \quad \xi_2 = z - vt$$

o sea,

$$z = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) \quad \text{y} \quad vt = \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2).$$

Esta transformación da

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_2^2}$$

y

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_2^2}$$

o sea,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = 0.$$

Las soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = 0$$

se pueden expresar sólo como la suma lineal de una función  $\Psi_1(\xi_1)$  de  $\xi_1$  únicamente y una función  $\Psi_2(\xi_2)$  de  $\xi_2$  únicamente. Esto es

$$\Psi = \Psi_1(\xi_1) + \Psi_2(\xi_2) = \Psi_1(z + vt) + \Psi_2(z - vt).$$

### 12-2 Ecuación de onda de la cuerda vibrante

Para hallar la ecuación de onda de una cuerda vibrante tensada, concentraremos nuestra atención en una pequeña parte de la cuerda (fig. 12-3). Supondremos que la posición horizontal de ésta sobre el eje  $z$  es su posición de equilibrio. Observaremos que al hacer esta suposición despreciamos el efecto de la gravedad sobre la cuerda. En otras palabras, suponemos que la tensión en el cable es suficientemente grande como para hacer despreciable el efecto de la gravedad.

Considérese ahora que una parte infinitesimal de la cuerda, de longitud  $\Delta z$ , se desplaza en el plano vertical una pequeña cantidad, a partir de su posición de equilibrio, sobre el eje  $z$  horizontal.

Las fuerzas que actúan en esta pequeña parte son las tracciones  $T(z)$  y  $T(z + \Delta z)$ , como se indica en la figura 12-3. Estas fuerzas actúan en los dos puntos extremos de la pequeña pieza de cuerda, puntos cuyas proyecciones sobre el eje  $z$  tienen las coordenadas  $z$  y  $z + \Delta z$ . La fuerza resultante

sobre esta parte de cuerda tiene una componente vertical y otra horizontal, las cuales están dadas por

$$R_{\text{horizontal}} = T(z + \Delta z) \cos \theta(z + \Delta z) - T(z) \cos \theta(z)$$

y

$$R_{\text{vertical}} = T(z + \Delta z) \text{sen } \theta(z + \Delta z) - T(z) \text{sen } \theta(z).$$

Para pequeños desplazamientos,  $\Psi$ , del equilibrio, el ángulo  $\theta$  que forma la tangente a la cuerda en un punto con el eje  $z$  será igualmente pequeño. Nos limitaremos a desplazamientos pequeños que nos permitan considerar como

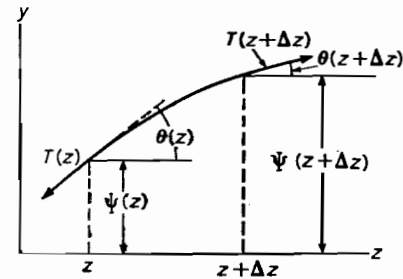


FIG. 12-3

valor aproximado del seno de los ángulos que intervengan su tangente y como el del coseno la unidad. Para esta aproximación y la suposición de que para tales desplazamientos la tensión (o tracción) en la cuerda no varía apreciablemente de un punto a otro, podemos poner

$$T(z + \Delta z) = T(z) = T,$$

de donde deducimos que

$$R_{\text{horizontal}} = 0,$$

y

$$R_{\text{vertical}} = T[\text{tg } \theta(z + \Delta z) - \text{tg } \theta(z)] = T \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial z} = T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \Delta z. \quad (12-6)$$

Por la ley de movimiento de Newton esto da la ecuación de movimiento

$$T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \Delta z = m \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (12-7)$$

La masa  $m$  de la pequeña pieza de cuerda, dentro de la misma aproximación, está dada por

$$m = \mu \Delta z, \quad (12-8)$$

donde  $\mu$  es la densidad lineal de la cuerda. La ecuación de movimiento de Newton para dicha pieza es, por consiguiente, la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad (12-9)$$

donde

$$v^2 = \frac{T}{\mu}. \quad (12-10)$$

De nuestra exposición en la sección anterior, vemos que el movimiento de la cuerda en su conjunto se puede expresar, en consecuencia, por la superposición de soluciones de la forma

$$\Psi = \Psi(z \pm vt),$$

que se propagan todas con la misma velocidad

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

La dependencia funcional concreta del desplazamiento  $\Psi$  con respecto a la variable de posición  $z$  y el tiempo  $t$  está, como veremos, determinada por el desplazamiento y la velocidad de la cuerda en función de  $z$  en cierto instante inicial,  $t_0$ .

Por ahora, consideraremos la propagación de ondas armónicas, a lo largo de la cuerda, que tienen la forma funcional

$$\Psi = A \cos [k(z \pm vt) + \phi]. \quad (12-11)$$

Su importancia radica en el hecho de que cualquier función de  $z$  y  $t$  que describa la propagación de una onda a lo largo de la cuerda, se puede expresar como una suma lineal de dichas ondas armónicas. Por lo tanto, por el principio de superposición, cualquier movimiento vibratorio complicado de la cuerda puede analizarse por consideraciones independientes de las ondas armónicas independientes que describen su movimiento.

### 12-3 Ondas armónicas

Con mucho, la onda más simple es una armónica de la forma

$$\Psi = A \cos [k(z \pm vt) + \phi], \quad (12-12)$$

donde  $k$  es una constante denominada *número de onda*. Dimensionalmente ha de expresarse en radianes por unidad de longitud, para que  $k(z \pm vt)$

tenga la dimensión de radianes. Por consiguiente, será conveniente expresar  $k$  por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (12-13)$$

donde  $\lambda$  tiene dimensión de longitud y se llama *longitud de onda* de la onda armónica. El desplazamiento de la cuerda, en función de la longitud de onda, está dado por

$$\Psi(z, t) = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{z}{\lambda} \pm \frac{v}{\lambda} t \right) + \phi \right]. \quad (12-14)$$

La relación  $v/\lambda$  se conoce como *frecuencia* de la onda,

$$v = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{\tau}. \quad (12-15)$$

Luego podemos expresar una onda armónica, también, en las formas siguientes

$$\Psi = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{z}{\lambda} \pm \frac{t}{\tau} \right) + \phi \right], \quad (12-16)$$

y

$$\Psi = A \cos (kz \pm \omega t + \phi),$$

donde

$$\omega = 2\pi v. \quad (12-17)$$

A la frecuencia angular,  $\omega$ , de la onda se acostumbra también llamarla simplemente *frecuencia*.

Al tratar con ondas armónicas es más simple, algebraicamente, considerarlas como una superposición de ondas armónicas complejas

$$\psi = A e^{i\omega t} e^{\pm i(kz + \phi)} \quad (12-18)$$

y de sus complejas conjugadas, que son matemáticamente independientes linealmente. Sin embargo, como los desplazamientos de la cuerda siempre serán cantidades reales, podemos economizar nuestras fórmulas y consideraciones, concentrándonos únicamente en las ondas complejas dadas por la ecuación (12-18). Se debe deducir que las ondas

$$\psi = B e^{-i\omega t} e^{\pm i(kz + \phi)},$$

que son las complejas conjugadas de las ondas armónicas complejas de la ecuación (12-18) y que deberán aparecer también en cualquier solución general, deben tener, necesariamente, una amplitud

$$B = A^*.$$

Por consiguiente, sólo consideraremos las ondas armónicas complejas expresadas por la ecuación (12-18) que tiene el factor exponencial de tiempo,  $e^{+i\omega t}$ .

Se entenderá, por lo tanto, que la onda armónica compleja

$$\psi = Ae^{i(kx+\phi)}e^{i\omega t} \quad (12-19)$$

representa la onda armónica real

$$\Psi = \text{Re } \psi = A \cos(kz + \omega t + \phi)$$

que avanza en el sentido negativo de  $z$ ; y que la onda armónica compleja

$$\psi = Ae^{-i(kx+\phi)}e^{i\omega t} \quad (12-20)$$

representa la armónica real

$$\Psi = \text{Re } \psi = A \cos(kz - \omega t + \phi)$$

que avanza en el sentido creciente de  $z$ .

#### 12-4 Flujo de energía en una onda armónica

Las ondas transmiten energía; por consiguiente, conviene analizar la media que transmite una onda armónica por unidad de tiempo. Para hallar este flujo de energía por unidad de tiempo consideraremos la energía total por longitud de onda de la cuerda que se transmite a lo largo de ésta con una velocidad  $v$ . La energía total de la cuerda contiene una parte cinética y otra potencial. La energía cinética de una parte pequeña,  $\Delta z$ , que oscila en la dirección vertical está dada por

$$E.C. = \frac{1}{2} (\mu \Delta z) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2. \quad (12-21)$$

La energía potencial de la cuerda se puede hallar determinando el trabajo que se realizaría al desplazarla de su posición de equilibrio. El trabajo efectuado sobre una pequeña parte está dado por

$$W = \int_0^{\Delta z} R_{\text{vertical}} d\Psi = \Delta z \int_0^{\Delta z} T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} d\Psi$$

o para una onda armónica en la que  $(\partial^2 \Psi / \partial z^2) = -k^2 \Psi$ , por:

$$W = \Delta z \int_0^{\Delta z} -Tk^2 \Psi d\Psi = -\frac{1}{2} Tk^2 \Psi^2 \Delta z. \quad (12-22)$$

La energía potencial, que es el negativo de este trabajo, está dada por

$$U = \frac{1}{2} Tk^2 \Psi^2 \Delta z. \quad (12-23)$$

Además,

$$Tk^2 = \mu v^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = \mu \omega^2,$$

donde para la onda armónica

$$\Psi = A \cos k(z \pm vt)$$

la energía media por unidad de longitud de la cuerda se halla que es

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \sin^2 k(z \pm vt) + \frac{1}{2} Tk^2 A^2 \cos^2 k(z \pm vt) \\ &= \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2. \end{aligned} \quad (12-24)$$

Habiendo hallado la energía media por unidad de longitud de la cuerda, es cuestión simple obtener el flujo medio de energía por unidad de tiempo en la dirección  $z$ . Como toda la energía de una parte pequeña de la cuerda de longitud  $v \times 1$  pasará por un punto dado en la unidad de tiempo, resulta que el flujo medio de energía,  $S$ , que pasa por un punto dado en la dirección de propagación de la onda, está dado por

$$S = \frac{dE}{dt} = v\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v = \frac{1}{2} T \omega k A^2. \quad (12-25)$$

#### 12-5 Polarización

Hasta ahora en nuestra exposición hemos limitado el movimiento vibratorio de la cuerda al que tiene lugar en el plano vertical. Sin embargo, bajo circunstancias ordinarias, una cuerda tensada puede oscilar, igualmente bien, en un plano horizontal como en cualquier otro. Se pueden imaginar modos de vibración más complicados. Cualquiera que sea la oscilación que efectúe la cuerda, el desplazamiento de un punto de ella en el plano  $xy$  está determinado por sus componentes sobre la dirección horizontal  $x$  y sobre la dirección vertical  $y$ . Para desplazamientos pequeños a partir de la posición de equilibrio obtenemos, ahora, las dos ecuaciones de movimiento

$$R_y = \mu \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2} \Delta z \quad \text{y} \quad R_x = \mu \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} \Delta z, \quad (12-26)$$

donde  $\Psi_x$  y  $\Psi_y$  son las componentes  $x$  y  $y$  del desplazamiento de los puntos de la cuerda. Se ve que las fuerzas resultantes en estas dos direcciones,  $x$  y  $y$ , son

$$R_x = T \Delta \left( \frac{\partial \Psi_x}{\partial s} \right) \quad \text{y} \quad R_y = T \Delta \left( \frac{\partial \Psi_y}{\partial s} \right).$$

Para un desplazamiento pequeño del equilibrio, para el cual, como antes suponemos que  $\Delta s$  se puede sustituir por  $\Delta z$ , etc., obtenemos

$$R_x = T \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial z^2} \Delta z \quad \text{y} \quad R_y = T \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial z^2} \Delta z.$$

Que nos da las dos ecuaciones de onda independientes

$$\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2} = 0. \quad (12-27)$$

La solución más general que describe el movimiento vibratorio de la cuerda, está dada, por lo tanto, por el vector de desplazamiento transversal

$$\Psi(z, t) = \Psi_x(z, t)\mathbf{i} + \Psi_y(z, t)\mathbf{j}, \quad (12-28)$$

donde  $\Psi_x$  y  $\Psi_y$  son las soluciones a las ecuaciones de onda de dos componentes de la cuerda. Las soluciones que describen el desplazamiento de la cuerda en el plano vertical o en el horizontal, o bien si fuera el caso, en cualquier otro plano, se llaman soluciones *polarizadas planas*.

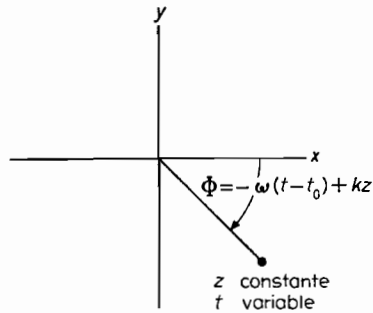


FIG. 12-4

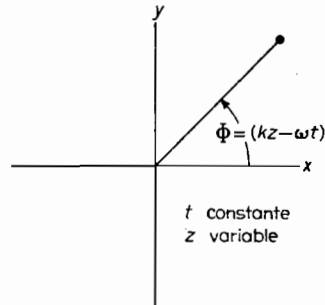


FIG. 12-5

El movimiento vibratorio resultante de la cuerda puede tener, sin embargo, otros modos muy interesantes. Consideremos por ejemplo, la superposición de las dos ondas armónicas polarizadas planas

$$\Psi_x = \text{Re} (Ae^{-ikz}e^{i\omega t}) = A \cos (kz - \omega t), \quad (12-29)$$

$$\Psi_y = \text{Re} (iAe^{-ikz}e^{i\omega t}) = A \text{sen} (kz - \omega t).$$

El desplazamiento resultante de un punto de la cuerda, cuando ambas ondas se propagan simultáneamente a lo largo de ésta, se halla que tiene la magnitud constante  $A$ , y el vector de desplazamiento en un punto  $z$  se ve que forma el ángulo

$$\Phi = -\omega(t - t_0) + kz$$

con el eje  $x$  positivo (fig. 12-4).

Por consiguiente, se observará que el vector de desplazamiento en un punto  $z$  gira alrededor del eje  $z$  positivo con la velocidad angular  $-\omega$ . Para un tiempo dado  $t$ , la cuerda, en función de  $z$ , tomará la forma de una hélice circular, donde el ángulo que forma el vector de desplazamiento con el eje  $x$  positivo aumenta cuando  $z$  aumenta (fig. 12-5, 6). Tal onda se llama *onda polarizada circularmente a la izquierda*.

Por otro lado, la onda resultante producida por la superposición de las dos ondas planas polarizadas

$$\Psi_x = \text{Re} (Ae^{-ikz}e^{i\omega t}) = A \cos (kz - \omega t), \quad (12-30)$$

$$\Psi_y = \text{Re} (-iAe^{-ikz}e^{i\omega t}) = -A \text{sen} (kz - \omega t)$$

es una *onda polarizada circularmente a la derecha* (fig. 12-7). Se denomina así debido a que el vector de desplazamiento en un punto  $z$  gira con el tiempo alrededor de la dirección de propagación de la onda de acuerdo con la regla de la mano derecha. Observaremos que en la onda polarizada

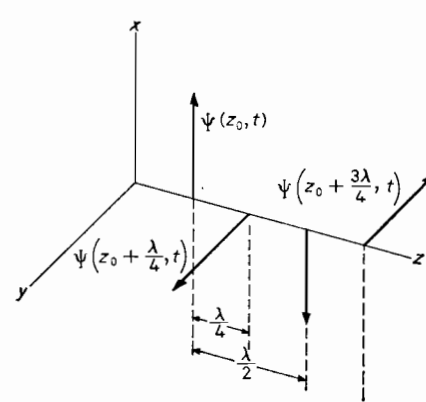


FIG. 12-6. Onda polarizada circularmente a la izquierda.

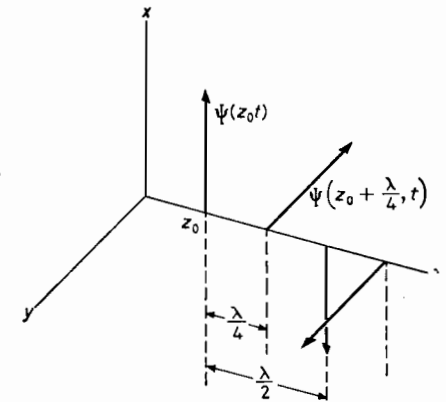


FIG. 12-7. Onda polarizada circularmente a la derecha.

circularmente a la izquierda, el vector de desplazamiento gira alrededor de la dirección de propagación de acuerdo con la regla de la mano izquierda.

La polarización se llama circular debido a que la magnitud del vector de desplazamiento en cualquier punto permanece fija y los puntos de la cuerda se mueven en circunferencias.

La forma que tomará la cuerda con las diferentes polarizaciones circulares se puede ver enrollándola sobre un cilindro circular alrededor del eje  $z$  positivo o del negativo, mientras se mueve el cilindro en la dirección y sentido positivo de  $z$  (fig. 12-8).

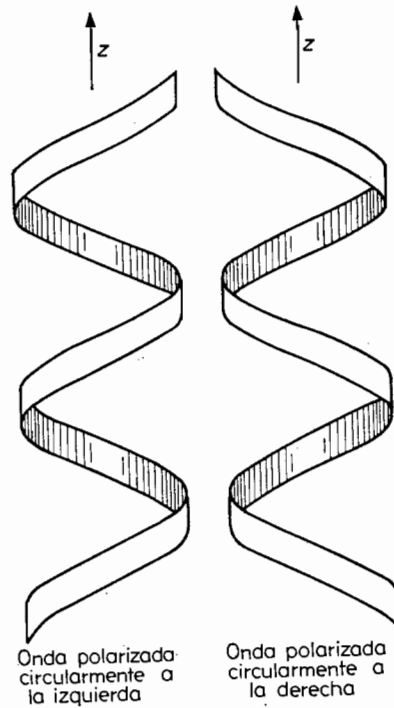


FIG. 12-8

Observaremos que la combinación lineal de una onda polarizada circularmente a la izquierda con otra a la derecha de igual amplitud pero con diferencias de fases arbitraria conduce a una onda polarizada plana. Más concretamente, encontramos que la superposición de estas dos ondas da

$$\begin{aligned} \Psi_x &= \text{Re} [(Ae^{-ikz} + Ae^{-ikz+i\phi})e^{i\omega t}], \\ \Psi_y &= \text{Re} [(iAe^{-ikz} - iAe^{-ikz+i\phi})e^{i\omega t}], \end{aligned} \quad (12-31)$$

$$\begin{aligned} \Psi_x &= 2A \cos \left( kz - \omega t - \frac{\phi}{2} \right) \cos \frac{\phi}{2}, \\ \Psi_y &= 2A \cos \left( kz - \omega t - \frac{\phi}{2} \right) \sin \frac{\phi}{2}, \end{aligned} \quad (12-32)$$

que son las ecuaciones de una onda armónica polarizada en un plano que forma un ángulo  $\phi/2$  con el eje  $x$  positivo.

Similarmente, encontramos que la combinación lineal de una onda polarizada circularmente a la izquierda y otra a la derecha con amplitudes diferentes y fases cualesquiera, conduce generalmente a una *onda polarizada elípticamente*. Concretamente, si el instante  $t = 0$  se elige cuando la onda polarizada circularmente a la izquierda tiene en el punto  $z = 0$  un desplazamiento sobre el eje  $x$  positivo y la onda polarizada circularmente a la derecha tiene en el punto  $z = 0$  y en el instante  $t = 0$  un vector de desplazamiento que forma un ángulo  $\phi$  con el eje  $x$  positivo, entonces, la onda resultante está dada por

$$\begin{aligned} \Psi_x &= \text{Re} [(A + Be^{i\phi})e^{-i(kz-\omega t)}], \\ \Psi_y &= \text{Re} [i(A - Be^{i\phi})e^{-i(kz-\omega t)}]. \end{aligned} \quad (12-33)$$

Esto se puede poner en la forma

$$\begin{aligned} \Psi_x &= \text{Re} [(Ae^{-i\phi/2} + Be^{i\phi/2})e^{i\phi/2}e^{-i(kz-\omega t)}], \\ \Psi_y &= \text{Re} [i(Ae^{-i\phi/2} - Be^{i\phi/2})e^{i\phi/2}e^{-i(kz-\omega t)}]. \end{aligned} \quad (12-34)$$

Las componentes de los desplazamientos resultantes sobre los ejes  $x'$  y  $y'$  (fig. 12-9) que están relacionados con los ejes  $x$  y  $y$  por las ecuaciones de transformación

$$x' = x \cos \frac{\phi}{2} + y \sin \frac{\phi}{2}, \quad y' = -x \sin \frac{\phi}{2} + y \cos \frac{\phi}{2},$$

se describen por

$$\Psi_{x'} = \text{Re} [(A + B)e^{i\phi/2}e^{-i(kz-\omega t)}] = (A + B) \cos \left( kz - \omega t - \frac{\phi}{2} \right) \quad (12-35)$$

y

$$\Psi_{y'} = \text{Re} [i(A - B)e^{i\phi/2}e^{-i(kz-\omega t)}] = (A - B) \sin \left( kz - \omega t - \frac{\phi}{2} \right).$$

Puesto que

$$\left( \frac{\Psi_{x'}}{A + B} \right)^2 + \left( \frac{\Psi_{y'}}{A - B} \right)^2 = 1,$$

el desplazamiento de la cuerda en un punto  $z$  se hallará en todo momento a lo largo de la elipse que tiene un semieje mayor de magnitud  $(A + B)$  sobre el eje  $x'$  y un semieje menor de magnitud  $|A - B|$  sobre el eje  $y'$ . De aquí el nombre de *polarización elíptica*. El que la onda sea polarizada elípticamente a la izquierda o a la derecha depende de las amplitudes de

las ondas polarizadas circularmente en las que se puede descomponer. Tomará el mismo sentido de polarización que la onda polarizada circularmente de mayor amplitud.

La descripción compleja de la propagación de una onda transversal a lo largo de una cuerda, combinada con la representación matricial del vector

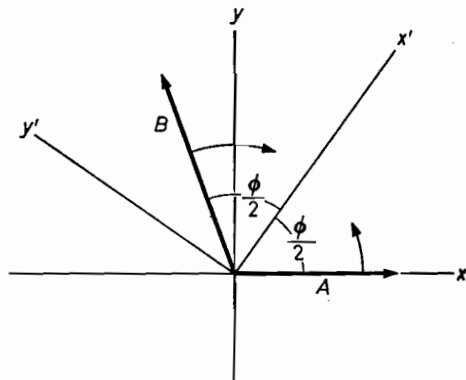


FIG. 12-9

de desplazamiento, proporciona una notación muy conveniente y útil para representar la propagación de ondas transversales polarizadas a lo largo de una cuerda. Así, por ejemplo, si establecemos

$$|\Psi\rangle \leftrightarrow \text{Re} \begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{bmatrix},$$

vemos que la parte real de la onda armónica compleja

$$|\psi\rangle \leftrightarrow (\psi) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i(kz - \omega t)}$$

representa una onda armónica polarizada plana en el plano  $xz$ , mientras que la parte real de la onda armónica compleja

$$|\psi\rangle \leftrightarrow (\psi) = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} e^{-i(kz - \omega t)} \quad (12-36)$$

representa una onda armónica polarizada plana en el plano  $yz$ . Análogamente, las ondas

$$|\psi\rangle \leftrightarrow (\psi) = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-i(kz - \omega t)} \quad (12-37)$$

y

$$|\psi\rangle \leftrightarrow (\psi) = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{-i(kz - \omega t)} \quad (12-38)$$

representan, respectivamente, ondas polarizadas circularmente a la izquierda y a la derecha que se propagan en la dirección (o sentido) creciente de  $z$ . En esta notación, la matriz contiene la información sobre el estado de polarización de la onda, mientras que la exponencial da la frecuencia, número de onda y dirección y sentido de propagación.

Considerando la energía de estas ondas, siendo independientes los dos modos de polarización plana, la energía total propagada es igual a la suma de la de cada una. Esto es, la onda

$$|\psi\rangle \leftrightarrow (\psi) = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^{-i(kz - \omega t)}$$

tiene un flujo medio de energía por unidad de tiempo dado por

$$S = \frac{\mu\omega^2 v}{2} (|A|^2 + |B|^2) \quad (12-39)$$

o sea,

$$S = \frac{1}{2} \mu\omega^2 v \langle \psi | \psi \rangle = \frac{1}{2} T k \omega \langle \psi | \psi \rangle = -\frac{T}{2} \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \middle| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\rangle, \quad (12-40)$$

donde  $\langle \psi | = |\psi\rangle^\dagger$ .

### 12-6 Reflexión y transmisión de ondas armónicas

Habiendo explicado la propagación de una onda armónica a lo largo de una cuerda uniforme tensada, enfocaremos en seguida nuestra atención a la propagación de una onda armónica polarizada plana a lo largo de una cuerda en una región en que la densidad (de masa) lineal de dicha cuerda cambia discontinuamente en un punto determinado (fig. 12-10). Elegiremos este punto como origen del eje  $z$  horizontal.

Como la masa por unidad de longitud ya no es constante, para toda la cuerda, dicha densidad lineal que aparece en la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (12-41)$$

tiene que considerarse, ahora, como función de la posición. En el caso que consideramos, tenemos

$$\mu = \begin{cases} \mu_1 & z < 0, \\ \mu_2 & z > 0. \end{cases} \quad (12-42)$$

Los problemas en que intervienen discontinuidades se pueden manejar descomponiendo la ecuación de onda en cada una de las regiones continuas e intentando luego casar las soluciones de cada región en el punto de discontinuidad mediante la aplicación de las condiciones en la frontera.

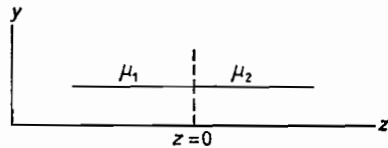


FIG. 12-10

En el problema de una cuerda vibrante, hay dos condiciones en la frontera que son obvias. Evidentemente, mientras las dos partes de la cuerda se mantengan unidas, debemos tener el mismo desplazamiento  $\Psi$  y, en consecuencia, la misma  $\partial\Psi/\partial t$  en ambas regiones. Matemáticamente este hecho se expresa por

$$\Psi_1(0, t) = \Psi_2(0, t) \quad (12-43)$$

y

$$\frac{\partial\Psi_1(0, t)}{\partial t} = \frac{\partial\Psi_2(0, t)}{\partial t}.$$

La última ecuación requiere que la frecuencia de las ondas armónicas en cada una de las dos regiones sea la misma. Otra condición que tiene que ser satisfecha es la conservación de la energía. Esto es, si las dos partes de la cuerda están unidas suavemente de manera que no haya pérdida de energía en el punto de unión, entonces la misma cantidad de energía que llega al punto  $z = 0$  debe salir de él. Esta condición, como veremos más adelante, se satisface únicamente si la pendiente de la cuerda en la unión es continua.

$$\left. \frac{\partial\Psi_1(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial\Psi_2(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0}. \quad (12-44)$$

Las ecuaciones (12-43) y (12-44) son las llamadas *condiciones en la frontera* en la unión.

Debe quedar claro que cualesquiera soluciones en las dos partes de la cuerda dependerán también de las condiciones en la frontera que tienen que cumplirse en los extremos de cuerda. Admitamos, por el momento, que

los extremos no influyen, ya sea porque están tan alejados que durante un tiempo suficientemente largo su efecto no se sentirá en la región de discontinuidad, o bien, porque los extremos absorban toda la energía que llega a ellos, sin reflejar ninguna (problema 12-4). Tenemos, por tanto, la situación en que una onda armónica producida en una región de la cuerda se propaga hacia la junta o unión y posiblemente se descomponga en una onda reflejada y otra transmitida. Si la onda armónica es incidente desde la primera región, la región  $z < 0$ , entonces es probable que haya dos ondas en ésta, una moviéndose hacia la derecha y otra hacia la izquierda. Expresado en función de ondas complejas, tendremos, por tanto,

$$\psi_1(z, t) = A e^{i(-k_1 z + \omega t)} + B e^{i(k_1 z + \omega t)}, \quad (12-45)$$

en la primera región, donde

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \omega \sqrt{\frac{\mu_1}{T}}. \quad (12-46)$$

(Obsérvese que la misma dependencia exponencial del tiempo,  $e^{i\omega t}$ , se usa para ambas ondas.)

En la segunda región, sólo tenemos una onda que se mueve hacia la derecha como se expresa por

$$\psi_2(z, t) = C e^{i(-k_2 z + \omega t)}, \quad (12-47)$$

donde

$$k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \omega \sqrt{\frac{\mu_2}{T}}. \quad (12-48)$$

Imponiendo las condiciones en la frontera en el punto  $z = 0$ , hallamos las relaciones que deben existir entre las amplitudes de las tres ondas. Esto es, con la ecuación (12-43), obtenemos

$$A + B = C, \quad (12-49)$$

y de la ecuación (12-44)

$$i(-A + B)k_1 = -ik_2 C. \quad (12-50)$$

Observemos que la multiplicación de estas dos ecuaciones da

$$k_1(A^2 - B^2) = k_2 C^2, \quad (12-51)$$

lo que asegura que hay conservación de la energía.

En función de las constantes de propagación,  $k_1$  y  $k_2$ , encontramos que las relaciones entre las amplitudes de onda son

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} A \quad (12-52)$$



y

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} A. \quad (12-53)$$

Observemos que cuando  $\mu_1 < \mu_2$  hay un cambio de fase ante la reflexión. La onda reflejada se defasa, entonces,  $\pi$  radianes con respecto a la onda incidente. En función de la velocidad en las dos secciones, vemos que para una onda incidente en una región en que su velocidad es menor que la velocidad de la primera región, la onda reflejada está defasada  $\pi$  radianes con respecto a la onda incidente. La onda transmitida estará siempre en fase con la onda incidente.

Un segundo problema interesante es el caso de una cuerda cuya densidad (de masa) lineal cambia discontinuamente en dos puntos, los puntos  $z = \pm a$ , como se ve en la figura 12-11.

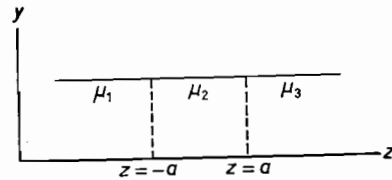


FIG. 12-11

Llamando a las densidades lineales, respectivamente,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  y  $\mu_3$  encontramos que para una onda armónica que se origine en la primera sección obtendremos una onda reflejada en esta primera sección, dos ondas, una moviéndose hacia la derecha y otra hacia la izquierda, en la segunda sección, y una onda transmitida, moviéndose hacia la derecha, en la tercera sección. Estos hechos están expresados por las ondas armónicas complejas

$$\begin{aligned} \psi_1(z, t) &= (Ae^{-ik_1z} + Be^{ik_1z})e^{i\omega t}, \\ \psi_2(z, t) &= (Ce^{-ik_2z} + De^{ik_2z})e^{i\omega t}, \\ \psi_3(z, t) &= Ee^{-ik_3z}e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (12-54)$$

donde

$$k_i = \omega \sqrt{\frac{\mu_i}{T}} \quad (12-55)$$

Aplicando las condiciones en la frontera en el punto  $z = -a$ , obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} Ae^{ik_1a} + Be^{-ik_1a} &= Ce^{ik_2a} + De^{-ik_2a}, \\ k_1(Ae^{ik_1a} - Be^{-ik_1a}) &= k_2(Ce^{ik_2a} - De^{-ik_2a}), \end{aligned} \quad (12-56)$$

mientras que en el punto  $z = +a$ , las condiciones en la frontera dan

$$\begin{aligned} Ce^{-ik_2a} + De^{ik_2a} &= Ee^{-ik_3a}, \\ k_2(Ce^{-ik_2a} - De^{ik_2a}) &= k_3Ee^{-ik_3a}. \end{aligned} \quad (12-57)$$

Las ecuaciones (12-56) y (12-57) son cuatro simultáneas que podemos resolver para determinar las cuatro constantes  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$  en función de la amplitud  $A$  de la onda recibida o de llegada. Las ecuaciones que relacionan las amplitudes de las ondas son, sin embargo, algo más simples de resolver, cuando están expresadas en función de los *coeficientes de reflexión* (ecuación 12-52)

$$r_{ij} = \frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \quad (12-58)$$

y de los *coeficientes de transmisión* [ecuación (12-53)]

$$t_{ij} = \frac{2k_i}{k_i + k_j} \quad (12-59)$$

para la reflexión y transmisión de una onda incidente desde el medio  $i$ -ésimo sobre el medio  $j$ -ésimo. En función de estos coeficientes, la relación entre las amplitudes de las ondas se expresan en el punto  $z = -a$  por las relaciones

$$\begin{aligned} Be^{-ik_1a} &= r_{12}Ae^{ik_1a} + t_{21}De^{-ik_2a}, \\ Ce^{ik_2a} &= t_{12}Ae^{ik_1a} + r_{21}De^{-ik_2a}, \end{aligned} \quad (12-60)$$

y en el punto  $z = a$  por

$$\begin{aligned} Ee^{-ik_3a} &= t_{23}Ce^{-ik_2a}, \\ De^{ik_2a} &= r_{23}Ce^{-ik_2a}. \end{aligned} \quad (12-61)$$

Generalmente, sólo son de interés especial las constantes  $B$  y  $E$ , que son, respectivamente, la amplitud de la onda reflejada y la de la onda transmitida en la tercera región. Resolviendo las últimas ecuaciones simultáneas para hallar  $B$ , obtenemos

$$\frac{Be^{-ik_1a}}{Ae^{ik_1a}} = r_{12} + \frac{t_{21}t_{12}r_{23}}{e^{2ik_2a} - r_{21}r_{23}}. \quad (12-62)$$

Observaremos que la amplitud de la onda reflejada es una complicada función de la anchura  $2a$  del segundo medio y las magnitudes relativas de las constantes de propagación en cada porción de la cuerda. Además, vemos que bajo ciertas condiciones, la amplitud de la onda reflejada se puede hacer que se anule (problema 12-13). Este es el principio usado, por ejemplo, para reducir la reflexión de ondas luminosas por las lentes de las cámaras fotográficas y de otros instrumentos ópticos.

Otro ejemplo, muy importante e interesante, es el problema de la propagación de ondas a lo largo de una cuerda cuya densidad (de masa) lineal alterna entre los valores  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , como se ve en la figura 12-12. La cuerda forma, entonces, una estructura periódica y el problema es un ejemplo de la propagación de ondas en un medio periódico.

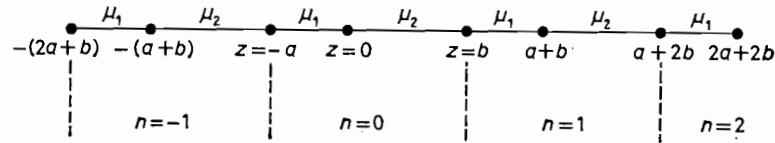


FIG. 12-12

La ecuación de onda satisfecha por las diferentes secciones de la cuerda de densidad lineal  $\mu_1$  es

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0. \quad (12-63)$$

La ecuación de onda satisfecha por las otras secciones es

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0. \quad (12-64)$$

Estas ecuaciones tienen la solución compleja

$$\psi_n = e^{i\omega t} \begin{cases} A_n e^{ik_1 z} + B_n e^{-ik_1 z} & \text{región 1} \\ C_n e^{ik_2 z} + D_n e^{-ik_2 z} & \text{región 2} \end{cases} \quad (12-65)$$

en la  $n$ -ésima sección de la cuerda. Ahora nos queda aplicar las condiciones en la frontera en cada punto donde cambia la densidad. Esto nos llevará a un sistema infinito de ecuaciones simultáneas homogéneas. Obviamente, debemos buscar alguna manera de simplificar el problema. Igual que en el problema del sistema o conjunto infinito de osciladores acoplados idénticos que consideramos en la sección 8-11, veremos que las ecuaciones de movimiento y sus soluciones son invariables tanto para un cambio de un entero en los números asignados a las secciones como para un cambio del origen de coordenadas en un múltiplo entero de  $(a + b)$ . Por lo tanto, partiendo de consideraciones de simetría deberemos buscar soluciones de la forma (problema 10-23)

$$\psi(z) = e^{ikz} \phi(z), \quad (12-66)$$

donde  $\phi(z)$  es una función periódica de período  $(a + b)$ . El que las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales cuyo operador diferencial es conmutativo con el operador que traslada el origen de coordenadas en

múltiplos enteros de una longitud dada, sea expresable en esta forma se conoce como *teorema de Bloch*. En función de las constantes  $A_n, B_n, C_n$  y  $D_n$ , que aparecen en la ecuación (12-65), se encuentra que  $\phi_n(z)$  se expresa por

$$\phi_n(z) = \begin{cases} A_n e^{i(k_1 - \kappa)z} + B_n e^{-i(k_1 + \kappa)z} & \text{región 1} \\ C_n e^{i(k_2 - \kappa)z} + D_n e^{-i(k_2 + \kappa)z} & \text{región 2.} \end{cases} \quad (12-67)$$

A partir de las condiciones en la frontera satisfechas por la cuerda en  $z = 0$ , tenemos

$$A_0 + B_0 = C_0 + D_0$$

y

$$k_1(A_0 - B_0) = k_2(C_0 - D_0). \quad (12-68)$$

Las condiciones en la frontera en  $z = -a$ , dan

$$e^{-i\kappa a} [A_0 e^{-i(k_1 - \kappa)a} + B_0 e^{i(k_1 + \kappa)a}] = e^{-i\kappa a} [C_{-1} e^{-i(k_2 - \kappa)a} + D_{-1} e^{i(k_2 + \kappa)a}]$$

y

$$k_1 e^{-i\kappa a} [A_0 e^{-i(k_1 - \kappa)a} - B_0 e^{i(k_1 + \kappa)a}] = k_2 e^{-i\kappa a} [C_{-1} e^{-i(k_2 - \kappa)a} - D_{-1} e^{i(k_2 + \kappa)a}]. \quad (12-69)$$

La propiedad de simetría,  $\phi(z + a + b) = \phi(z)$ , de la función  $\phi(z)$  nos permite establecer

$$\phi_{-1}(-a) = \phi_0(b) \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial \phi_{-1}}{\partial z} \right|_{z=-a} = \left. \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right|_{z=b}, \quad (12-70)$$

o por la ecuación (12-67)

$$C_{-1} e^{-i(k_2 - \kappa)a} + D_{-1} e^{i(k_2 + \kappa)a} = C_0 e^{i(k_2 - \kappa)b} + D_0 e^{-i(k_2 + \kappa)b}$$

y

$$C_{-1} e^{-i(k_2 - \kappa)a} - D_{-1} e^{i(k_2 + \kappa)a} = C_0 e^{i(k_2 - \kappa)b} - D_0 e^{-i(k_2 + \kappa)b}. \quad (12-71)$$

Entonces, podemos simplificar la ecuación (12-69) para obtener, junto con la ecuación (12-68), las cuatro ecuaciones lineales homogéneas

$$A_0 + B_0 - C_0 - D_0 = 0,$$

$$k_1 A_0 - k_1 B_0 - k_2 C_0 + k_2 D_0 = 0,$$

$$A_0 e^{-i(k_1 - \kappa)a} + B_0 e^{i(k_1 + \kappa)a} - C_0 e^{i(k_2 - \kappa)b} - D_0 e^{-i(k_2 + \kappa)b} = 0,$$

$$k_1 A_0 e^{-i(k_1 - \kappa)a} - k_1 B_0 e^{i(k_1 + \kappa)a} - k_2 C_0 e^{i(k_2 - \kappa)b} + k_2 D_0 e^{-i(k_2 + \kappa)b} = 0.$$

(12-72)

Estas cuatro ecuaciones simultáneas entre las cuatro constantes  $A_0, B_0, C_0$  y  $D_0$  tienen una solución sólo si el determinante de sus coeficientes se anula:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ k_1 & -k_1 & -k_2 & k_2 \\ e^{-i(k_1-\kappa)a} & e^{i(k_1+\kappa)a} & -e^{i(k_2-\kappa)b} & -e^{-i(k_2+\kappa)b} \\ k_1 e^{-i(k_1-\kappa)a} & -k_1 e^{i(k_1+\kappa)a} & -k_2 e^{i(k_2-\kappa)b} & k_2 e^{-i(k_2+\kappa)b} \end{vmatrix} = 0 \quad (12-73)$$

o sea,

$$\cos \kappa(a + b) = \cos k_1 a \cos k_2 b - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \text{sen } k_1 a \text{ sen } k_2 b. \quad (12-74)$$

Esta ecuación trascendente da  $\kappa$  en función de  $\omega = k_1 v_1$ . Observaremos que para ciertos intervalos de  $\omega$ , el valor absoluto del segundo miembro de la ecuación (12-74) será menor que uno, mientras que para otros excederá de la unidad. El último caso da un valor complejo para  $\kappa$ , lo que significa que las ondas de esa frecuencia no se propagarán a lo largo de la cuerda. Por tanto, hallaremos intervalos de la frecuencia,  $\omega$ , de las ondas en los que se produce propagación (*bandas de transmisión*) e intervalos en los que no se produce propagación o es impedida. Esto, por ejemplo, es lo que tiene lugar en el caso de ondas de materia de los electrones que describen el movimiento de éstos en el potencial eléctrico periódico de un cristal. En este caso, también encontramos la existencia de *bandas permitidas* y *prohibidas* de propagación para las ondas de materia de los electrones. En mecánica cuántica, la energía asociada a un haz electrónico está relacionada a la frecuencia de la onda de materia que describe su movimiento. Por eso se halla que sólo los electrones que tienen una energía dentro de una de las bandas de energía permitidas se pueden propagar en un potencial periódico.

### 12-7 Cuerda vibrante con los extremos fijos

En esta sección investigaremos el efecto que tienen las restricciones en los puntos extremos de la cuerda sobre la propagación de ondas armónicas a lo largo de ella. Concretamente, consideraremos el caso de una cuerda con sus extremos fijos.

Debe quedar claro que una simple onda armónica que se mueve en una dirección (y sentido) no puede representar la cuerda vibrante con ambos extremos fijos, pues tal simple onda requerirá que todos los puntos de la cuerda, incluyendo sus extremos, efectúan una oscilación armónica simple de la misma amplitud. Sin embargo, podemos combinar las dos ondas armónicas

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A e^{-i(kz - \omega t - \phi)}, \\ \psi_2 &= A e^{i(kz + \omega t + \phi)} \end{aligned} \quad (12-75)$$

para producir un desplazamiento nulo en el extremo  $z = 0$  de la cuerda. Esta es la combinación lineal

$$\begin{aligned} \Psi &= \text{Re} (\psi_1 - \psi_2) = \text{Re} [-2iA \text{sen } kz e^{i(\omega t + \phi)}] \\ &= 2A \text{sen } kz \text{sen} (\omega t + \phi). \end{aligned} \quad (12-76)$$

Pero esta solución no satisfará la condición en la frontera en el extremo  $z = l$ , a menos que la constante de propagación tome los valores específicos

$$k = \frac{n\pi}{l}; \quad n \text{ entero.} \quad (12-77)$$

Por consiguiente, hallamos que solamente ondas armónicas muy especiales pueden existir en una cuerda con sus extremos fijos. Estas son las ondas armónicas estacionarias con longitud de onda

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (12-78)$$

o frecuencia

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (12-79)$$

Las soluciones dadas por la ecuación (12-76) con estos valores de  $k$  y  $\omega$  son conocidas como *modos normales de vibración* de una cuerda con extremos fijos. La solución para  $n = 1$  da el modo fundamental. Este modo de vibración se indica en la figura 12-13. Todos los demás modos, o *armónicos*

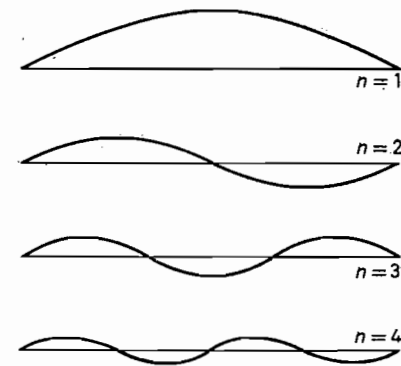


FIG. 12-13. Modos normales de la cuerda vibrante.

de la cuerda vibrante, vibran con uno o más puntos, además de sus extremos, mantenidos siempre fijos. Estos puntos se denominan *nodos*. La

figura 12-13 también muestra los modos de vibración de los primeros armónicos. Obsérvese que el primer armónico tiene un nodo entre los puntos extremos, el segundo tiene dos, etc. Esto es muy característico de las soluciones de la ecuación de onda sujeta a condiciones en la frontera homogéneas. Esto es, encontramos la existencia de soluciones características sin ningún nodo, con un nodo, dos nodos, etc. Cuanto mayor sea el número de nodos, mayor será la frecuencia característica de la solución característica.

Estas soluciones tienen la propiedad complementaria muy útil de que forman un conjunto completo de funciones ortogonales en función del cual se puede expresar cualquier movimiento complicado de la cuerda con extremos fijos. Esto es, cualquier solución que describa el movimiento de vibración de la cuerda se puede expresar como una suma lineal de los modos normales  $\Psi_n(z, t)$ ,

$$\Psi(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Psi_n(z, t). \tag{12-80}$$

Proseguiremos con un estudio que muestra cómo los coeficientes  $a_n$  del desarrollo y la fase  $\phi_n$  de los modos normales quedan determinados por los valores iniciales de  $\Psi$  y  $\partial\Psi/\partial t$ .

### 12-8 Movimiento general de una cuerda vibrante

Habiendo explicado las vibraciones características de una cuerda con extremos fijos, enfocaremos ahora nuestra atención en el movimiento general de dicha cuerda. Concretamente, nos interesa mostrar cómo se determinan las amplitudes de los modos característicos en función de las cuales se puede expresar el movimiento general.

Vemos que el coeficiente  $a_n$  y la fase  $\phi_n$  del  $n$ -ésimo modo normal en el desarrollo en modos normales de la solución general

$$\Psi(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen} \frac{n\pi z}{l} \text{sen} (\omega_n t + \phi_n) \tag{12-81}$$

están determinados si en cierto instante inicial,  $t_0$ , se conocen la forma  $\Psi(z, t_0)$  de la cuerda y la velocidad  $\partial\Psi(z, t_0)/\partial t_0$  de sus puntos. Haciendo  $t_0 = 0$ , vemos que para que  $\Psi(z, t)$ , según está dada por la ecuación (12-81), satisfaga las condiciones iniciales, debemos tener

$$\Psi(z, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen} \phi_n \text{sen} \frac{n\pi z}{l} \tag{12-82}$$

y

$$v(z, 0) = \left. \frac{\partial\Psi(z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n \cos \phi_n \text{sen} \frac{n\pi z}{l}. \tag{12-83}$$

Las ecuaciones (12-82) y (12-83) son desarrollos en serie de Fourier de  $\Psi(z, 0)$  y  $v(z, 0)$ , que ya encontramos en nuestro estudio del movimiento forzado del oscilador armónico simple (Capítulo 4). Siguiendo el método allí esbozado, podemos hallar los coeficientes de  $\text{sen} (n\pi z/l)$  en cada uno de los desarrollos anteriores. Encontramos, así, que

$$A_n = a_n \text{sen} \phi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \Psi(\xi, 0) \text{sen} \frac{n\pi\xi}{l} d\xi, \tag{12-84}$$

$$\omega_n B_n = \omega_n a_n \cos \phi_n = \frac{2}{l} \int_0^l v(\xi, 0) \text{sen} \frac{n\pi\xi}{l} d\xi, \tag{12-85}$$

de las que obtenemos

$$a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \tag{12-86}$$

y

$$\text{tg} \phi_n = \frac{A_n}{B_n}. \tag{12-87}$$

La ecuación (12-81) proporciona una función de  $z$  y  $t$  que satisface la ecuación de onda y las condiciones iniciales satisfechas por la cuerda; por tanto, es la solución que estamos buscando.

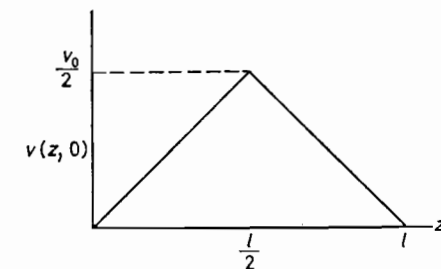


FIG. 12-14

► Como ejemplo, consideremos una cuerda de longitud  $l$  que tiene una masa  $\mu$  por unidad de longitud y está sometida a una tensión (tracción)  $T$ . En el instante  $t = 0$ , la cuerda recibe un golpe impulsor que le da una velocidad inicial expresada por (fig. 12-14)

$$v(z, 0) = \begin{cases} \frac{v_0}{l} z & 0 \leq z \leq \frac{l}{2} \\ \frac{v_0}{l} (l - z) & \frac{l}{2} \leq z \leq l \end{cases}$$

mientras que

$$\Psi(z, 0) = 0.$$

Evidentemente, en este caso,  $A_n$ , según está dado por la ecuación (12-84), es nulo y

$$\begin{aligned} \omega_n B_n &= \frac{2}{l} \left[ \int_0^{l/2} \frac{v_0}{l} \xi \operatorname{sen} \frac{n\pi\xi}{l} d\xi + \int_{l/2}^l \frac{v_0}{l} (l - \xi) \operatorname{sen} \frac{n\pi\xi}{l} d\xi \right] \\ &= \frac{4v_0}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Luego obtenemos

$$a_n = B_n = \frac{4v_0}{\omega_n n^2 \pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2},$$

que nos da

$$\operatorname{tg} \phi_n = 0 \quad \text{o} \quad \phi_n = 0.$$

Entonces, la solución general es

$$\Psi(z, t) = \frac{4v_0}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2 \omega_{2m-1}} \operatorname{sen} \frac{2m-1}{l} \pi z \operatorname{sen} \omega_{2m-1} t,$$

donde

$$\omega_{2m-1} = \frac{2m-1}{l} \pi v = \frac{2m-1}{l} \pi \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

Explícitamente,

$$\begin{aligned} \Psi(z, t) &= \frac{4v_0 l}{\pi^3 v} \left[ \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi v t}{l} - \frac{1}{3^3} \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{3\pi v t}{l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5^3} \operatorname{sen} \frac{5\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{5\pi v t}{l} - \dots \right]. \end{aligned}$$

Nuestro método para hallar la solución general de la cuerda vibrante ha sido algo indirecto y dependió de nuestro conocimiento de que las diferentes ondas armónicas que pueden existir en la cuerda constituyen un conjunto completo de funciones en relación con el cual se puede expresar cualquier solución de este problema. Procederemos ahora a demostrar que podemos obtener la misma solución por la separación de variables que es, de ordinario, el primer método utilizado al intentar resolver una ecuación

diferencial parcial. Si este método se aplica satisfactoriamente, requerirá, finalmente, que resolvamos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias independientes, las cuales son en sí más simples de resolver que la ecuación diferencial parcial original. Desgraciadamente no todas las ecuaciones diferenciales parciales se pueden resolver por este método.

En el método de separación de variables, buscamos soluciones a la ecuación diferencial parcial que estén expresadas por el producto de una cierta cantidad de funciones, cada una de las cuales sólo es función de una de las variables independientes. Así, para la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \tag{12-88}$$

buscamos soluciones de la forma

$$\psi(z, t) = Z(z) \mathcal{J}(t). \tag{12-89}$$

Cuando una solución de esta forma se introduce en la ecuación de onda, da

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{1}{\mathcal{J}} \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial t^2}. \tag{12-90}$$

El primer miembro de (12-90) es función exclusivamente de  $z$  y el segundo miembro lo es únicamente de  $t$ . Pero como  $z$  y  $t$  son variables independientes, sólo se verifica esta igualdad para todos los valores de  $z$  y  $t$  si las funciones de ambos miembros de la ecuación tienen el mismo valor para todos los valores de  $z$  y  $t$ . Esto es, la ecuación (12-90) sólo puede ser satisfecha si

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{v^2} \frac{1}{\mathcal{J}} \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial t^2} = -k^2, \tag{12-91}$$

donde  $k^2$  es la llamada constante de separación. Estas ecuaciones diferenciales tienen las soluciones

$$Z(z) = A e^{\pm i k z} \quad \text{y} \quad \mathcal{J}(t) = B e^{\pm i \omega t},$$

donde

$$\omega^2 = k^2 v^2.$$

Las que nos dan

$$\psi(z, t) = C e^{\pm i k z \pm i \omega t}, \tag{12-92}$$

que son las ondas armónicas complejas con las que iniciamos nuestro estudio.

12-9 Vibración forzada de una cuerda: resonancia, función de Green

Una cuerda en movimiento libre tiene necesariamente que haber recibido la acción de una fuerza, en cierto instante anterior, de la cual obtuvo su energía de vibración. En esta sección consideraremos el efecto de una fuerza excitadora sinusoidal sobre el movimiento de vibración de una cuerda. Una vez más, como en el caso del oscilador armónico simple, encontraremos la existencia de frecuencias de resonancia para las que la respuesta o reacción de la cuerda a la fuerza excitadora es grande.

Una fuerza excitadora sinusoidal que actúe en diferentes puntos de la cuerda se expresa por

$$F(z, t) = \text{Re} [Tf(z) e^{i(\omega t + \phi)}] \Delta z. \quad (12-93)$$

La restricción o sujeción en los extremos de la cuerda requiere que  $f(0) = f(l) = 0$ . Lo mismo que en el caso del oscilador armónico simple, preferimos considerar el efecto de la fuerza compleja

$$F(z, t) = Tf(z) e^{i(\omega t + \phi)} \Delta z \quad (12-94)$$

sobre la cuerda. La solución que buscamos será, una vez más, la parte real de la solución particular de la ecuación de onda no homogénea

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -f(z) e^{i(\omega t + \phi)}. \quad (12-95)$$

Como para toda ecuación diferencial lineal, la solución general será la suma lineal de la solución particular y la solución general de la homogénea que estudiamos en la última sección.

Es probable que la solución particular tendrá la misma dependencia exponencial del tiempo que la fuerza excitadora. Por tanto, poniendo

$$\psi(z, t) = g(z) e^{i(\omega t + \phi)}, \quad (12-96)$$

hallamos el resultado de que  $g(z)$  debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 g(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{v^2} g(z) = -f(z), \quad (12-97)$$

sujetándose, por supuesto, a la condición en la frontera

$$g(0) = g(l) = 0.$$

Desarrollando  $g(z)$  y  $f(z)$  en serie seno de Fourier entre  $z = 0$  y  $z = l$ , esto es, haciendo

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \text{sen} \frac{n\pi z}{l}, \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{sen} \frac{n\pi z}{l}, \quad (12-98)$$

obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n \left[ \frac{\omega^2}{v^2} - \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \right] \text{sen} \frac{n\pi z}{l} = - \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{sen} \frac{n\pi z}{l} \quad (12-99)$$

o

$$g_n = \frac{f_n}{k_n^2 - k^2}, \quad (12-100)$$

donde

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad \text{y} \quad k_n^2 = \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2. \quad (12-101)$$

Los coeficientes  $g_n$  de la parte espacial de la solución particular están así relacionados con los coeficientes  $f_n$  del desarrollo en serie de Fourier de  $f(z)$ . Concretamente, como

$$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \text{sen} \frac{n\pi \xi}{l} d\xi, \quad (12-102)$$

vemos que podemos expresar la solución en la forma

$$\Psi(z, t) = \frac{2}{l} \cos(\omega t + \phi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi z/l)}{k_n^2 - k^2} \int_0^l f(\xi) \text{sen} \frac{n\pi \xi}{l} d\xi. \quad (12-103)$$

Observaremos la existencia de un denominador de resonancia en la solución particular. Esto nos dice que el modo más excitado es aquel cuya frecuencia  $\omega_n = vk_n$  es la más próxima a la frecuencia de excitación. Por supuesto, esto es así sólo si

$$f_n \neq 0$$

para dicho modo. Para  $k = k_n$ , la ecuación (12-103) predice una amplitud infinita para este modo. Esto se debe a que despreciamos las fuerzas de amortiguación.

Cuando hay fuerzas de amortiguación de la forma

$$F_{\text{amort}} = - \frac{2T}{v} \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Delta z, \quad (12-104)$$

la solución particular tiene la forma (problema 12-9)

$$\Psi(z, t) = \text{Re} e^{i(\omega t + \phi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n \text{sen}(n\pi z/l)}{k_n^2 - k^2 + 2ik\lambda} \quad (12-105)$$

que nos da amplitudes finitas de la resonancia.

Es interesante observar que una fuerza excitadora sinusoidal de la forma

$$F_{\omega}(z, t) = Tf(z) e^{i\omega t} \Delta z \quad (12-106)$$

se puede expresar en función de la función delta de Dirac,

$$F_{\omega}(z, t) = T e^{i\omega t} \Delta z \int_0^l f(\xi) \delta(\xi - z) d\xi. \quad (12-107)$$

En consecuencia, es de esperar que la respuesta o reacción del sistema a una fuerza excitadora sinusoidal de frecuencia  $\omega$  se pueda expresar en función de la respuesta del sistema a una fuerza excitadora sinusoidal de frecuencia  $\omega$  aplicada a la cuerda sólo en el punto  $z = z'$ . Esta respuesta, para la cual emplearemos el símbolo  $G_{\omega}(z|z')$ , satisface la ecuación no homogénea

$$\frac{\partial^2 G_{\omega}(z|z')}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{v^2} G_{\omega}(z|z') = -\delta(z - z'). \quad (12-108)$$

Ya antes encontramos esta ecuación en la sección 4-12. Llamamos a  $G_{\omega}(z|z')$  *función de Green* para el oscilador armónico simple y obtuvimos para ella una expresión de forma cerrada que se anulaba en  $z = 0$ .

Ahora nos interesa hallar la función de Green que se anula también en  $z = l$ . Sustituyendo  $f(\xi)$  en la ecuación (12-103) por  $\delta(\xi - z')$ , hallamos que el desarrollo en modos normales para la función de Green,  $G_{\omega}(z|z')$ , es:

$$G_{\omega}(z|z') = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi z/l) \text{sen}(n\pi z'/l)}{k_n^2 - k^2} \quad (12-109)$$

En función de  $G_{\omega}(z|z')$ , la ecuación (12-103) se puede expresar por

$$\Psi(z, t) = \cos(\omega t + \phi) \int_0^l G_{\omega}(z|z') f(z') dz'. \quad (12-110)$$

Otra expresión muy útil en forma cerrada de  $G_{\omega}(z|z')$  se puede hallar descomponiendo la ecuación (12-108) en las dos regiones  $0 \leq z \leq z'$  y  $z' \leq z \leq l$  y aplicando las condiciones en la frontera que debe satisfacer  $G_{\omega}(z|z')$  en  $z = z'$ . Estas condiciones son la de continuidad de  $G_{\omega}(z|z')$  en  $z = z'$  y la de discontinuidad de su pendiente, la cual debe satisfacer la ecuación

$$\left. \frac{\partial G_{\omega}(z|z')}{\partial z} \right|_{z=z'+} - \left. \frac{\partial G_{\omega}(z|z')}{\partial z} \right|_{z=z'-} = -1. \quad (12-111)$$

Esta última condición se desprende de una integración de la ecuación (12-108) sobre un intervalo infinitesimal que incluya el punto  $z = z'$ . También se puede hallar partiendo de la ley de movimiento de Newton para el punto  $z = z'$ . Como un punto no tiene masa, esta ley nos dice que la suma de todas las fuerzas que actúan sobre dicho punto tiene que anularse. Evidentemente, si una fuerza se aplica a un único punto de la

cuerda, la pendiente de ésta no será continua. No obstante, admitiendo que la tensión en ambos lados del cable sea igual, obtenemos la ecuación (12-111) (fig. 12-15).

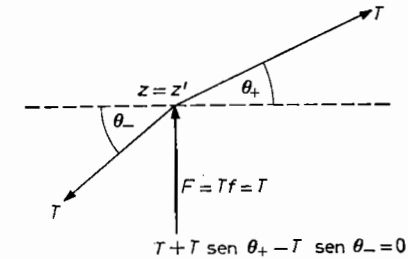


FIG. 12-15. Aplicación de las ecuaciones de movimiento de Newton a un punto sin masa.

La solución a la ecuación (12-108) en la primera región que satisface la condición en la frontera en  $z = 0$  es

$$G_{\omega}(z|z') = A(z') \text{sen} kz,$$

mientras que en la segunda región es

$$G_{\omega}(z|z') = B(z') \text{sen} k(l - z).$$

La simetría de la función de Green y la condición de que las dos soluciones den el mismo resultado en  $z = z'$  sugiere que expresemos  $G_{\omega}(z|z')$  por

$$G_{\omega}(z|z') = C \begin{cases} \text{sen} kz \text{sen} k(l - z') & z < z', \\ \text{sen} k(l - z) \text{sen} kz' & z > z'. \end{cases} \quad (12-112)$$

La constante  $C$  se elige de modo que  $G_{\omega}(z|z')$  satisfaga la ecuación (12-111). Esto da

$$-Ck[\cos k(l - z') \text{sen} kz' + \cos kz' \text{sen} k(l - z')] = -1$$

o

$$C = \frac{1}{k \text{sen} kl}. \quad (12-113)$$

Entonces hemos llegado a la solución de forma cerrada

$$G_{\omega}(z|z') = \frac{1}{k \text{sen} kl} \begin{cases} \text{sen} kz \text{sen} k(l - z') & z < z', \\ \text{sen} k(l - z) \text{sen} kz' & z > z'. \end{cases} \quad (12-114)$$

Para propósitos de cálculo esta función de respuesta es más conveniente que el desarrollo en modos normales de la función de Green.

► Ahora demostraremos la utilidad de las funciones de Green para obtener soluciones aproximadas para una cuerda perturbada. Consideremos

el problema de una cuerda de longitud  $l$ , con extremos fijos, compuesta de dos partes de diferente densidad (de masa) lineal, como se ve en la figura 12-16. Se puede obtener fácilmente la solución exacta. La parte espacial de la solución es

$$Z(z) = \begin{cases} A \operatorname{sen} k_1 z & 0 < z < a. \\ B \operatorname{sen} k_2(l - z) & a < z < l. \end{cases} \quad (12-115)$$

Las condiciones en la frontera en  $z = a$  nos llevan a la ecuación transcendente

$$\frac{1}{k_1} \operatorname{tg} k_1 a = \frac{1}{k_2} \operatorname{tg} k_2(l - a)$$

o

$$\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \operatorname{tg} \omega \sqrt{\frac{\mu_1}{T}} a = \operatorname{tg} \omega \sqrt{\frac{\mu_2}{T}} (l - a), \quad (12-116)$$

cuyas raíces dan las frecuencias normales de vibración de la cuerda compuesta.

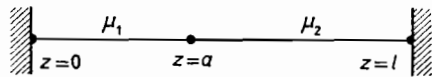


FIG. 12-16

Se puede hacer una estimación aproximada de las frecuencias normales de vibración, partiendo de la solución expresada en función del desarrollo en modos normales de la función de Green. Esta solución se hallará expresando, primero la ecuación de onda que satisface la cuerda por

$$\frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial t^2} = \frac{\mu'}{T} \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial t^2},$$

o suponiendo una dependencia del tiempo de la forma  $e^{i\omega t}$ ,  $\Psi(z, t) = Z(z)e^{i\omega t}$ , por

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{v_2^2} Z(z) = -\frac{\omega^2 \mu'}{T} Z(z),$$

donde

$$\mu' = \begin{cases} \mu_1 - \mu_2 & 0 < z < a, \\ 0 & a < z < l. \end{cases}$$

Tratando el segundo miembro de la ecuación anterior como un término no homogéneo de la ecuación de onda, la solución por la ecuación (12-110), es

$$Z(z) = \int_0^l \frac{\mu' \omega^2}{T} Z(z') G_\omega(z|z') dz',$$

Si  $\mu'$  o  $a$  son pequeñas, es probable que

$$Z(z) = Z_n(z)$$

sea una buena primera aproximación a la solución correcta, siendo  $Z_n$  uno de los modos normales de la cuerda de densidad lineal  $\mu_2$ . Utilizando sólo el término  $n$  del desarrollo en modos normales de la función de Green, hallamos el resultado aproximado

$$Z_n(z) = \left[ \frac{\mu_1 - \mu_2}{T} \omega^2 \frac{2}{l} \int_0^a Z_n(\xi)^2 d\xi \right] \frac{Z_n(z)}{k_n^2 - k^2},$$

donde

$$k_n^2 = \frac{\omega_n^2}{v_2^2} \quad \text{y} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{v_2^2}.$$

Por lo tanto, hemos obtenido que la fórmula de la perturbación de primer orden para el desplazamiento de la frecuencia de resonancia del  $n$ -ésimo modo normal es

$$k_n^2 - k^2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{T} \omega^2 \frac{2}{l} \int_0^a \Psi_n(\xi)^2 d\xi.$$

Haciendo

$$k_n^2 - k^2 \approx 2k_n(k_n - k) = 2k_n \Delta k_n$$

y

$$\omega^2 \approx \omega_n^2,$$

hallamos que

$$\Delta k_n = \frac{\mu_1 - \mu_2}{T} \frac{\omega_n}{k_n l} \int_0^a Z_n(\xi)^2 d\xi. \blacktriangleleft$$

### 12-10 Fuerza impulsora: función de Green

Como ejemplo final, consideraremos formalmente la respuesta de la cuerda a la fuerza impulsora

$$F(z, t) = T \delta(z - z') \delta(t - t') \Delta z = I(z, t|z', t') \Delta z \quad (12-117)$$

que está aplicada en el punto  $z = z'$  en el instante  $t = t'$ . La ecuación del movimiento resultante de la cuerda para esta fuerza es

$$\frac{\partial^2 G(z, t|z', t')}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 G(z, t|z', t')}{\partial t^2} = -\delta(z - z') \delta(t - t'), \quad (12-118)$$

donde hemos hecho  $\Psi(z, t) = G(z, t|z', t')$ . La utilidad de la fuerza impulsora,  $I(z, t|z', t')$ , se basa en el hecho de que cualquier otra fuerza,  $Tf(z, t)$ , se puede expresar por una integral que comprenda a la fuerza impulsora,

$$Tf(z, t) = \int_0^l \int_0^\infty f(z', t') I(z, t|z', t') dt' dz'. \quad (12-119)$$



Por consiguiente, se desprende que la respuesta  $\Psi(z, t)$  a la fuerza  $Tf(z, t)$  se debe poder expresar en función de la función de Green,  $G(z, t|z', t')$ , que es la respuesta de la cuerda a la fuerza impulsora,  $I(z, t|z', t')$ . Formalmente, vemos que la solución particular para la fuerza general dependiente del tiempo  $F(z, t) = Tf(z, t)$  es

$$\Psi(z, t) = \int_0^l \int_0^t G(z, t|z', t') f(z', t') dt' dz'. \quad (12-120)$$

Para hallar la función de Green,  $G(z, t|z', t')$ , necesitaremos la representación en integral de Fourier de la función delta de Dirac,

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega, \quad (12-121)$$

que hallamos en la sección 11-6. Lo que significa que podemos expresar la fuerza impulsora,  $I(z, t|z', t')$ , por una suma de fuerzas impulsoras armónicas simples

$$I(z, t|z', t') = \frac{T}{2\pi} \delta(z - z') \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n(t-t')} \Delta\omega. \quad (12-122)$$

De donde, por los resultados de la sección anterior, hallamos que

$$G(z, t|z', t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} G_\omega(z|z') d\omega, \quad (12-123)$$

donde  $G_\omega(z|z')$  es la respuesta a la fuerza sinusoidal  $T\delta(z - z')e^{i\omega t}$  aplicada al punto  $z = z'$ .

### Problemas

12-1. Una cuerda de 1 m de largo y densidad  $\mu = 4 \times 10^{-4}$  Kg/m, con sus extremos fijos, está tensada con la fuerza de 1 newton. En un instante  $t = 0$ , el centro de la cuerda es desplazado 0.1 m, como se indica en la figura 12-17, y después, cuando está en reposo, se le suelta. Hállese el desplazamiento de los puntos de la cuerda en los tiempos siguientes.

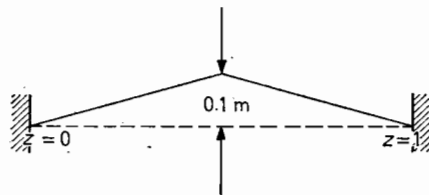


FIG. 12-17

12-2. Una cuerda horizontal de longitud  $l$  está bajo la acción de una tensión (o tracción)  $T$ . Su extremo  $z = 0$  está fijo y su extremo  $z = l$  está unido a una cuenta de tamaño y masa despreciables, que se puede deslizar libremente en un alambre vertical, sin rozamiento. Suponiendo que el desplazamiento vertical de la cuenta sea

pequeño: a) hállese la condición en la frontera que tiene que ser satisfecha por cualquier modo de vibración de cuerda en su extremo  $z = l$ ; b) obténganse los modos normales de vibración de la cuerda.

12-3. a) Repítase la parte a) del problema anterior para el caso en que el movimiento de la cuenta esté restringido por una fuerza de rozamiento proporcional a su velocidad.

b) Hállese la ecuación trascendente cuyas raíces den los modos normales de vibración de la cuerda.

12-4. Considérese una cuerda horizontal semiinfinita, sometida a una tensión  $T$ , uno de cuyos extremos, el  $z = 0$ , está terminado por una cuenta de masa despreciable que se puede deslizar libremente en un alambre vertical. El movimiento de la cuenta está restringido por una fuerza proporcional a su velocidad,

$$F_{\text{amort}} = -\frac{2T}{v} \lambda \frac{\partial \Psi(0, t)}{\partial t}.$$

Una onda armónica incide sobre el extremo  $z = 0$ . Hállese la onda reflejada en función de la constante de proporcionalidad,  $\lambda$ . ¿Para qué valor de  $\lambda$  no hay onda reflejada?

12-5. Repítase el problema 12-2 para el caso en que la cuenta tenga una masa  $m$ .

12-6. Repítase el problema 12-3 para el caso en que la cuenta tenga una masa  $m$ .

12-7. El extremo  $z = l$  de una cuerda de longitud  $l$  sometida a una tensión  $T$  está fijo y el extremo  $z = 0$  está obligado a moverse sinusoidalmente de acuerdo con la ley

$$\psi(0, t) = A \text{ sen } \omega t.$$

Encontrar la solución de estado estacionario de la cuerda.

12-8. Suponiendo que la fuerza de amortiguación ejercida por el aire sobre una cuerda vibrante en un punto de ella sea proporcional a la velocidad de dicho punto,

$$F_{\text{amort}} = -\frac{2T}{v} \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Delta z,$$

establézcanse las ecuaciones de movimiento para una cuerda de longitud  $l$ , con extremos fijos, sometida a una tensión  $T$  y bajo la acción de la indicada fuerza de amortiguamiento. Hállense los modos normales de vibración de la cuerda utilizando el método de separación de variables.

12-9. Hállese la solución de estado estacionario para la cuerda del problema anterior si en ella actúa la fuerza excitadora sinusoidal

$$F(z, t) = Tf(z) \cos(\omega t + \phi) \Delta z.$$

12-10. Aplíquese el método de separación de variables (sección 12-8) a la ecuación de onda tridimensional

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Esta ecuación es satisfecha, por ejemplo, por el incremento de presión de una onda sonora. Hállense los modos normales de vibración de las ondas sonoras en una caja

rectangular de aristas  $a$ ,  $b$ , y  $c$ , utilizando la condición en la frontera, o sea, la anulacion de la derivada normal de  $\psi$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \psi = 0,$$

que debe ser satisfecha por la onda (sonora) de presión en una frontera rígida.

12-11. La componente  $z$ ,  $E_3$  del vector de campo eléctrico de un tipo de onda electromagnética llamada magnética transversal (onda  $MT$ ) propagada en una guía de onda, cuyos lados son paralelos al eje  $z$ , satisface la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 E_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_3}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2},$$

y está sujeta a la condición

$$E_3 = 0$$

en la frontera de la guía. Demuéstrase que una solución para una guía de sección transversal rectangular de aristas  $a$  y  $b$  de la forma

$$E_3(x, y, z, t) = X(x)Y(y)e^{i\gamma z}e^{i\omega t},$$

con  $\gamma$  real, sólo es posible para ciertos valores de  $\omega$ . Determínese la frecuencia mínima (*frecuencia de corte*) en la que ocurrirá que la propagación no atenuada disminuirá en la guía rectangular. Hállense las frecuencias de corte para los diferentes modos de  $MT$ .

12-12. Demuéstrase que la energía total contenida en el movimiento de vibración de una cuerda de longitud  $l$  con extremos fijos es igual a la suma de la energía total contenida en cada uno de los modos normales que aparecen en el desarrollo en modos normales [ecuación (12-81)] de  $\Psi(z, t)$ .

12-13. a) La componente del campo eléctrico de una onda electromagnética plana polarizada que se propaga a lo largo del eje  $z$  en un medio isotrópico satisface la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2},$$

donde  $\mu$  y  $\epsilon$  son, respectivamente, la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica (o constante dieléctrica) del medio. Suponiendo que esta onda incida normalmente sobre la superficie de separación de dos regiones en que las velocidades de fase de la onda son, respectivamente  $v_1$  y  $v_2$ , donde

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{\mu_i \epsilon_i}}.$$

Hállense los coeficientes de reflexión y transmisión,  $r_{12}$  y  $t_{12}$ , para una onda plana armónica polarizada, dado que para  $\mu_1 = \mu_2$

$$E_1 = E_2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial E_1}{\partial z} = \frac{\partial E_2}{\partial z}$$

son las condiciones en la frontera satisfechas por la componente del campo eléctrico de la onda en la superficie de separación. Exprésense  $r_{12}$  y  $t_{12}$  en función del índice relativo de refracción

$$n_{12} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

de los dos medios, donde  $n_1$  es el índice de refracción del medio 1 y  $n_2$  el índice de la región 2.

b) Refiriéndonos a la figura 12-11, para el caso en que  $4ak_2 = \pi$ , hállese la relación que debe ser satisfecha por las constantes de propagación,  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$ , de una onda armónica en los tres medios para que no haya onda reflejada [ecuación (12-62)]. Exprésese esta relación en función de los índices de refracción,  $n_i$ , de los tres medios.

12-14. Un medio ópticamente activo es aquel en que una onda polarizada circularmente a la derecha tiene una velocidad de fase diferente a la de una onda polarizada circularmente a la izquierda. Como resultado de esta diferencia de las velocidades de fase, la superposición de ondas polarizadas circularmente, una a la derecha y otra a la izquierda, que tengan la misma amplitud y marchen en la misma dirección y sentido, dará un vector de campo eléctrico que, en función de  $z$ , representará un movimiento de precesión. Por consiguiente, si nos concentramos sobre un punto de un frente de onda de la onda combinada, hallaremos que el plano de polarización del vector del campo eléctrico en dicho punto gira a medida que la onda pasa a través del medio. Exprésese el ángulo de rotación del plano de polarización en función de los índices de refracción,  $n_+$  y  $n_-$ , para las ondas polarizadas a la derecha y a la izquierda, y del espesor,  $d$ , del medio.

12-15. Consideremos la cuerda de longitud  $2l$  con extremos fijos que se representa en la figura 12-18. El punto central de esta cuerda está unido a un resorte de constante (de elasticidad)  $k$ .

a) Demuéstrase que sólo los modos simétricos de vibración de la cuerda, cuando ésta vibra libremente, cambian por la presencia del resorte.

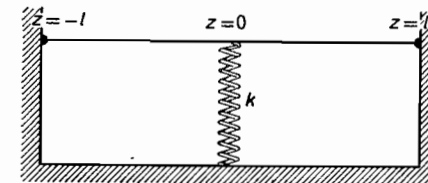


FIG. 12-18

b) Hállese la condición en la frontera que deben satisfacer las soluciones que describen el movimiento de la cuerda en el punto  $z = 0$ .

c) Obténgase la ecuación trascendente cuyas raíces dan las frecuencias normales de los nuevos modos simétricos.

d) Hállese, ya sea partiendo de la respuesta a la parte c) o del desarrollo en modos normales de la función de Green para la cuerda, una fórmula aproximada para el cambio que produce en las frecuencias normales un resorte de constante muy pequeña.

12-16. Considérese la cuerda de longitud  $2l$  con extremos fijos de la figura 12-19, a cuyo centro está unida una cuenta de masa  $m$ .

a) Considérese que la cuerda se compone de las dos secciones definidas por  $-l \leq z \leq 0$  y  $0 \leq z \leq l$ , y hállese las condiciones en la frontera que debe satisfacer la solución para la cuerda vibrante en el punto  $z = 0$ .

- b) Hállese la ecuación trascendente cuyas raíces dan las frecuencias normales de vibración del sistema.  
 c) Obténgase una estimación del desplazamiento de la frecuencia normal con valores pequeños de  $m$ .

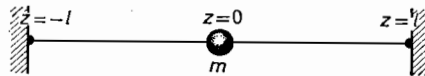


FIG. 12-19

- d) Considérese la cuerda con la cuenta como una cuerda con densidad (de masa) lineal

$$\bar{\mu} = \mu + m\delta(z),$$

y considérese la contribución a la onda del término  $m\delta(z)$  en  $\bar{\mu}$ , como un término no homogéneo. Utilícese la forma cerrada de la función de Green para hallar una solución de este problema. Demuéstrese que la solución así obtenida da, para  $z = 0$ , la ecuación trascendente de la parte b).

- e) Utilícese el desarrollo en modos normales de la función de Green para obtener una estimación del desplazamiento de la frecuencia de resonancia para valores pequeños de  $m$ . Compárese el resultado con la respuesta a la parte c).

12-17. En la figura 12-20 se muestran dos cuerdas idénticas de longitud  $2l$ , ambas con los extremos fijos, sometidas a una tensión  $T$  y acopladas por un resorte de constante (de elasticidad)  $k$  que une sus centros.

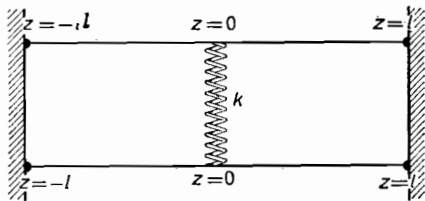


FIG. 12-20

- a) Establézcanse las ecuaciones de onda satisfechas por las cuerdas y hállese las condiciones en la frontera satisfechas por las soluciones en los puntos medios de las cuerdas.

- b) Demuéstrese que las soluciones antisimétricas

$$\psi_i = A \sin \frac{\pi z}{l} e^{i\omega t}, \quad i = 1, 2$$

para las cuerdas aisladas son, también, soluciones normales para las cuerdas acopladas.

- c) Como las ecuaciones diferenciales parciales satisfechas por las cuerdas son invariables ante una permutación de los números asignados a las cuerdas, será probable que la transformación

$$\phi_1 = \psi_1 + \psi_2, \quad \phi_2 = \psi_1 - \psi_2$$

simplifique las ecuaciones de movimiento y las condiciones en la frontera. Demuéstrese que esta transformación produce un par de ecuaciones diferenciales parciales independientes para  $\phi_1$  y  $\phi_2$  con condiciones en la frontera más simples en  $z = 0$ .

- d) Hállese la ecuación trascendente cuyas raíces dan las frecuencias normales de los modos simétricos (con respecto a  $z$ ) de vibración del sistema.

## Teoría especial o restringida de la relatividad

En nuestra presentación de las ecuaciones clásicas de movimiento, hicimos la aclaración que sólo eran suficientes para la descripción del movimiento de partículas cuya velocidad es pequeña en relación con la de la luz en el vacío. Por consiguiente, nuestras exposiciones de los capítulos precedentes se han limitado a la aplicación de las ecuaciones de Newton al movimiento de un sistema de partículas a baja velocidad. Cuando las velocidades observadas de las partículas tengan magnitudes que sean comparables a  $c$ , que es la de la luz, los resultados obtenidos con estas ecuaciones están en desacuerdo con las observaciones experimentales. Por ejemplo, un electrón de masa  $m_0$  y carga eléctrica  $-e$  que fuera acelerado, a partir del reposo, por una diferencia de potencial eléctrico,  $\phi$ , se observaría, según la mecánica clásica, que se mueve con una velocidad

$$v = \sqrt{\frac{2e\phi}{m_0}}$$

En lugar de eso, hallamos que la relación entre la velocidad observada del electrón y el potencial acelerador, está expresada por la ecuación

$$m_0 c^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right] = e\phi.$$

Observaremos que esta última expresión se reduce al resultado clásico para velocidades  $v \ll c$ .

Hay otros innumerables ejemplos que ilustran la discrepancia entre el movimiento real de las partículas a velocidades comparables con la de la luz y el movimiento pronosticado por la mecánica clásica de Newton. Evidentemente, necesitamos una modificación de nuestra formulación fundamental

de la mecánica y de las ecuaciones básicas de movimiento, para que los resultados estén de acuerdo con las observaciones experimentales de las partículas que se mueven a altas velocidades.

Este capítulo estará dedicado a la modificación de la mecánica newtoniana, conocida como *teoría especial de la relatividad* y a la aplicación de las ecuaciones relativistas de movimiento a la electrodinámica de partículas relativistas (o sea las que se mueven a alta velocidad). La teoría especial de la relatividad trata, entre otras cosas, de las relaciones entre los resultados de las mediciones de cantidades físicas observables efectuadas por diferentes observadores inerciales y su formulación matemática de las leyes físicas básicas.

Bastante interesante fue el fracaso de la física clásica para explicar el hecho observado experimentalmente de que la velocidad de la luz en el vacío es constante independientemente del movimiento del observador,\* lo cual condujo a Einstein a extender el principio clásico de la relatividad para que comprenda también todas las demás leyes de la naturaleza. Este principio clásico de la relatividad establece que las leyes de la mecánica tienen la misma forma con respecto a todos los observadores inerciales. Fue el genio de Einstein el que reconoció la imposibilidad de la detección o percepción del movimiento absoluto, y el que lo condujo a postular este extendido *principio de relatividad* y a la suposición de que la velocidad de la luz en el vacío es constante, la misma para todos los observadores inerciales.

Esta supuesta constancia de la velocidad observada de la luz y sus consecuencias, están en desacuerdo con nuestra comprensión de la naturaleza basada en el sentido común, la cual ha sido condensada de nuestras experiencias cotidianas con fenómenos explicables por la física clásica. No obstante, la concordancia entre las observaciones experimentales y las predicciones teóricas basadas en las ecuaciones fundamentales supuestas de una teoría es el único criterio para poder medir la validez de la teoría y las numerosas corroboraciones experimentales de las predicciones de la teoría especial de la relatividad han borrado, por ahora, cualquier duda en cuanto a su validez fundamental.

### 13-1 La transformación de Lorentz

El suponer constante la velocidad de la luz requiere que cambiemos nuestro concepto clásico del tiempo como una cantidad física absoluta que es independiente del movimiento del observador. El que ya no se puedan

\* A. A. Michelson y E. W. Morley, *Am. J. Sci.*, **34**, 333 (1887); *Phil. Mag.*, **24**, 449 (1887).

igualar los intervalos de tiempo  $\Delta t$  y  $\Delta t'$ , medidos por dos distintos observadores inerciales, se puede ver considerando la descripción matemática de un frente de onda emitido en cierto instante de tiempo, elegido para que sea el tiempo  $t = t' = 0$ , desde un punto que se escoge como los orígenes coincidentes instantáneamente de los dos distintos observadores inerciales. Como la velocidad de la luz es la misma en todas direcciones para todos los observadores inerciales, cada observador encontrará que el frente de onda es una esfera con el centro situado en el origen de su sistema de coordenadas, puesto que éste es el punto desde el cual ve el observador que la onda está siendo emitida. Esta conclusión es contraria a nuestra experiencia clásica, a base de la cual podríamos prever que cada observador vería el mismo frente esférico de onda con su centro situado en el punto desde el cual ésta era emitida, es decir, el punto en que el origen del sistema de coordenadas de dicho observador fue situado en el instante de los tiempos  $t = t' = 0$ . Por consiguiente, el que la velocidad de la luz sea constante nos conduce a la conclusión de que los dos observadores inerciales ven diferentes frentes de onda esféricos que son descritos, respectivamente, por las ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad \text{y} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c'^2 t'^2. \quad (13-1)$$

Evidentemente, los dos observadores pueden utilizar el frente de onda emitido en el instante  $t = t' = 0$  para situar la posición de una partícula,  $P$ , en reposo, es decir, con respecto al primer observador inercial (o sea, con coordenadas sin comillas o primas) y observarían que se movería con una velocidad  $-v$  con respecto al segundo observador inercial (coordenadas con comillas o primas). Esto lo podrá lograr cada observador midiendo el tiempo en que la onda reflejada o dispersada por la partícula llega al origen de su sistema de coordenadas. Si este tiempo es, respectivamente,  $2t$  y  $2t'$ , entonces el observador del sistema sin primas concluirá que la partícula estaba situada, en el tiempo  $t$ , a una distancia

$$r = ct$$

de su origen,  $O$ , mientras que el otro observador (el del sistema con primas) concluirá que, en el tiempo  $t'$ , estaba a una distancia

$$r' = ct'$$

de su origen,  $O'$ . Evidentemente,

$$r \neq r',$$

y, por tanto, hemos de concluir que, semejantemente,

$$t \neq t'.$$

Por consiguiente, vemos que la suposición de la constancia de la velocidad de la luz, nos lleva al hecho de que distintos observadores inerciales, cada uno de los cuales utilice un reloj que marche uniformemente calibrado o graduado para medir intervalos en la misma unidad de tiempo, obtendrán, por lo general, como en el caso que acaba de explicarse, distintas medidas del tiempo que tarda una onda luminosa para ir de un punto a otro. En consecuencia, puesto que la determinación de la posición de una partícula implica invariablemente el empleo de ondas de luz u otras señales que se propaguen con la velocidad de ésta, se desprende que los distintos observadores inerciales darán diferentes descripciones cinemáticas del movimiento de las partículas. Es natural, por lo tanto, que busquemos las relaciones que puedan existir entre dichas descripciones cinemáticas diferentes del movimiento de una partícula hechas por distintos observadores.

Las ecuaciones de transformación de Lorentz relacionan las coordenadas  $(x, y, z, t)$  de espacio y tiempo que utiliza un observador en su descripción del movimiento de una partícula con las coordenadas  $(x', y', z', t')$  de espacio y tiempo que emplea un segundo observador para describir el movimiento de la misma partícula. La especificación de las cuatro coordenadas,  $x, y, z$  y  $t$ , determinadas, como hemos dicho, con el empleo de ondas luminosas, se denomina *evento*.

Antes de proseguir con la deducción de las ecuaciones de transformación de Lorentz nos detendremos a considerar la forma matemática que es probable que obtengamos para estas ecuaciones de transformación. Naturalmente, supondremos que cada observador inercial ha establecido, para sí mismo, un sistema isotrópico de coordenadas cartesianas y que utiliza un reloj, que ha sido calibrado o graduado para medir el paso del tiempo en una proporción uniforme. La calibración o graduación de un reloj puede comprobarse fácilmente midiendo el tiempo que tarda una señal luminosa en llegar a una serie de puntos igualmente espaciados sobre una línea recta. Una pequeña variación  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$  de las coordenadas de espacio y tiempo de un evento examinado por un observador es equivalente a un cambio  $(\Delta x', \Delta y', \Delta z', \Delta t')$  en las coordenadas de tiempo y espacio del mismo evento según es notado por un segundo observador. Como la velocidad de la luz se encuentra que es la misma en todas direcciones y, por consiguiente, el espacio es isotrópico, es plausible suponer que la relación entre los cambios observados  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$  y  $(\Delta x', \Delta y', \Delta z', \Delta t')$  en un evento es independiente de las coordenadas  $(x, y, z, t)$ . (Después de todo, la elección de los orígenes de los sistemas de coordenadas, los instantes o tiempos  $t = 0$  y  $t' = 0$  y la orientación de los ejes de coordenadas son en realidad completamente arbitrarios.) La única transformación entre coordenadas en la cual los cambios o variaciones diferenciales tienen esta pro-

riedad es la transformación lineal que, en notación con operador, está expresada por

$$|\mathbf{r}\rangle = \mathbf{S}|\mathbf{r}'\rangle, \quad (13-2)$$

en la que poniendo

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict,$$

$$|\mathbf{r}\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad (13-3)$$

$$|\mathbf{r}'\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix}, \quad (13-4)$$

y  $\mathbf{S}$  es el operador de la transformación de Lorentz, que está representado por una matriz de dieciséis elementos,  $4 \times 4$ , con los elementos matriciales  $S_{ij}$ .

Habiendo admitido que la transformación ha de ser lineal, procederemos a una evaluación de los elementos matriciales de la matriz de transformación de Lorentz. Al hacerlo, nos limitaremos al caso en que los ejes

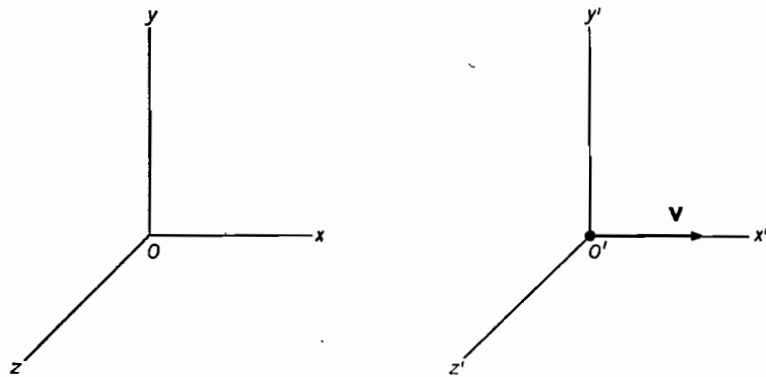


FIG. 13-1

de coordenadas cartesianas de los sistemas de los citados observadores inerciales se escojan paralelos entre sí, respectivamente, y el vector de velocidad relativa de los dos observadores esté a lo largo de los ejes  $x$  de los mencionados sistemas (fig. 13-1). El vector  $\mathbf{V}$  de la figura representa la

velocidad relativa de  $O'$  con respecto a  $O$ . Evidentemente, con esta elección de ejes, un cambio de la coordenada  $x$  o del tiempo  $t$  de un evento examinado por el observador del sistema sin primas no puede producir un cambio de las coordenadas  $y'$  y  $z'$  del mismo evento descrito por el observador del sistema con primas y viceversa. Notemos que cuando un observador ve que una partícula se mueve sobre el eje  $x$ , el otro observador verá igualmente que la partícula se mueve sobre el eje  $x$ . En consecuencia, concluimos que las ecuaciones de transformación se reducen a

$$\begin{aligned} x_1 &= S_{11}x'_1 + S_{14}x'_4, \\ x_2 &= S_{22}x'_2 + S_{23}x'_3, \\ x_3 &= S_{33}x'_3 + S_{32}x'_2, \\ x_4 &= S_{41}x'_1 + S_{44}x'_4, \end{aligned} \quad (13-5)$$

en las que obviamente,  $S_{22} = S_{33}$  y  $S_{23} = S_{32} = 0$ .

Después hallaremos que la constante  $S_{22}$  vale 1. La matriz de transformación de Lorentz se reduce, por tanto, a

$$(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & 0 & S_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S_{41} & 0 & 0 & S_{44} \end{bmatrix}. \quad (13-6)$$

Podemos simplificar aún más la matriz de transformación de Lorentz observando que en cada sistema de coordenadas la descripción del frente de onda de la luz emitida en un tiempo  $t = t' = 0$ , está dada por la ecuación (13-1), o sea,

$$(\mathbf{r}|\mathbf{r}) = (\mathbf{r}'|\mathbf{r}') = 0,$$

donde

$$(\mathbf{r}|\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^4 x_i^2.$$

Luego utilizando

$$|\mathbf{r}\rangle = \mathbf{S}|\mathbf{r}'\rangle,$$

y su transpuesta

$$\langle \mathbf{r} | = \langle \mathbf{r}' | \tilde{\mathbf{S}},$$

hallaremos que

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{r}' | \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{S} | \mathbf{r}' \rangle = \sum_{i,j} x'_i \tilde{S}_{ik} S_{kj} x'_j = 0. \quad (13-7)$$

Como esta última ecuación es satisfecha en cualquier tiempo para todos los puntos de frente de onda, se desprende, necesariamente, que el coeficiente del término  $x'_1 x'_4$  es nulo

$$\sum_{k=1}^4 \tilde{S}_{1k} S_{k4} = \sum_{k=1}^4 S_{k1} S_{k4} = 0$$

o

$$S_{11}S_{14} + S_{41}S_{44} = 0. \quad (13-8)$$

Otras dos relaciones entre los elementos de la matriz de transformación de Lorentz pueden hallarse como sigue. Notemos que los eventos del origen  $O$  del observador del sistema sin primas, están especificados respectivamente por

$$x_1 = 0, \quad x_4 = ict, \quad (13-9)$$

y

$$x'_1 = -Vt', \quad x'_4 = ict'$$

por los dos observadores. Similarmente, para el origen  $O'$  del observador del sistema con primas, los sucesos están especificados por

$$x'_1 = 0, \quad x'_4 = ict', \quad (13-10)$$

y

$$x_1 = Vt, \quad x_4 = ict.$$

Introduciendo la ecuación (13-9) en las ecuaciones de transformación (13-5), tenemos

$$0 = S_{11}(-Vt') + S_{14}(ict') \quad \text{o} \quad S_{14} = -\frac{iV}{c} S_{11}, \quad (13-11)$$

e introduciendo la ecuación (13-10) en la (13-5) obtenemos

$$Vt = S_{14}(ict') \quad \text{y} \quad ict = S_{44}(ict'),$$

de donde tenemos

$$S_{14} = -\frac{iV}{c} S_{44}. \quad (13-12)$$

Las ecuaciones (13-8), (13-11) y (13-12) nos dan la solución

$$S_{11} = S_{44} \quad \text{y} \quad S_{14} = -S_{41}. \quad (13-13)$$

Ahora procederemos a demostrar que una cuarta relación entre los elementos de la matriz de transformación de Lorentz es

$$S_{11}^2 + S_{14}^2 = 1, \quad (13-14)$$

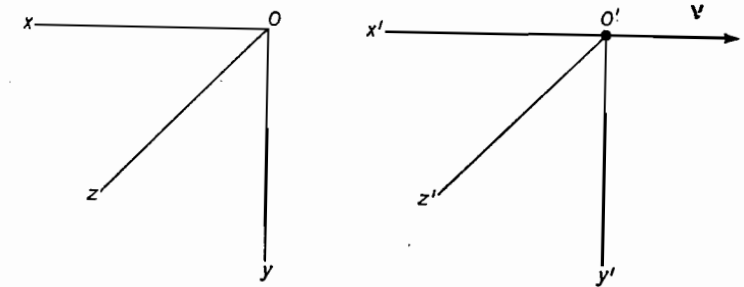


FIG. 13-2

que es suficiente para proporcionarnos los valores de los elementos matriciales  $S_{ij}$ :

$$S_{11} = S_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (13-15)$$

$$S_{14} = -S_{41} = \frac{-iV/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (13-16)$$

En el proceso hallaremos también que

$$S_{22} = S_{33} = 1. \quad (13-17)$$

De donde hallaremos que las ecuaciones de transformación de Lorentz son

$$x_1 = \frac{x'_1 - (iV/c)x'_4}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x_2 = x'_2, \\ x_3 = x'_3, \quad x_4 = \frac{x'_4 + (iV/c)x'_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (13-18)$$

Es interesante observar que la condición para que las coordenadas,  $x, y, z, t$ , obtenidas empleando estas ecuaciones de transformación para cualesquiera valores reales de  $x', y', z'$  y  $t'$ , sean reales, significa que  $\sqrt{1 - (V^2/c^2)}$  tiene que ser real. Esto obliga a que la magnitud de la velocidad relativa observada,  $V$ , de un observador inercial con respecto a otro, sea menor que la velocidad de la luz. En la sección 13-3 veremos que esta restricción se mantiene para la magnitud de cualquier velocidad observada.

Para hallar la ecuación (13-14) notemos que una rotación de  $180^\circ$  de los ejes de coordenadas alrededor de los ejes  $z$  respectivos, invierte los ejes  $x$  y  $y$  a las posiciones indicadas en la figura 13-2. La matriz de transformación para esta orientación de los ejes es, evidentemente,

$$(\bar{\mathbf{S}}) = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & 0 & -S_{14} \\ 0 & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} & 0 \\ -S_{41} & 0 & 0 & S_{44} \end{bmatrix}, \quad (13-19)$$

donde los  $S_{ij}$  son los elementos de la matriz de la transformación de Lorentz original. Pero la nueva orientación de los ejes nos dice que  $(\bar{\mathbf{S}})$  es la matriz de la transformación de Lorentz que transforma las coordenadas de un evento en el sistema inercial con primas a las coordenadas del evento en el sistema sin primas, con respecto al cual se mueve el primer sistema con una velocidad de magnitud  $V$  dirigida a lo largo del sentido negativo del eje  $x$ . Pero esta es la matriz de transformación que cambia la descripción de un evento en el sistema de coordenadas con primas al sistema de coordenadas sin primas para la orientación original de sus ejes de coordenadas (fig. 13-1). Luego [ecuación (13-13)]  $(\bar{\mathbf{S}}) = (\tilde{\mathbf{S}})$  es la matriz de la transformación de Lorentz que es la inversa de  $(\mathbf{S})$ , esto es,

$$(\tilde{\mathbf{S}})(\mathbf{S}) = (\mathbf{1}). \quad (13-20)$$

Con la ecuación (13-20) hallamos fácilmente las ecuaciones (13-14) y (13-17).

Es de bastante interés que hayamos hallado que la transformación de Lorentz es una transformación ortogonal. En consecuencia, si consideramos eventos que se representen por vectores en un espacio vectorial tetradimensional y que  $|\mathbf{r}\rangle$  y  $|\mathbf{r}'\rangle$  sean dos diferentes descripciones del mismo evento con respecto a ejes de coordenadas orientados de manera diferente en dicho espacio vectorial tetradimensional, entonces se ve que los sistemas de coordenadas de cuatro dimensiones de distintos observadores inerciales tienen orientaciones diferentes en tal espacio, y que la transformación de Lorentz representa una rotación propia\* en el citado espacio. El espacio vectorial tetradimensional recibe el nombre de *espacio universal* o *espacio de Minkowski*.

Una rotación general en un espacio tetradimensional es, por supuesto, difícil de visualizar. No obstante, en el caso especial considerado, en que la velocidad relativa de los dos observadores está a lo largo de sus ejes  $x$  paralelos, la transformación de Lorentz representa una rotación en el plano  $x_1x_4$ . Para ver que esto es realmente así, consideremos un evento del punto  $O'$ , el origen del espacio del observador del sistema de coorde-

\* Una rotación propia se define por una transformación ortogonal cuya matriz de transformación tiene un determinante de valor +1.

nadas con primas. Para el observador del sistema sin primas,  $I$ , los eventos de  $O'$  están especificados por el vector de posición tetradimensional

$$|\mathbf{r}\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} Vt \\ 0 \\ 0 \\ ict \end{bmatrix}, \quad (13-21)$$

mientras que para el observador del sistema con primas,  $I'$ , están especificados por

$$|\mathbf{r}'\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ict' \end{bmatrix}. \quad (13-22)$$

Por consiguiente, el eje de la coordenada  $x'_4$  de  $I'$  se encuentra sobre el vector del evento en el espacio de cuatro dimensiones, mientras que con respecto al observador del sistema sin primas, el vector del evento se encuentra en el plano  $x_1x_4$ , formando un ángulo  $\theta$  con el eje  $x_4$  (fig. 13-3), donde

$$\text{tg } \theta = \frac{-iV}{c}. \quad (13-23)$$

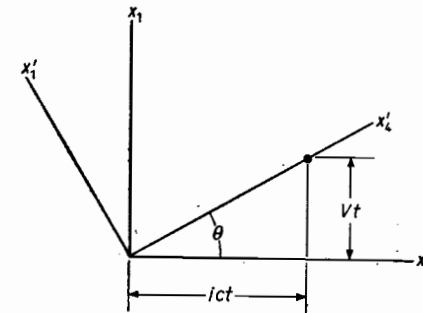


FIG. 13-3

Como se puede ver en la figura 13-3, las componentes del vector del evento sobre los ejes  $x_1$ ,  $x_4$ ,  $x'_1$  y  $x'_4$ , están relacionadas por

$$x_1 = x'_1 \cos \theta + x'_4 \text{ sen } \theta, \quad (13-24)$$

$$x_4 = -x'_1 \text{ sen } \theta + x'_4 \cos \theta.$$



Ahora bien, para hallar resultados compatibles con la elección de los ejes positivos, debemos escoger

$$\cos \theta = [1 + \operatorname{tg}^2 \theta]^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (13-25)$$

$$\operatorname{sen} \theta = -[1 - \cos^2 \theta]^{1/2} = \frac{-iV/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (13-26)$$

En consecuencia, obtenemos las ecuaciones

$$x_1 = \frac{x'_1 - (iV/c)x'_4}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x_4 = \frac{x'_4 + (iV/c)x'_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (13-27)$$

que están de acuerdo con las ecuaciones (13-18).

Por tanto, como la transformación de Lorentz es una transformación lineal ortogonal, dejará invariante la magnitud de un vector de posición de cuatro dimensiones. En cualquier evento, tenemos, por consiguiente,

$$(\mathbf{r}|\mathbf{r}) = (\mathbf{r}'|\mathbf{S}\mathbf{S}|\mathbf{r}') = (\mathbf{r}'|\mathbf{r}'). \quad (13-28)$$

Los eventos del movimiento de una partícula trazan en el espacio tetradimensional una curva llamada *línea universal* de la partícula.

Partiendo del cambio  $|\Delta\mathbf{r}'|$  del vector tetradimensional de posición de un evento de una partícula, podemos hallar otro invariante importante, la cantidad  $\Delta\tau$  definida por

$$\Delta\tau^2 = -\frac{1}{c^2} (\Delta\mathbf{r}'|\Delta\mathbf{r}'), \quad (13-29)$$

que nos da

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t, \quad (13-30)$$

donde

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} \quad (13-31)$$

es la velocidad observada de la partícula.

La cantidad invariante

$$\tau = \int d\tau = \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (13-32)$$

se denomina *tiempo propio*. En la siguiente sección veremos que  $\tau$  es el tiempo medido por un reloj unido al sistema de coordenadas que siempre se mueve con la partícula.

### 13-2 Dilatación del tiempo y contracción Lorentz-Fitzgerald

En la sección anterior concluimos que la admisión de que la velocidad de la luz es constante, conduce a diferentes especificaciones de los eventos hechas por los distintos observadores inerciales. Como resultado, los eventos (medidas de posición y tiempo) que un observador aprecia que ocurren simultáneamente no serán vistos como simultáneos por un distinto observador inercial; y los intervalos de tiempo entre dos eventos también se observarán que son diferentes por distintos observadores inerciales.

De manera semejante, distintos observadores asignarán diferentes componentes del espacio a un evento y, por consiguiente, obtendrán distintas medidas para la distancia entre dos puntos del espacio. En consecuencia, sin una apropiada comprensión de la medida de un evento, podemos encontrarnos con resultados en apariencia paradójicos. Un análisis explícito cuidadoso de la manera como se realizan las mediciones, según se admite en la teoría especial de la relatividad, nos indicará que los resultados que aparentan ser paradójicos, lo parecen sólo porque se obtuvieron por mediciones que no fueron las mismas. Como fácilmente se encuentran análisis de tales paradojas en otras partes, no les dedicaremos más espacio aquí.\*

En esta sección trataremos ligeramente los temas de la dilatación del tiempo y la contracción de Lorentz-Fitzgerald.

La dilatación del tiempo se refiere a la relación entre el tiempo de los eventos tomado por un observador,  $I$ , en un reloj que se mueve a velocidad constante  $\mathbf{V}$  sobre el eje  $x$  y el tiempo de los eventos tomado en el mismo reloj por un observador,  $I'$ , que se mueve con el reloj, o sea, más concretamente, por un observador con respecto al cual el reloj está en reposo y situado en el origen,  $O'$ , de su sistema de coordenadas. Para este último observador, los eventos del reloj son iguales a los eventos de  $O'$ , y están determinados por

$$x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0 \quad \text{y} \quad x'_4 = ict'.$$

El observador  $I$ , por otra parte, al medir los eventos de  $O'$  y utilizar un reloj que fue sincronizado para que leyera

$$t = t' = 0$$

en el instante en que coincidan los orígenes  $O$  y  $O'$  de los sistemas de coordenadas de los observadores, describirá los eventos de  $O'$  por

$$x_1 = Vt, \quad x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = ict.$$

\* R. P. Feynman y colaboradores, *The Feynman Lectures on Physics*. Vol. 1, pág. 16-3. Reading, Mass.: Addison Wesley, 1963. Edwin R. Taylor, *Introductory Mechanics*. Nueva York: Wiley, 1963.

Por consiguiente, por las ecuaciones (13-18), hallamos que la relación entre  $t$  y  $t'$  es

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (13-33)$$

Esto es, el observador  $I$  verá que su reloj da una medida mayor del tiempo de los eventos de  $O'$  que la del reloj del observador  $I'$  que se mueve con  $O'$ . El observador  $I$ , por lo tanto, sostendrá que el reloj que él observa que se mueve marcha más despacio que su reloj.

Debemos señalar que esta dilatación del tiempo ha sido observada experimentalmente en rayos cósmicos que contienen mesones  $\mu$  inestables, que se mueven rápidamente. Siendo el propio período o tiempo medio de vida (duración media) de un mesón  $\mu$  en reposo únicamente de  $2.2 \times 10^{-6}$  segundos, la distancia media cubierta por un mesón en movimiento rápido no es probable clásicamente que exceda de

$$d = 2.2 \times 10^{-6} c = 6.6 \times 10^2 \text{ m.}$$

Sin embargo, estos mesones  $\mu$  se crean en la atmósfera exterior y cierta cantidad de ellos aparece en el laboratorio después de haber recorrido una distancia de  $10^4$  metros. Esto sólo es posible porque los tiempos de vida medidos en los mesones en movimiento rápido son mayores que los medidos en los mesones en reposo. La relación entre estos dos tiempos de vida está de acuerdo con la predicción de la ecuación (13-33).

Observaremos que, con respecto al sistema en reposo de una partícula (el sistema de coordenadas con respecto al cual la partícula está instantáneamente en reposo) la rapidez (de marcha) del reloj unido a la partícula y que se mueve con ella y la del reloj unido al sistema en reposo son la misma:  $\Delta t' = \Delta t_0$ , donde  $\Delta t'$  es un intervalo infinitesimal de tiempo entre los eventos de la partícula medidos por el reloj del sistema en reposo, y  $\Delta t_0$  el intervalo infinitesimal de tiempo correspondiente, medido por el reloj de la partícula. Por tanto, para cualquier otro observador, con respecto al cual la partícula se mueve con una velocidad instantánea  $v$ , hallamos, con la ecuación (13-33), que

$$\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (13-34)$$

Si continuamos igualando [ecuación (13-34)] los intervalos de tiempo infinitesimales  $\Delta t_0$  del reloj de la partícula a los  $\Delta t$  medidos por el observador que ve que la partícula se mueve con la velocidad  $v(t)$ , entonces, sumándolos obtenemos

$$\sum \Delta t_0 = \sum \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t,$$

o sea que

$$\tau = \int dt_0 = \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (13-35)$$

En consecuencia, el tiempo propio  $\tau$  para una partícula, definido previamente por la ecuación (13-32), es el tiempo de los eventos de la partícula leídos en el reloj que se mueve con ella.

Otra consecuencia interesante de que la velocidad de la luz sea constante es el fenómeno de *contracción de Lorentz-Fitzgerald*, o sea, el aparente acortamiento de la longitud de una varilla que esté en movimiento con respecto a un observador. Hallamos que la distancia entre dos puntos del espacio cuyos eventos son medidos simultáneamente por un observador es menor que la distancia entre estos mismos puntos del espacio que se obtiene a partir de la determinación de las componentes del espacio de los mismos eventos medidos por un distinto observador inercial. Concretamente, es la diferencia de las componentes de los vectores de posición en el espacio de cada uno de los eventos de los dos puntos extremos de la varilla sobre la dirección del vector de velocidad relativa de los dos observadores, la que parece que se ha contraído.

Para hallar la relación entre las componentes  $x$  de dos eventos que se miden como se ha indicado, supongamos que

$$l = x_2 - x_1$$

sea la proyección de la distancia entre los puntos  $(x_1, y_1, z_1)$  y  $(x_2, y_2, z_2)$  medida simultáneamente en el instante o tiempo  $t$  por el observador  $I$ . Otro observador, que utilice un sistema de coordenadas y un reloj en el que lea  $t' = 0$  cuando  $t = 0$ , según se indicó antes, encontraría que los eventos de los dos puntos quedan determinados por

$$\begin{aligned} x'_1 &= (x_1 - Vt) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \\ t'_1 &= \left(t - \frac{V}{c^2} x_1\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \\ x'_2 &= (x_2 - Vt) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \\ t'_2 &= \left(t - \frac{V}{c^2} x_2\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (13-36)$$

Por lo que hallaría

$$l' = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

o sea

$$l = l' \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (13-37)$$

Observemos que, como  $t'_1 \neq t'_2$ ,  $l'$  no es una medida significativa de la distancia entre los dos puntos. Únicamente una medida simultánea de la distancia entre dos puntos puede ser significativa. Por otra parte, si los puntos  $x'_2$  y  $x'_1$  estuvieran en reposo con respecto a  $O'$  es claro que entonces ya no sería necesaria una medida simultánea. Luego,  $l'$  obtendrá siempre el mismo resultado  $l_0$  para la distancia entre dos puntos. Por tanto,

$$l' = l_0$$

cualquiera que sea el instante en que las medidas se realicen. Así obtenemos la fórmula de la contracción de Lorentz-Fitzgerald

$$l = l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}, \quad (13-38)$$

que establece que la medida simultánea de los puntos extremos de una varilla que se mueve con una velocidad  $V$  en la dirección de su longitud harán que la varilla aparezca contraída o reducida por el factor  $\sqrt{1 - (V^2/c^2)}$ .

Observaremos que la contracción aparente de la longitud de un cuerpo en la dirección de su movimiento, excluye el movimiento de cuerpos rígidos de las consideraciones relativistas. Es decir, en la relatividad no existen cuerpos en que todos sus puntos permanezcan a distancias fijas entre sí.

### 13-3 Transformación de velocidades

En esta sección obtendremos las ecuaciones de transformación para la velocidad de una partícula. Estas se hallan fácilmente empleando las ecuaciones de transformación de Lorentz para las coordenadas de un evento. De las ecuaciones (13-18) hallamos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left( \frac{dx'}{dt'} \frac{dt'}{dt} + V \frac{dt'}{dt} \right) \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{-1/2}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy'}{dt'} \frac{dt'}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt'} \frac{dt'}{dt}, \\ \frac{dt'}{dt} &= \frac{1}{dt/dt'} = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + (dx'/dt')(V/c^2)}. \end{aligned} \quad (13-39)$$

La última ecuación nos permite expresar las otras ecuaciones de (13-39) en la forma

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \\ v_y &= v'_y \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}, \\ v_z &= v'_z \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}. \end{aligned} \quad (13-40)$$

Estas son las ecuaciones de transformación buscadas, que relacionan las componentes cartesianas de la velocidad de un punto medidas por dos distintos observadores inerciales.

Observemos que, como es lógico exigir que la sucesión en el tiempo de los eventos sea la misma con respecto a todos los observadores inerciales, nunca deberá ser negativo el denominador de la última ecuación de las (13-39). Esto nos lleva a la conclusión de que nunca se debe encontrar una velocidad observada que tenga una magnitud mayor que la de la luz.

Se demuestra fácilmente que dicha conclusión no es incompatible con las ecuaciones de transformación de la velocidad deducidas antes. Para comprobar que las ecuaciones (13-40) están de acuerdo con el principio de que no puede observarse ninguna partícula que se mueva con una velocidad mayor que la de la luz, hallemos la velocidad de una partícula con respecto al observador  $I$  sabiendo que su velocidad con respecto a  $I'$  es

$$v'_x = ac, \quad v'_y = v'_z = 0,$$

donde  $a$  es una constante de magnitud menor que uno. Haciendo

$$V = bc$$

con  $|b| < 1$ , como hemos concluido anteriormente, la ecuación (13-40) da

$$v_x = \frac{(a+b)c}{1+ab}.$$

Como para valores de  $a$  y  $b$  menores o iguales a la unidad, la fracción  $(a+b)/(1+ab)$  tiene su máximo cuando  $a = b = 1$ , resulta que para cualquier valor de  $a$  y  $b$  menor que la unidad,

$$\frac{a+b}{1+ab} < \frac{1+1}{1+1 \cdot 1} = 1.$$

Luego,  $v_x$  es también menor que  $c$ .

## 13-4 Velocidad y aceleración en cuatro dimensiones

Al tratar del movimiento relativista de una partícula, es más conveniente matemáticamente introducir el concepto de velocidad tetradimensional. La velocidad instantánea tetradimensional,  $|\mathbf{u}\rangle$  de una partícula se define por la derivada respecto al tiempo propio de la partícula de su vector tetradimensional de posición  $|\mathbf{r}\rangle$ :

$$|\mathbf{u}\rangle = \frac{d}{d\tau} |\mathbf{r}\rangle. \quad (13-41)$$

Como el tiempo propio de una partícula es una cantidad invariante de Lorentz, se desprende que las cuatro componentes de la velocidad tetradimensional se transforman, bajo una transformación de Lorentz, lo mismo que las cuatro componentes del vector tetradimensional de posición  $|\mathbf{r}\rangle$ . Es claro entonces que el vector de velocidad tetradimensional, que como el vector tetradimensional de posición, es un vector en el espacio universal, se comporta igual que  $|\mathbf{r}\rangle$  bajo cualquier rotación en dicho espacio.

En función de las componentes  $x_i$  que determinan al vector tetradimensional de posición en el espacio universal, las componentes de la velocidad tetradimensional están definidas por

$$u_i = \frac{dx_i}{d\tau}. \quad (13-42)$$

Observemos que puesto que para una partícula que se mueve con velocidad  $v$

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt,$$

las tres primeras componentes (o componentes espaciales) de la velocidad tetradimensional están relacionadas a las componentes cartesianas

$$v_i = \frac{dx_i}{dt}$$

de la velocidad ordinaria. Estas relaciones se expresan por

$$v_i = u_i \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (13-43)$$

La cuarta componente de la velocidad tetradimensional es

$$u_4 = \frac{d(ict)}{d\tau} = \frac{ic}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13-44)$$

Una ventaja inmediata de la velocidad tetradimensional es que su propiedad de transformación matemática de un sistema de coordenadas a otro

es idéntica a la propiedad de transformación del vector tetradimensional de posición. Las ecuaciones de transformación de Lorentz son, por consiguiente, más fáciles de recordar. Bajo una transformación de Lorentz tenemos

$$|\mathbf{u}\rangle = \mathbf{S}|\mathbf{u}'\rangle, \quad (13-45)$$

donde  $\mathbf{S}$  es el operador de transformación de Lorentz, o más concretamente,

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{u'_1 - (iV/c)u'_4}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & u_2 &= u'_2, \\ u_3 &= u'_3, & u_4 &= \frac{u'_4 + (iV/c)u'_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (13-46)$$

La última ecuación da

$$\frac{ic}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{ic}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} + \frac{iV}{c} \frac{v'_x}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}$$

o sea,

$$\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} = \left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (13-47)$$

la cual da las ecuaciones (13-40) cuando la introducimos en las otras ecuaciones de (13-46). Por ejemplo, se halla que

$$v_1 = u_1 \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{(v'_1 + V) \sqrt{1 - v'^2/c^2}}{\sqrt{1 - v'^2/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

o

$$v_1 = \frac{v'_1 + V}{1 + v'_1 V/c^2}.$$

Puesto que  $|\mathbf{u}\rangle$  es un vector tetradimensional en el espacio universal, se desprende que su magnitud permanece invariante bajo cualquier transformación ortogonal en dicho espacio. En consecuencia,  $\mathbf{u}^2 = (\mathbf{u}|\mathbf{u})$  es invariante para una transformación de Lorentz. Realmente, vemos que  $\mathbf{u}^2$  tiene el valor constante  $-c^2$ :

$$\mathbf{u}^2 = \sum_{i=1}^4 u_i^2 = \frac{v^2}{1 - v^2/c^2} - \frac{c^2}{1 - v^2/c^2} = -c^2. \quad (13-48)$$

Este es otro ejemplo de la utilidad del lenguaje tetradimensional en la relatividad. Se ve que si somos capaces de expresar diferentes cantidades físicas y sus relaciones en un lenguaje de tetradimensional, las propiedades de transformación de Lorentz de estas cantidades físicas y sus relaciones son

conocidas automáticamente. Además, todas las ecuaciones expresadas en lenguaje de vectores tetradimensionales retendrán automáticamente su forma matemática ante una transformación de Lorentz y, en consecuencia, satisfarán la condición puesta en las leyes fundamentales de la física por la teoría de la relatividad: que su forma matemática sea invariante bajo una transformación de Lorentz.

Análogamente a la velocidad tetradimensional definimos la aceleración tetradimensional  $|\mathbf{a}|$  de una partícula por la derivada con respecto al tiempo propio de la misma velocidad tetradimensional  $|\mathbf{u}|$

$$|\mathbf{a}| = \frac{d}{d\tau} |\mathbf{u}|. \quad (13-49)$$

En este caso, la relación entre la definición clásica de aceleración,  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ , y la parte espacial de la aceleración relativista,  $|\mathbf{a}|$ , no es una simple relación matemática. Únicamente en el marco (o sistema) en reposo de la partícula, el marco inercial con respecto al cual dicha partícula está en reposo momentáneamente, las componentes espaciales de  $|\mathbf{a}|$  están simplemente relacionadas a las componentes cartesianas de la aceleración ordinaria  $\mathbf{a}$ . De hecho en el sistema en reposo hallamos

$$a_i = a_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{y} \quad a_4 = 0. \quad (13-50)$$

Las ecuaciones (13-50) que relacionan las componentes de la aceleración tetradimensional a la aceleración ordinaria en el marco en reposo de la partícula y las ecuaciones de transformación para las aceleraciones ordinaria y tetradimensional pudieran ser utilizadas, en principio, para hallar la relación entre  $a_i$  y  $a_i$  en cualquier otro marco o sistema inercial. Sin embargo, vemos que este paso es innecesario, pues las ecuaciones de movimiento dinámicas relativistamente correctas, que consideraremos en la siguiente sección, toman una forma muy simple cuando se expresan en función de la aceleración tetradimensional y se hallarán fácilmente las soluciones de las ecuaciones de movimiento en función de la descripción del vector tetradimensional del movimiento de una partícula.

Es interesante observar que el producto interior del vector tetradimensional de la velocidad por el también tetradimensional de la aceleración es nulo:

$$(\mathbf{u}|\mathbf{a}) = 0, \quad (13-51)$$

puesto que

$$(\mathbf{u}|\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\mathbf{u}|\mathbf{u}) = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} c^2.$$

### 13-5 Dinámica relativista, ecuaciones de movimiento relativistas, masa relativista, cantidad de movimiento lineal

Considerando que las ecuaciones de movimiento de Newton, que relacionan satisfactoriamente la derivada con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento lineal de una partícula, que se mueve lentamente, con la fuerza que actúa sobre ella, no son invariantes de Lorentz, y, en consecuencia, no satisfacen al principio extendido de relatividad, vemos que es necesario obtener una generalización satisfactoria de las ecuaciones de Newton que sea invariante de Lorentz. Cualquiera que sea la forma que tome esta generalización será necesario que las ecuaciones de movimiento relativistas invariantes de Lorentz, se reduzcan a las ecuaciones de Newton para partículas que se muevan lentamente. De hecho, llegaremos a una generalización observando que en el marco o sistema en reposo de la partícula, las ecuaciones de Newton se pueden expresar en lenguaje tetradimensional. De esta manera obtendremos una generalización que se reduce a ecuaciones de movimiento de Newton en el marco en reposo de la partícula y que satisface automáticamente la condición relativista de que las ecuaciones básicas de movimiento sean invariantes de Lorentz. Por consiguiente, supondremos que las nuevas ecuaciones son las de movimiento dinámicas relativistas correctas, y procederemos a investigar la compatibilidad de sus consecuencias y su concordancia con las observaciones experimentales.

En la sección anterior vimos que en el marco en reposo de la partícula no hay distinción entre la aceleración ordinaria y las tres componentes no nulas de las aceleraciones tetradimensionales. Ahora bien, en el marco en reposo de la partícula, las ecuaciones de movimiento de Newton

$$\mathbf{F}_0 = m_0 \mathbf{a},$$

donde  $m_0$  es la masa asignada a la partícula por un observador con respecto al cual ésta está en reposo, se ha hallado que son realmente satisfactorias. Es natural, por lo tanto, suponer la existencia de una fuerza tetradimensional  $|\mathbf{K}|$  que en el marco en reposo de la partícula sólo tenga tres componentes no nulas, las cuales sean idénticas a las componentes cartesianas de la fuerza  $\mathbf{F}$  que actúa sobre la partícula. Luego, en el sistema en reposo de la partícula, hacemos

$$K_{0i} = F_{0i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$K_{04} = 0.$$

Por consiguiente, lo que hemos supuesto es la existencia de un vector de fuerza tetradimensional,  $|\mathbf{K}|$ , que está relacionado al vector de aceleración tetradimensional por la expresión

$$|\mathbf{K}| = m_0|\mathbf{a}|. \quad (13-52)$$

La ecuación (13-52) nos da ciertamente la ecuación de movimiento correcta en el marco en reposo de la partícula y es, automáticamente, una invariante de Lorentz. Por tanto, hacemos la suposición de que es la ecuación de movimiento relativista correcta, y procederemos a investigar las consecuencias de esta suposición.

En cualquier otro sistema inercial con respecto al cual se observa que la partícula se mueve con una velocidad  $\mathbf{v}$  a lo largo del eje  $x$  positivo, las componentes del vector de fuerza tetradimensional están relacionadas con las componentes  $(F_{01}, F_{02}, F_{03}, 0)$  de la fuerza que actúa sobre la partícula en su marco en reposo por

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (13-53)$$

donde  $\beta = v/c$  y  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . Partiendo de esta ecuación matricial vemos que las tres primeras componentes (o componentes espaciales) de la fuerza tetradimensional están relacionadas a la fuerza que actúa sobre la partícula en su marco en reposo, y la cuarta componente de la fuerza tetradimensional está relacionada al producto escalar de las componentes del espacio de esta fuerza y la velocidad de la partícula.

Además, con la ecuación (13-52) hallamos que

$$K_i = m_0 \frac{d}{d\tau} \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt} \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{dx_i}{dt}. \quad (13-54)$$

De donde, si continuamos utilizando la definición clásica de la fuerza por la derivada con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento lineal de las partículas, hallaremos que la fuerza clásica podría definirse por

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m_0\gamma\mathbf{v}). \quad (13-55)$$

Entonces, esta ecuación da la relación entre las componentes espaciales de la fuerza tetradimensional y las componentes cartesianas de la fuerza clásica,  $\mathbf{F}$ , que actúa sobre una partícula que se observa se mueve con una velocidad  $v$ :

$$K_i = \gamma F_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (13-56)$$

donde

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}. \quad (13-57)$$

La ecuación (13-55) da, también, la definición relativista de la cantidad de movimiento lineal clásico  $\mathbf{p}$  de la partícula:

$$\mathbf{p} = m_0\gamma\mathbf{v}. \quad (13-58)$$

Observaremos que esta definición de la cantidad de movimiento lineal de la partícula se reduce a la definición clásica familiar cuando la velocidad de la partícula es pequeña en relación con la velocidad de la luz. Desarrollando  $\gamma$  en la ecuación (13-58) y conservando únicamente los términos en  $v^2/c^2$ , hallaremos que la ecuación (13-58) da

$$\mathbf{p} = m_0\mathbf{v}.$$

Observaremos también que podemos conservar la definición clásica de la cantidad de movimiento lineal por el producto de la masa por la velocidad de la partícula, definiendo la masa  $m$  de la partícula que se observa que se mueve con una velocidad  $v$  por

$$m = m_0\gamma, \quad (13-59)$$

donde  $m_0$  es la llamada *masa en reposo* de la partícula y  $m$  su *masa relativista*.

Así también notaremos que esta variación de la masa de una partícula con su velocidad ha sido comprobada experimentalmente para electrones y otras partículas que se mueven rápidamente, y es la única modificación de las leyes de Newton que necesitamos para poder describir correctamente el movimiento relativista de las partículas.

Sin embargo, preferimos continuar describiendo el movimiento relativista de una partícula en el lenguaje de vectores tetradimensionales, pues, como hemos visto, no sólo para simplificar la transformación de las observaciones hechas en un sistema inercial a las observaciones hechas en otro sistema, sino porque además es el sistema matemático más eficiente para expresar las ecuaciones de movimiento y hallar su solución.

### 13-6 Fuerza tetradimensional, energía cinética relativista, cantidad de movimiento tetradimensional

En la sección anterior relacionamos las componentes espaciales de la fuerza tetradimensional,  $|\mathbf{K}|$ , a las componentes cartesianas de la fuerza clásica,  $\mathbf{F}$ , y hallamos que

$$K_i = \gamma F_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (13-60)$$

Podemos volver a escribir la ecuación (13-51) en la forma

$$(\mathbf{u}|m_0\mathbf{a}) = (\mathbf{u}|\mathbf{K}) = 0$$

o

$$\gamma^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} + ic\gamma K_4 = 0.$$

Con esta ecuación hallamos que la cuarta componente de la fuerza tetradimensional es dada explícitamente por

$$K_4 = \frac{i\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\gamma}{c} = \frac{i}{c} \frac{d\mathcal{J}}{d\tau}, \quad (13-61)$$

donde, como en el caso clásico, tenemos

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{d\mathcal{J}}{dt}, \quad (13-62)$$

y llamaremos energía cinética a  $\mathcal{J}$ . Comprobemos si esta definición de la energía cinética es compatible con su definición clásica. De las ecuaciones (13-52) y (13-49) encontramos que

$$K_4 = m_0 \frac{d}{d\tau} u_4 = m_0 \gamma \frac{d}{dt} (ic\gamma). \quad (13-63)$$

Entonces igualando las ecuaciones (13-61) y (13-63) hallamos

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \frac{d}{dt} (m_0 c^2 \gamma), \quad (13-64)$$

que tiene la solución

$$\mathcal{J} = m_0 c^2 \gamma + \mu, \quad (13-65)$$

donde  $\mu$  es constante.

Para pequeñas velocidades de la partícula encontramos que, dentro de los términos de segundo orden en  $v^2/c^2$ ,

$$\mathcal{J} \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \mu.$$

Por consiguiente, si deseamos que  $\mathcal{J}$  dé el resultado clásico para la energía cinética, deberá elegirse  $\mu = -m_0 c^2$ . Sin embargo, en cualquier aplicación en que aparezca la energía cinética, ésta es la diferencia entre las energías cinéticas de una partícula en dos distintos puntos de su trayectoria, o en dos casos diferentes en que aparezca. La elección de la constante  $\mu$  es, por consiguiente, de poca importancia. No obstante, desde un punto de vista relativista vemos que la elección de  $\mu = 0$  es preferible notacionalmente.\* De esta manera, la energía cinética está relacionada a la cuarta compo-

\* Es conveniente señalar que en muchos libros se escoge  $\mu = -m_0 c^2$  y la cantidad  $T = m_0 c^2 (\gamma - 1)$  se denomina energía cinética de la partícula, mientras que  $\mathcal{J} = m_0 c^2 \gamma$  se llama energía total.

nente de un vector tetradimensional, el vector de cantidad de movimiento tetradimensional definido por

$$\mathbf{p}_i = m_0 \mathbf{u}_i. \quad (13-66)$$

Las componentes espaciales de este vector de cantidad de movimiento tetradimensional son iguales a las componentes de la cantidad de movimiento lineal ordinaria,  $\mathbf{p}$ , definidas por la ecuación (13-58)

$$\mathbf{p}_i = p_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (13-67)$$

La cuarta componente de la cantidad de movimiento tetradimensional es

$$p_4 = \frac{i}{c} \mathcal{J}. \quad (13-68)$$

Observaremos que la magnitud invariante de Lorentz del vector de cantidad de movimiento tetradimensional

$$\mathbf{p}^2 = \sum_{i=1}^4 p_i^2 = p^2 - \frac{\mathcal{J}^2}{c^2} = \sum_{i=1}^4 m_0^2 u_i^2 = -m_0^2 c^2, \quad (13-69)$$

da la relación

$$\mathcal{J}^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4, \quad (13-70)$$

que está de acuerdo con la definición de la energía cinética relativista de la partícula definida por la ecuación (13-65) con  $\mu = 0$ . De

$$\mathcal{J} = m_0 c^2 \gamma \quad (13-71)$$

obtenemos

$$m = m_0 \gamma = \frac{1}{c^2} \mathcal{J},$$

que nos permite hallar la muy útil relación entre la cantidad de movimiento lineal y la energía cinética relativista

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{J}}{c^2} \mathbf{v}. \quad (13-72)$$

Notemos que la masa relativista de una partícula es una medida de su energía cinética relativista, y que un cambio de la energía cinética de una partícula aparece como un cambio de su masa relativista,

$$\Delta \mathcal{J} = (\Delta m) c^2. \quad (13-73)$$

Este resultado, en apariencia asombroso, implica que la masa no es sino otra forma de energía y que deberemos modificar, de acuerdo con ello, el principio de conservación de la energía para incluir la posible conversión de



energía de masa en alguna otra forma de energía, y viceversa. Esta conversión de masa en energía o de energía en masa se ha demostrado ampliamente por las reacciones nucleares, la fisión nuclear y la creación y destrucción de partículas elementales.

Un ejemplo más directo, citado frecuentemente, es la aniquilación observada de un par electrón-positrón en reposo y la aparición resultante de dos fotones cada uno con una energía igual a la en reposo del electrón o del positrón. Los dos fotones son necesarios para conservar la cantidad de movimiento lineal total del sistema (sección 13-16).

*Fotón* es el nombre relacionado con el haz discreto de energía electromagnética en cuya forma es radiada dicha energía. Por mecánica cuántica se ve que el fotón es una partícula de masa cero que se observa se mueve, como todas las partículas de masa cero, a la velocidad de la luz. (El neutrino es otro ejemplo de partícula que tiene masa cero.) La energía cinética total de una partícula de masa en reposo igual a cero es indeterminada, por supuesto, sobre la base de la ecuación

$$\mathcal{J} = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Por consiguiente, su energía cinética ha de hallarse por algún otro método. Para un fotón vemos que la energía cinética está relacionada con la frecuencia de la radiación emitida. Concretamente, hallamos

$$\mathcal{J} = h\nu, \quad (13-74)$$

donde  $h$  es la constante de Planck y  $\nu$  la frecuencia de la radiación.

Ahora bien, con la ecuación (13-72), que se verifica para todas las partículas, hallamos que la definición de la cantidad de movimiento lineal clásica,  $\mathbf{p}$ , de un fotón es

$$\mathbf{p} = \frac{h\nu}{c^2} \mathbf{c} = \frac{h}{\lambda} \frac{\mathbf{c}}{c}.$$

Su magnitud es

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (13-75)$$

Observaremos que esta relación entre  $p$  y  $\lambda$  es la misma que la que hay entre la longitud de onda de De Broglie y la cantidad de movimiento lineal de una partícula que hallamos en la sección 6-17.

La cantidad de movimiento tetradimensional asociada o relacionada con un fotón está dada por

$$|\mathbf{p}\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ ih\nu/c \end{bmatrix} = \frac{h}{2\pi} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ ik \end{bmatrix},$$

donde, en función de  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  y  $\mathbf{e}_z$  (los vectores unidad dirigidos sobre los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ ), el vector

$$\mathbf{k} = k_1 \mathbf{e}_x + k_2 \mathbf{e}_y + k_3 \mathbf{e}_z$$

es el vector de propagación de la onda (secciones 3-2 y 12-3). Tiene la magnitud

$$k = 2\pi/\lambda,$$

y está dirigido en el sentido de propagación del fotón. Observaremos que la magnitud invariante de Lorentz de la cantidad de movimiento tetradimensional del fotón (ecuación 13-69) es, en realidad, nula:

$$\sum_{i=1}^4 p_i^2 = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \left[ \sum_{i=1}^3 k_i^2 - k^2 \right] = 0. \quad (13-76)$$

Es interesante que, habiendo hallado la cantidad de movimiento tetradimensional del fotón, podamos relacionar, empleando la transformación de Lorentz, la longitud de onda,  $\lambda$ , o la frecuencia,

$$\nu = c/\lambda,$$

de una onda electromagnética, en un marco inercial, con su frecuencia en cualquier otro marco inercial. El cambio en la frecuencia de una onda que se produce cuando transformamos su descripción de un marco inercial a otro, se conoce como *efecto Doppler*. La utilización del vector tetradimensional de cantidad de movimiento de la onda o del vector de la propagación tetradimensional

$$|\mathbf{r}\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ ik \end{bmatrix}$$

da el resultado muy fácilmente (problema 13-6). Finalmente, observaremos que la fase de una onda armónica, definida por

$$\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t, \quad (13-77a)$$

se puede expresar por el producto interior de dos vectores tetradimensionales y, por consiguiente, es un invariante escalar. Específicamente, hallamos que

$$\varphi = \sum_{i=1}^3 k_i x_i + \left(\frac{i\omega}{c}\right) (ict) = \sum_{j=1}^4 k_j x_j = (\mathbf{r}|\mathbf{r}). \quad (13-77b)$$

### 13-7 Propiedades de transformación del campo electromagnético

En esta sección expresaremos la fuerza de Lorentz que actúa sobre una partícula cargada que se mueve en un campo electromagnético en el lenguaje de cuatro dimensiones. La posibilidad de hacer esto (no todas las fuerzas conocidas se pueden expresar en el lenguaje vectorial tetradimensional) nos permite inferir las ecuaciones de transformación para los vectores del campo electromagnético  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ .



La fuerza de Lorentz sobre una partícula cargada que se mueve con una velocidad  $\mathbf{v}$  está dada por

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}). \quad (13-78)$$

El trabajo por unidad de tiempo que efectúa esta fuerza de Lorentz sobre la partícula cargada es

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}. \quad (13-79)$$

En consecuencia, por las ecuaciones (13-60) y (13-61), se halla que el vector tetradimensional de la fuerza de Lorentz está definido por

$$K_i = \gamma F_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad K_4 = \frac{iq\gamma}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}. \quad (13-80)$$

Con las ecuaciones de transformación de Lorentz para la fuerza tetradimensional, no es difícil deducir las propiedades de la transformación de Lorentz de los vectores del campo electromagnético. Sin embargo, es más simple intentar expresar la fuerza de Lorentz que actúa sobre una partícula cargada en lenguaje de vectores de cuatro dimensiones. Recordemos que en la sección 10-7 pudimos expresar la fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada en notación matricial. Encontramos allí una matriz de  $3 \times 3$  del campo magnético que cuando operaba sobre la representación matricial del vector velocidad de la partícula daba la representación matricial del vector fuerza. Naturalmente, buscaremos, por consiguiente, cómo extender al espacio universal una matriz  $4 \times 4$  del campo magnético que cuando opere sobre la velocidad tetradimensional de la partícula dé la fuerza tetradimensional de Lorentz.

Por las propiedades de rotación y de inversión espacial del vector de inducción magnética,  $\mathbf{B}$ , tendremos la sospecha de que, en ausencia de un campo eléctrico, la relación entre las componentes espaciales de la fuerza tetradimensional y las componentes espaciales de la velocidad tetradimensional deberían ser, como vimos anteriormente,

$$\begin{bmatrix} F_1^m \\ F_2^m \\ F_3^m \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Como una fuerza magnética no produce trabajo sobre una partícula cargada, la cuarta componente de la fuerza tetradimensional magnética es nula. En lenguaje vectorial de cuatro dimensiones, vemos, por tanto, que la relación entre la fuerza tetradimensional magnética y la velocidad tetradimensional es

$$\begin{bmatrix} K_1^m \\ K_2^m \\ K_3^m \\ K_4^m \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & 0 \\ -B_3 & 0 & B_1 & 0 \\ B_2 & -B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \quad (13-81)$$

La fuerza eléctrica que actúa sobre una partícula es aditiva a la fuerza magnética. En consecuencia, podemos considerarla independientemente. Si la fuerza eléctrica que actúa sobre una partícula cargada se puede expresar por el producto matricial de  $4 \times 4$  del campo eléctrico y la velocidad tetradimensional, entonces, evidentemente, puesto que sólo la cuarta componente de la fuerza eléctrica tetradimensional depende de la velocidad de la partícula, las componentes del campo eléctrico pueden aparecer únicamente en la cuarta fila o en la cuarta columna de la matriz de  $4 \times 4$  del campo eléctrico. Realmente, hallamos que la fuerza eléctrica tetradimensional,  $\mathbf{K}^e$ , se puede expresar en la forma

$$\begin{bmatrix} K_1^e \\ K_2^e \\ K_3^e \\ K_4^e \end{bmatrix} = \frac{q}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -iE_1 \\ 0 & 0 & 0 & -iE_2 \\ 0 & 0 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \quad (13-82)$$

Y, por lo tanto, la fuerza tetradimensional electromagnética total que actúa sobre una partícula cargada está expresada por

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{bmatrix} = \frac{q}{c} \begin{bmatrix} 0 & cB_3 & -cB_2 & -iE_1 \\ -cB_3 & 0 & cB_1 & -iE_2 \\ cB_2 & -cB_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (13-83)$$

o, en notación operacional, por

$$|\mathbf{K}\rangle = \frac{q}{c} \mathfrak{F}|\mathbf{u}\rangle, \quad (13-84)$$

donde  $\mathfrak{F}$  es el llamado operador de campo electromagnético.

Como tanto  $|\mathbf{K}\rangle$  como  $|\mathbf{u}\rangle$  son vectores tetradimensionales que se comportan similarmente bajo una transformación de Lorentz, queda determinada esta transformación del operador de campo  $\mathfrak{F}$ . Por consiguiente, puesto que bajo una transformación de Lorentz de un sistema de coordenadas

con primas,  $I'$ , a un sistema sin primas,  $I$ , cuyo operador de transformación de Lorentz apropiado es  $\mathbf{S}$ ,

$$|\mathbf{K}\rangle = \mathbf{S}|\mathbf{K}'\rangle \quad \text{y} \quad |\mathbf{u}\rangle = \mathbf{S}|\mathbf{u}'\rangle, \quad (13-85)$$

vemos que el operador de campo electromagnético se transforma de la siguiente manera

$$\mathfrak{F} = \mathbf{S}\mathfrak{F}\mathbf{S}^{-1}. \quad (13-86)$$

Para la transformación de Lorentz de un sistema inercial con primas que se mueve con una velocidad  $V$  sobre el eje positivo  $x$  con respecto a un sistema inercial sin primas en el cual

$$(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -i(V/c)\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i(V/c)\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{bmatrix},$$

donde  $\Gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ , encontramos que la ecuación (13-86) da para el campo electromagnético las ecuaciones de transformación (problema 10-9):

$$\begin{aligned} E_1 &= E'_1, & B_1 &= B'_1, \\ E_2 &= \Gamma(E'_2 + VB'_3), & B_2 &= \Gamma\left(B'_2 - \frac{V}{c^2}E'_3\right), \\ E_3 &= \Gamma(E'_3 - VB'_2), & B_3 &= \Gamma\left(B'_3 - \frac{V}{c^2}E'_2\right). \end{aligned} \quad (13-87)$$

En las secciones siguientes, consideraremos el movimiento relativista de una partícula cargada en campos electromagnéticos independientes del tiempo, aunque despreciando el efecto de la reacción de la radiación sobre el movimiento de la partícula. Con una elección conveniente del sistema inercial de coordenadas con respecto al cual se describa el movimiento, podemos reducir el movimiento relativista en campos uniformes independientes del tiempo a uno de los cuatro casos especiales que indicamos a continuación: el movimiento en un campo eléctrico uniforme, en un campo magnético uniforme, en campos eléctrico y magnético paralelos, y en campos eléctrico y magnético perpendiculares. Este hecho resulta de las invariantes del campo

$$E^2 - c^2B^2 \quad \text{y} \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

(problema 10-10), las que se pueden construir a partir de la matriz del campo electromagnético. En consecuencia, si  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  no es nulo en un sistema

inercial en que los campos son  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{B}_0$ , entonces, el producto escalar de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  no es nulo en ningún otro sistema inercial. De ahí que podamos hallar siempre un sistema inercial en que los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  sean paralelos (problema 13-15) y, en consecuencia, satisfagan las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} &= EB = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_0, \\ E^2 - c^2B^2 &= E_0^2 - c^2B_0^2. \end{aligned} \quad (13-88)$$

Por otra parte, si  $\mathbf{E}_0$  es perpendicular a  $\mathbf{B}_0$ , de modo que

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_0 = 0,$$

y si además

$$E_0^2 - c^2B_0^2 > 0,$$

existe entonces un sistema inercial en que  $\mathbf{B}$  se anula. En tercer lugar, si

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad \text{y} \quad E_0^2 - c^2B_0^2 < 0,$$

podemos encontrar un sistema inercial en que  $\mathbf{E}$  se anule.

Finalmente, si

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad \text{y} \quad E_0^2 - c^2B_0^2 = 0,$$

entonces, hallamos que  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son perpendiculares entre sí en todos los marcos inerciales de referencia.

### 13-8 Movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme

Las cuatro ecuaciones relativistas de movimiento para una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme dirigido sobre el eje  $x$  son

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{d\tau} &= q\gamma E, & \frac{dp_y}{d\tau} &= \frac{dp_z}{d\tau} = 0, \\ \frac{d\mathcal{J}}{d\tau} &= q\gamma v_x E = qE \frac{dx}{d\tau}. \end{aligned}$$

De la última ecuación obtenemos la que expresa la conservación de la energía total de la partícula. Su integración da

$$\mathcal{J} = qEx + \lambda, \quad (13-89)$$

donde  $\lambda$  es constante. Entonces vemos que podemos establecer

$$\mathcal{J} + q\phi = \lambda = \mathcal{J}_0 + q\phi_0, \quad (13-90)$$

donde tomamos el potencial eléctrico

$$\phi = -Ex. \quad (13-91)$$

Mediante una elección adecuada del origen de coordenadas, podemos hacer que la energía total sea nula. Esto lo logramos eligiendo el origen que dé

$$x_0 = \frac{\mathcal{J}_0}{qE}. \quad (13-92)$$

Las otras ecuaciones dan

$$p_y = p_{y0}, \quad p_z = p_{z0}, \quad p_x = qEt + \mu, \quad (13-93)$$

donde  $\mu$  es una constante de integración. La última ecuación se obtuvo haciendo primero

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{dt}{d\tau}$$

en la primera componente de la ecuación de movimiento.

Con una elección apropiada del tiempo inicial, podemos también reducir esta constante de integración a cero. En consecuencia, haciendo

$$t_0 = \frac{p_{x0}}{qE}, \quad (13-94)$$

hallamos que  $\mu = 0$ .

Para hallar  $x$  en función del tiempo, utilizaremos ahora la relación

$$p_x = m_0\gamma \frac{dx}{dt} = \frac{\mathcal{J}}{c^2} \frac{dx}{dt} = \frac{qEx}{c^2} \frac{dx}{dt}. \quad (13-95)$$

El último paso en la ecuación anterior se desprende de la ecuación (13-89). Por consiguiente, llegamos a la ecuación

$$\frac{x}{c^2} \frac{dx}{dt} = t \quad \text{o} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} x^2 \right) = c^2 t,$$

cuya solución es

$$x^2 = (ct)^2 + v. \quad (13-96)$$

La constante de integración

$$v = [x(0)]^2, \quad (13-97)$$

donde  $x(0)$  es la posición de la partícula en el instante  $t = 0$ .

Análogamente, haciendo

$$p_y = \frac{\mathcal{J}}{c^2} \frac{dy}{dt} = \frac{qEx}{c^2} \frac{dy}{dt} = \frac{qE}{c^2} \sqrt{(ct)^2 + [x(0)]^2} \frac{dy}{dt} = p_{y0},$$

obtenemos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_{y0}c^2}{qE \sqrt{(ct)^2 + [x(0)]^2}}. \quad (13-98)$$

La solución de esta ecuación es

$$y = \frac{p_{y0}c}{qE} \operatorname{senh}^{-1} \frac{ct}{x(0)}. \quad (13-99)$$

Eligiendo adecuadamente los ejes  $y$  y  $z$ , podemos confinar el movimiento al plano  $xy$ . Así, utilizando la ecuación (13-96) y con un poco de álgebra hallamos la ecuación de la trayectoria de la partícula

$$x = x(0) \cosh \frac{qEy}{p_{y0}c}, \quad (13-100)$$

que es la ecuación de una catenaria.

### 13-9 Movimiento en un campo magnético uniforme

El movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme independiente del tiempo y dirigido sobre el eje  $z$  está gobernado por las cuatro ecuaciones relativistas de movimiento

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = q\gamma\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (13-101)$$

y

$$\gamma\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = \frac{d\mathcal{J}}{d\tau} = 0. \quad (13-102)$$

La última ecuación nos dice que la fuerza magnética no realiza trabajo sobre la partícula y que, en consecuencia, su energía cinética

$$\mathcal{J} = mc^2$$

permanece constante. Esto significa que la masa relativista de la partícula, que se puede expresar por

$$m = \frac{\mathcal{J}}{c^2},$$

y, por lo tanto, su velocidad  $v$ , son igualmente constantes. Que la velocidad permanece fija podemos averiguarlo volviendo a escribir la ecuación (13-101) en la forma

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (13-103)$$

Puesto que  $dm/dt = 0$ , esta ecuación es idéntica a la clásica del movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme independiente del tiempo. La solución de dicha ecuación la consideramos en la sección 6-7.

La trayectoria de la partícula relativista en un campo magnético es, por consiguiente, asimismo una hélice cuyo eje está sobre la dirección del campo magnético y a lo largo de la cual se mueve la partícula con velocidad constante.

### 13-10 Movimiento bajo la acción de campos eléctrico y magnético paralelos

Las ecuaciones relativistas de movimiento para una partícula cargada que se mueve en campos eléctrico y magnético uniformes y paralelos dirigidos sobre el eje  $z$  son

$$m_0 \frac{d^2x}{d\tau^2} = qB \frac{dy}{d\tau}, \quad (13-104)$$

$$m_0 \frac{d^2y}{d\tau^2} = -qB \frac{dx}{d\tau}, \quad (13-105)$$

$$m_0 \frac{d^2z}{d\tau^2} = qE\gamma, \quad (13-106)$$

$$icm_0 \frac{d^2t}{d\tau^2} = \frac{iqE}{c} \frac{dz}{d\tau}. \quad (13-107)$$

Las ecuaciones (13-104) y (13-105) son independientes de las dos restantes. Además, son idénticas a las ecuaciones clásicas (6-33) y (6-34) del movimiento de una partícula en un campo magnético uniforme, pero con el tiempo  $t$  substituido por el tiempo propio de la partícula,  $\tau$ .

Sus soluciones son, en consecuencia, similares a las soluciones clásicas. Concretamente (sección 6-7)

$$x - a = A \cos[\omega\tau + \phi_0], \quad (13-108)$$

$$y - b = -A \sin[\omega\tau + \phi_0],$$

donde

$$\omega = \frac{qB}{m_0}. \quad (13-109)$$

Las otras dos ecuaciones, con  $\gamma$  substituida por  $dt/d\tau$ , se reducen a las diferenciales simultáneas con coeficientes constantes

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = \frac{qE}{m_0} \frac{dt}{d\tau} \quad \text{y} \quad \frac{d^2t}{d\tau^2} = \frac{qE}{m_0 c^2} \frac{dz}{d\tau}. \quad (13-110)$$

La solución de estas ecuaciones diferenciales simultáneas es

$$z - g = D \cosh \frac{qE}{m_0 c} (\tau - \phi'),$$

$$c(t - h) = D \sinh \frac{qE}{m_0 c} (\tau - \phi'). \quad (13-111)$$

Mediante una elección conveniente del origen de coordenadas la orientación de los ejes  $x$  y  $y$  y el valor inicial del tiempo propio, podemos hacer que las constantes de integración  $a$ ,  $b$ ,  $g$  y  $h$  se anulen. Recordando además que la magnitud de la velocidad en tetradimensional es constante

$$\sum_{i=1}^4 u_i^2 = -c^2,$$

vemos que  $A$  y  $D$  están relacionadas por

$$D = \sqrt{\left(\frac{m_0 c^2}{qE}\right)^2 + \left(\frac{B}{E}\right)^2} A^2. \quad (13-112)$$

La trayectoria es una espiral.

### 13-11 Coordenadas generalizadas, ecuaciones de movimiento de Lagrange

Hasta ahora hemos limitado nuestro análisis del movimiento relativista de una partícula considerándolo en función de las componentes cartesianas ( $x_1, x_2, x_3$ ) de su vector de posición en el espacio y en función del tiempo, representado por  $x_4 = ict$ . Sin embargo, esto nos restringe innecesariamente. A veces es conveniente utilizar otro sistema de cuatro coordenadas generalizadas,  $q_i$ , que tengan una correspondencia biunívoca con las  $x_i$  expresada por las ecuaciones de transformación

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3, q_4), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (13-113)$$

El método para tratar el movimiento relativista de una partícula en función de las coordenadas generalizadas es bastante análogo a nuestro planteamiento para establecer las ecuaciones generalizadas de movimiento de una partícula que se mueve lentamente. Sin embargo, hallamos que hay dos planteamientos diferentes que se utilizan para hallar las ecuaciones generalizadas de movimiento de una partícula relativista. La diferencia entre los dos métodos radica esencialmente en una manera distinta de elegir los

vectores base generalizados y en el hecho de que un planteamiento se limita a transformaciones de coordenadas que conservan a  $x_4$  como una de las coordenadas generalizadas. Esto es, el planteamiento limita a transformaciones de coordenadas dependientes del tiempo de la forma

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (13-114)$$

y

$$x_4 = q_4.$$

Como ya estamos familiarizados con el método para tratar tal tipo de transformaciones (lo introducimos en las secciones 3-2 y 5-3 al referirnos a las transformaciones de coordenadas dependientes del tiempo) lo expon-dremos primero.

Este primer planteamiento utiliza una descripción del movimiento de una partícula en el espacio tridimensional en función del tiempo; además utiliza los tres vectores

$$\mathbf{b}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x_1}{\partial q_i} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial q_i} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial q_i} \mathbf{e}_3, \quad i = 1, 2, 3, \quad (13-115)$$

( $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ ) como vectores base. Igual que antes, definimos las *fuerzas generalizadas* por los productos escalares del vector fuerza por los vectores base,

$$Q_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}_i = \sum_{j=1}^3 F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}, \quad (13-116)$$

y las *cantidades de movimiento relativistas generalizadas de la partícula* por el producto escalar de la cantidad de movimiento relativista lineal de la partícula por los vectores base,

$$p_i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}_i = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i. \quad (13-117)$$

Podemos reescribir esta expresión de las cantidades de movimiento generalizadas en la forma

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} [-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}] \quad (13-118)$$

recordando que (sección 2-5):

$$\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i},$$

y, por lo tanto, que

$$p_i = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \dot{x}_j^2 = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}).$$

Observemos que para una partícula relativista,

$$p_i \neq \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{q}_i}$$

que es lo mismo que con una partícula newtoniana.

Las  $\dot{q}_j$  se denominan *velocidades generalizadas*. Para transformaciones de coordenadas dependientes del tiempo no hay los productos escalares del vector velocidad por los vectores base inversos.

Las *ecuaciones generalizadas* o de *Lagrange* de movimiento son los productos escalares de la ecuación relativista de movimiento,

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right], \quad (13-119)$$

por los vectores base. Por lo tanto, hallamos que las ecuaciones generalizadas de movimiento son

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}_i &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{b}_i \\ &= \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{b}_i) - \mathbf{p} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{b}_i \\ &= \frac{d}{dt} (p_i) - \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \frac{dp_i}{dt} + m_0 c^2 \frac{\partial}{\partial q_i} \sqrt{1 - v^2/c^2} \end{aligned}$$

o sea,

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}) - \frac{\partial}{\partial q_i} (-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}). \quad (13-120)$$

Si la fuerza  $\mathbf{F}$  se puede deducir de una función de energía potencial dependiente de la velocidad  $U(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  expresada por

$$\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad (13-121)$$

entonces las fuerzas generalizadas están dadas por (sección 6-13):

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (13-122)$$

y las ecuaciones de Lagrange por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (13-123)$$

donde la lagrangiana es

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - U(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (13-124)$$

Desgraciadamente no conocemos correctamente la energía relativista de interacción de todas las fuerzas conocidas. Para fuerzas electromagnéticas conocemos la función de energía potencial, que es

$$U = q\phi - q(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}). \quad (13-125)$$

De ésta se halla que la lagrangiana relativista para una partícula cargada en un campo electromagnético es

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - q\phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (13-126)$$

En el movimiento de una partícula en un campo de fuerza dependiente de la velocidad que sea deducible de una función de energía potencial, es costumbre llamar a

$$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (13-127)$$

*cantidad de movimiento conjugada.*

### 13-12 Formulación lagrangiana covariante

En la formulación lagrangiana covariante de las ecuaciones relativistas del movimiento de una partícula, consideramos la descripción del movimiento en función de los eventos de la partícula en un espacio tetradimensional. La descripción de los eventos de una partícula en función de las cuatro coordenadas generalizadas,  $q_i$ , utiliza los cuatro vectores base linealmente independientes definidos por

$$|\mathbf{b}_i\rangle = \frac{\partial |\mathbf{r}\rangle}{\partial q_i}. \quad (13-128)$$

Las cuatro componentes de estos vectores base están dadas por

$$b_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i}, \quad (13-129)$$

donde

$$x_j = x_j(q_1, q_2, q_3, q_4), \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (13-130)$$

Cualquier otro vector tetradimensional del espacio universal se puede determinar en función de sus productos interiores por estos cuatro vectores base. Así, la fuerza tetradimensional se expresa en función de las *cuatro fuerzas generalizadas*

$$Q_i = (\mathbf{K}|\mathbf{b}_i) = \sum_{j=1}^4 K_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}. \quad (13-131)$$

Las cuatro *cantidades de movimiento generalizadas covariantes de la partícula* se definen, análogamente, por los productos interiores del vector de la cantidad de movimiento tetradimensional y los vectores base tetradimensionales

$$p_i = (\mathbf{p}|\mathbf{b}_i). \quad (13-132)$$

Partiendo de la definición [ecuación (13-66)] de la cantidad de movimiento tetradimensional y de los vectores base tetradimensionales, hallamos que

$$p_i = \sum_{j=1}^4 m_0 u_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}. \quad (13-133)$$

De las ecuaciones de transformación de coordenadas

$$x_j = x_j(q_1, q_2, q_3, q_4),$$

se desprende que

$$u_j = \frac{\partial x_j}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \tau}$$

y de ésta, que

$$\frac{\partial u_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i}, \quad (13-134)$$

donde hemos hecho

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial \tau}. \quad (13-135)$$

Utilizando este resultado en la ecuación (13-133) tenemos, a su vez,

$$p_i = \sum_{j=1}^4 m_0 u_j \frac{\partial \mu_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} m_0 \mathbf{u}^2 \right), \quad (13-136)$$

donde el cuadrado de la velocidad tetradimensional,  $\mathbf{u}^2$ , está expresado en función de las coordenadas generalizadas,  $q_i$ , y sus derivadas con respecto al tiempo propio,  $\dot{q}_i$ . Es decir, que el valor  $-c^2$  no ha de ser utilizado.

Las ecuaciones de movimiento generalizadas son los productos escalares de la ecuación de movimiento relativista

$$|\mathbf{K}\rangle = \frac{d}{d\tau} |\mathbf{p}\rangle \quad (13-137)$$

por los vectores base. Así obtenemos las cuatro ecuaciones de movimiento generalizadas covariantes

$$(\mathbf{b}_i | \mathbf{K}) = \left( \mathbf{b}_i \left| \frac{d}{d\tau} \mathbf{p} \right. \right) = \frac{d}{d\tau} (\mathbf{b}_i | \mathbf{p}) - \left( \frac{d\mathbf{b}_i}{d\tau} \left| \mathbf{p} \right. \right),$$

que, como

$$\left( \frac{d\mathbf{b}_i}{d\tau} \left| \mathbf{p} \right. \right) = \sum_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} m_0 \mathbf{u}_j = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{1}{2} m_0 \mathbf{u}^2,$$

están expresadas por

$$Q_i = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} m_0 \mathbf{u}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{1}{2} m_0 \mathbf{u}^2 \right). \quad (13-138)$$

Las fuerzas electromagnéticas tetradimensionales que actúan sobre una partícula cargada se pueden deducir de la función de energía potencial de interacción invariante de Lorentz \*

$$U(x_i, \mathbf{u}_i) = -\frac{q}{c} \sum_{i=1}^4 \mathbf{u}_i A_i, \quad (13-139)$$

donde

$$A_1 = A_x c, \quad A_2 = A_y c, \\ A_3 = A_z c, \quad A_4 = i\phi.$$

En función de  $U$ , podemos expresar las componentes de la fuerza tetradimensional por

$$K_i = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial U}{\partial x_i}. \quad (13-140)$$

Las fuerzas electromagnéticas generalizadas se hallan, por consiguiente, que están dadas por

$$Q_i = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (13-141)$$

Las ecuaciones de movimiento generalizadas covariantes son, por tanto,

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (13-142)$$

\* Por la teoría electromagnética vemos que las  $A_i$  son las componentes de un potencial vectorial tetradimensional electromagnético.

donde la lagrangiana covariante de una partícula en un campo electromagnético es

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^4 \left( \frac{1}{2} m_0 \mathbf{u}_i^2 + \frac{q}{c} \mathbf{u}_i A_i \right) \quad (13-143)$$

Las cantidades de movimiento generalizadas conjugadas de una partícula en un campo electromagnético se definen por

$$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (13-144)$$

Para las coordenadas  $x_i$  hallamos que la cantidad de movimiento conjugada tetradimensional es

$$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_i} = m_0 \mathbf{u}_i + \frac{q}{c} A_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (13-145)$$

La cuarta componente de la cantidad de movimiento conjugada es

$$P_4 = i \left( \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{q\phi}{c} \right) = \frac{i\varepsilon}{c}, \quad (13-146)$$

donde

$$\varepsilon = \mathcal{J} + q\phi \quad (13-147)$$

es la energía relativista total de una partícula cargada en un campo electromagnético. Por consiguiente, se ha hallado que la energía total de una partícula multiplicada por  $i/c$  es la cantidad de movimiento en su forma canónica de la cuarta componente del vector tetradimensional de posición, esto es, el tiempo multiplicado por el factor  $ic$ .

### 13-13 Movimiento de una partícula cargada en un campo de Coulomb

Como un ejemplo de la aplicación de la formulación covariante generalizada que expusimos en la sección anterior, consideremos el movimiento de una partícula de masa en reposo,  $m_0$ , y carga  $q$  bajo la acción de la fuerza producida por la carga  $q'$  de otra partícula cargada fija en el origen de coordenadas. Como, para este caso,  $A_1 = A_2 = A_3 = 0$  y

$$A_4 = i\phi = \frac{iq'}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (13-148)$$

la energía potencial covariante está dada por

$$U = -\frac{q}{c} \mathbf{u}_4 A_4 = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} \gamma, \quad (13-149)$$

donde  $r$  es la distancia del origen a la carga  $q$ . Como en el movimiento clásico de una partícula cargada en un campo de Coulomb, encontramos que también el movimiento relativista se desarrolla en el plano determinado por los vectores de velocidad y posición iniciales de la partícula.

En consecuencia, utilizando las coordenadas cilíndricas  $r$  y  $\theta$ , para describir el movimiento de la partícula en el plano, y refiriéndonos al plano como plano  $xy$ , hallamos que

$$\begin{aligned} u^2 &= \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \\ &= \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2. \end{aligned} \quad (13-150)$$

Luego la lagrangiana covariante para este problema

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_0u^2 - U \quad (13-151)$$

da las ecuaciones de movimiento

$$m_0 \frac{d^2r}{d\tau^2} - m_0r \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - \frac{qq'\gamma}{4\pi\epsilon_0r^2} = 0, \quad (13-152)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( m_0r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) = 0, \quad (13-153)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( m_0\mathbf{u}_4 + \frac{q}{c} \mathbf{A}_4 \right) = 0. \quad (13-154)$$

Las dos últimas ecuaciones se integran fácilmente, dando

$$m_0r^2 \frac{d\theta}{d\tau} = l \quad (13-155)$$

y

$$m_0\mathbf{u}_4 + \frac{q}{c} \mathbf{A}_4 = \frac{i\lambda}{c}, \quad (13-156)$$

donde  $\lambda$  es constante. La ecuación (13-156), expresada por

$$\frac{i}{c} \left( \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0r} \right) = \frac{i}{c} \lambda,$$

nos dice que

$$\lambda = \mathcal{T} + q\phi = \mathcal{E} \quad (13-157)$$

es la energía total de la partícula. Hemos hallado en esta forma dos primeras integrales del movimiento: la conservación de la cantidad de movimiento angular,  $l$ , y la energía total,  $\mathcal{E}$ , de la partícula.

Además, expresando la ecuación (13-156) en la forma

$$im_0c \frac{dt}{d\tau} = \frac{i\mathcal{E}}{c} - \frac{iqq'}{4\pi\epsilon_0cr},$$

hallamos que

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} = \frac{\mathcal{E}}{m_0c^2} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0m_0c^2r}, \quad (13-158)$$

que introducida en la ecuación (13-152) da la

$$m_0 \frac{d^2r}{d\tau^2} - m_0r \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0r^2} \left( \frac{\mathcal{E}}{m_0c^2} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0m_0c^2r} \right). \quad (13-159)$$

Pero esta ecuación, junto con la (13-153) con  $\tau$  substituido por  $t$ , son las ecuaciones de movimiento clásicas de una partícula sometida a la acción combinada de una fuerza central de magnitud  $(qq'\mathcal{E}/4\pi\epsilon_0m_0c^2)(1/r^2)$  y otra fuerza central que varía con la inversa del cubo de  $r$ , de magnitud  $(qq'/4\pi\epsilon_0)^2(1/m_0c^2r^3)$ . En la sección 7-4 hemos tratado ya este problema bajo el título de *teoría de Newton para órbitas giratorias*.

Por lo tanto, podemos utilizar los resultados de la sección 7-4, o bien, proceder a integrar la ecuación diferencial (7-14) de la órbita, para hallar la trayectoria de la partícula. Dejamos como ejercicio al lector (problema 13-11) el demostrar que cuando se hace una elección adecuada de la recta a partir de la cual se mide  $\theta$ , es posible expresar las soluciones de la ecuación diferencial de las órbitas por

$$(c^2l^2 - k^2) \frac{1}{r} = c \sqrt{(l\mathcal{E})^2 - m_0^2c^2(l^2c^2 - k^2)} \cos \theta \sqrt{1 - \frac{k^2}{l^2c^2}} - \mathcal{E}k, \quad (13-160)$$

si  $lc > |k|$ , donde  $k = qq'/4\pi\epsilon_0$ , y

$$(k^2 - l^2c^2) \frac{1}{r} = \pm c \sqrt{(l\mathcal{E})^2 + m_0^2c^2(k^2 - l^2c^2)} \cosh \theta \sqrt{\frac{k^2}{l^2c^2} - 1} + \mathcal{E}k, \quad (13-161)$$

si  $lc < |k|$ , y en la que se usa el signo más para partículas de cargas iguales y el signo menos para partículas de cargas opuestas. Si  $lc = |k|$ , la ecuación de la órbita es

$$\frac{2\mathcal{E}k}{r} = \mathcal{E}^2 - m_0^2c^4 - \theta^2 \left( \frac{\mathcal{E}k}{lc} \right)^2. \quad (13-162)$$

Hay algunas órbitas interesantes. Por ejemplo, para un potencial de atracción ( $k < 0$ ), las soluciones de las ecuaciones (13-161) y (13-162) son espirales a lo largo de las cuales la partícula se aproxima y finalmente llega al origen al crecer  $\theta$ .



### 13-14 Cantidad de movimiento angular

Como en el caso tridimensional, vemos que la cantidad de movimiento generalizada conjugada para un ángulo variable es un elemento específico de la representación matricial del operador (sección 10-7)

$$\mathbf{L} = |\mathbf{r}| (|\mathbf{p}| - |\mathbf{p}'|) (\mathbf{r}). \quad (13-163)$$

Este operador antisimétrico tiene únicamente seis elementos distintos,  $L_{ij}$ , en su representación matricial de  $4 \times 4$ . Estas son las cantidades de movimiento generalizadas conjugadas de las variables angulares  $\theta_{ij}$ , que son los ángulos formados por la proyección del vector tetradimensional de posición sobre el plano  $x_i x_j$  y el eje  $x_i$ . Esto es,

$$\text{tg } \theta_{ij} = \frac{x_j}{x_i} = \text{ctg } \theta_{ji}. \quad (13-164)$$

Vamos a ver que realmente se verifica esto. Obsérvese que la definición de los ángulos  $\theta_{ij}$ , nos lleva a la conclusión de que para pequeños cambios en la orientación del vector tetradimensional de posición de una partícula,

$$\Delta \theta_{ij} = -\Delta \theta_{ji}. \quad (13-165)$$

Estos  $\theta_{ij}$ , que, por otra parte, no son independientes, nos dan, por consiguiente, los seis elementos de la matriz de velocidad angular antisimétrica. Estos elementos quedan definidos por

$$\Omega_{ij} = \frac{d\theta_{ij}}{d\tau} = -\frac{d\theta_{ji}}{d\tau} = -\Omega_{ji}. \quad (13-166)$$

Si el vector tetradimensional de posición de una partícula cambia sólo de dirección, entonces, la velocidad tetradimensional de la partícula está dada por

$$u_i = -\sum_{j=1}^4 \Omega_{ij} x_j. \quad (13-167)$$

El producto interior de la ecuación (13-167) y el vector tetradimensional de posición es nulo, como era de esperar. Si el vector tetradimensional de posición cambia también de magnitud, entonces la parte de la velocidad tetradimensional dada por la ecuación (13-167) contribuye al  $u^2$  total sólo con el término

$$\sum_{ijk} \Omega_{ij} \Omega_{ik} x_j x_k. \quad (13-168)$$

Y, en consecuencia, la cantidad de movimiento generalizada relacionada con el ángulo  $\theta_{ij}$  es

$$L_{ij} = \frac{\partial m_0 u^2 / 2}{\partial \Omega_{ij}}. \quad (13-169)$$

De las ecuaciones (13-168) y (13-169) hallamos realmente que

$$L_{ij} = m_0 \sum_k (\Omega_{ik} x_j x_k - \Omega_{jk} x_i x_k)$$

o sea,

$$L_{ij} = -p_i x_j + x_i p_j. \quad (13-170)$$

Estos  $L_{ij}$  son los elementos de la representación matricial del operador  $\mathbf{L}$  de (13-163).

Como es el caso de la matriz antisimétrica del campo electromagnético ( $\mathcal{F}$ ), vemos que con los seis elementos matriciales de la cantidad de movimiento angular ( $\mathbf{L}$ ) podemos formar dos conjuntos de tres elementos, cada uno de los cuales se transforma bajo una rotación de los ejes de coordenadas del espacio igual que las tres componentes de un vector. Estos son los conjuntos  $(L_{23}, L_{31}, L_{12})$  y  $(c/i)(L_{41}, L_{42}, L_{43})$ . El primero define al vector relativista de la cantidad de movimiento angular tridimensional.

### 13-15 Colisión de partículas: reacciones, energía de umbral

En esta sección consideraremos la colisión de partículas en la que tenemos en cuenta un posible cambio de la estructura interna de las mismas. Es decir, consideraremos que se presenta una reacción de modo que las partículas después de la colisión no son, necesariamente, iguales que antes de ella. Sin embargo, nos tendremos que limitar a un sistema en el que la cantidad de movimiento relativista tetradimensional sea una constante del movimiento.

En un sistema cerrado de partículas veremos, además, que la cantidad de movimiento angular del sistema se conservará. Pero sólo nos interesan las consecuencias de la conservación de la cantidad de movimiento tetradimensional.

Con mucho, la reacción más simple es la colisión de dos partículas, de masas en reposo  $m_1$  y  $m_2$ , que da por resultado la formación de una sola partícula de masa en reposo  $M$ , o bien, el problema inverso, la desintegración de una partícula de masa en reposo  $M$  en dos partículas de masas en reposo  $m_3$  y  $m_4$ . Por supuesto, también es posible la desintegración de una partícula en más de dos. No obstante, como la introducción de partículas adicionales sólo complicaría la aplicación de la conservación de la cantidad de movimiento tetradimensional, limitaremos nuestro estudio esencialmente al caso en que aparezcan como máximo sólo dos partículas diferentes como resultado de la colisión.

Observaremos que una reacción en que la colisión de las partículas uno y dos dé como resultado la aparición de las partículas tres y cuatro, se puede considerar que ocurre en los dos pasos siguientes: primero, la formación de una sola partícula compuesta de masa en reposo  $M$ , y luego la desintegración de dicha partícula compuesta en las tres y cuatro. Esta representación de una reacción fue introducida por Niels Bohr.\*

\* N. Bohr, *Nature*, 137, 344, 351 (1936).

La reacción en que aparecen más de dos partículas se puede descomponer, similarmente, en pasos intermedios. Por ejemplo, puede considerarse que tal reacción ocurre de la manera siguiente:

$$m_1 + m_2 \rightarrow M_1 \rightarrow m_3 + M_2 \rightarrow m_3 + m_4 + M_3 \rightarrow \dots$$

donde  $M_1, M_2, M_3$ , etc., son partículas compuestas intermedias.

En el problema corriente, se dan las cantidades de movimiento  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  y las energías  $\mathcal{J}_1$  y  $\mathcal{J}_2$  de las partículas incidentes de masas en reposo  $m_1$  y  $m_2$  que se combinan para formar la partícula compuesta. Partiendo de esta información, hallamos fácilmente la energía

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 \quad (13-171)$$

de la partícula compuesta, su cantidad de movimiento lineal

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad (13-172)$$

su velocidad

$$\mathbf{V} = \frac{c^2}{\mathcal{J}} \mathbf{P}, \quad (13-173)$$

y su masa en reposo

$$M = \frac{1}{c^2} \sqrt{\mathcal{J}^2 - P^2 c^2}. \quad (13-174)$$

En el segundo paso de la reacción, la partícula compuesta de masa en reposo  $M$  y velocidad  $\mathbf{V}$  se desintegra en las dos partículas de masas en reposo  $m_3$  y  $m_4$ . En esta parte, las cantidades de movimiento,  $\mathbf{p}_3$  y  $\mathbf{p}_4$ , de las par-

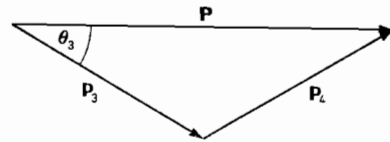


FIG. 13-4

tículas emitidas son desconocidas. Además, las cuatro ecuaciones proporcionadas por la conservación de la cantidad de movimiento tetradimensional no son suficientes para poder determinar las cantidades de movimiento lineales de las partículas emitidas.

Para simplificar, podemos introducir la suposición adicional de que el movimiento de todas las partículas tiene lugar en un plano. Esto reduce a cuatro el número total de componentes desconocidas de las cantidades de movimiento de las partículas emitidas, y a tres el número de ecuaciones introducidas por la conservación de la cantidad de movimiento tetradimensional. El dato adicional que nos hace falta para poder determinar

las cantidades de movimiento y las energías de las partículas emitidas es, por lo general, el ángulo determinado experimentalmente que forma la cantidad de movimiento de una de las partículas emitidas con la cantidad de movimiento lineal total del sistema. Por la figura 13-4, vemos que en función del ángulo  $\theta_3$  que forma  $\mathbf{p}_3$  con  $\mathbf{P}$ ,

$$p_4^2 = p_3^2 + P^2 - 2p_3 P \cos \theta_3, \quad (13-175)$$

la cual, junto con la ecuación de energía

o

$$\mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_4 = \mathcal{J} \\ \sqrt{p_4^2 c^2 + m_4^2 c^4} + \sqrt{p_3^2 c^2 + m_3^2 c^4} = \sqrt{P^2 c^2 + M^2 c^4}, \quad (13-176)$$

proporciona la información suficiente para determinar  $p_3$  y  $p_4$ . El conocimiento de  $p_3$  y  $p_4$ , a su vez, nos permite hallar  $\mathcal{J}_3$  y  $\mathcal{J}_4$ , y el ángulo  $\theta_4$  que forma  $\mathbf{p}_4$  con  $\mathbf{P}$ .

Observaremos que en el caso de que la suma de las masas en reposo de las partículas emitidas o salientes exceda de la suma de las masas en reposo de las partículas iniciales o incidentes, es decir, si

$$\sum_{i=3}^N m_i > m_1 + m_2,$$

la reacción sólo es posible energéticamente si la energía de las partículas incidentes excede de cierto valor mínimo  $\mathcal{J}_{\text{mín}}$ . Considerando el caso corriente en que la partícula dos esté en reposo inicialmente y la energía total incidente sea

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + m_2 c^2, \quad (13-177)$$

encontramos para

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\text{mín}} \quad (13-178)$$

que la masa en reposo de la partícula compuesta es

$$M = \sum_{i=3}^N m_i,$$

y que todas las partículas emitidas se mueven juntas con la velocidad  $\mathbf{V}$  de la partícula compuesta. De aquí que

$$\mathcal{J}_{\text{mín}} = \mathcal{J}_{1,\text{mín}} + m_2 c^2 = \sqrt{P^2 c^2 + M^2 c^4} \\ = \sqrt{p_1^2 c^2 + M^2 c^4} \quad (13-179)$$

o

$$\mathcal{J}_{1,\text{mín}} + m_2 c^2 = \sqrt{\mathcal{J}_{1,\text{mín}}^2 + (M^2 - m_1^2) c^4}. \quad (13-180)$$

Esta ecuación da

$$J_{1,\text{mín}} = \frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_2} c^2. \quad (13-181)$$

La *energía de umbral* de una reacción se define por la energía mínima por encima de la energía en reposo de las partículas incidentes que es necesaria para permitir energéticamente que se realice la reacción. En el caso estudiado, es decir, para  $m_2$  inicialmente en reposo, hallamos que la energía de umbral es

$$J_{\text{umb}} = J_{\text{mín}} - (m_1 + m_2)c^2 = J_{1,\text{mín}} - m_1c^2$$

o

$$J_{\text{umb}} = \frac{M^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_2} c^2. \quad (13-182)$$

Como ejemplo, consideraremos la energía de umbral para producir un par protón-antiprotón en una colisión protón-protón. La reacción se representa esquemáticamente por



donde  $p$  representa un protón y  $\bar{p}$  un antiprotón. En esta reacción

$$M = 4m_p,$$

donde  $m_p$  es la masa en reposo del protón y, en consecuencia,

$$J_{\text{umb}} = \frac{16m_p^2 - 4m_p^2}{2m_p} c^2 = 6m_p c^2.$$

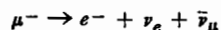
La masa en reposo de un protón es 938 Mev. Luego la energía de umbral para esta reacción es

$$J_{\text{umb}} = 6 \times 938 \text{ Mev} = 5,630 \text{ Mev}.$$

**Problemas**

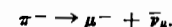
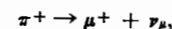
13-1. El período medio de vida de un muón (mesón  $\mu$ ) en reposo es  $2.21 \times 10^{-6}$  segundos. Si los muones formados en la alta atmósfera marchan con una velocidad  $v = 0.99c$ , ¿cuál es la distancia media que recorren antes de su desintegración?

13-2. La energía máxima de los electrones producidos en la desintegración de un muón en reposo es 55 Mev. La desintegración está representada por



donde  $\nu_e$  y  $\bar{\nu}_\mu$  representan, respectivamente, al neutrino del electrón y al antineutrino del muón. Dado que la masa en reposo del electrón es 0.51 Mev, y que el neutrino y el antineutrino tienen masas en reposo iguales a cero, hállese la masa en reposo del muón. Determinése la energía mínima llevada por los dos neutrinos.

13-3. Un pión (mesón  $\pi$ ) cuya masa en reposo es 273 veces la masa en reposo,  $m_e$ , de un electrón, se desintegra, mientras está en reposo, en un muón de masa en reposo  $207 m_e$  y un neutrino de muón:



Hállese la energía y la cantidad de movimiento lineal recibidas por el muón.

13-4. Un observador,  $I$ , ve que las velocidades de los puntos  $P_1$  y  $P_2$  son, respectivamente,

$$\mathbf{v}_1 = v_i \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = v_{2x}\mathbf{i} + v_{2y}\mathbf{j}$$

Hállese la velocidad de  $P_2$  relativa a  $P_1$ : a) en el marco en reposo de  $P_1$ ; b) en el marco en reposo de  $P_2$ . Nótese que las descripciones de la velocidad de  $P_2$  relativa a  $P_1$  en estos dos marcos en reposo, cada uno de los cuales tiene sus ejes de coordenadas paralelos a los de  $I$ , no son las mismas. En consecuencia, se desprende que los ejes de coordenadas del marco en reposo de  $P_2$ , que son paralelos a los del marco en reposo de  $P_1$ , no son paralelos, a su vez, a los del marco en reposo de  $P_2$ , cuyos ejes de coordenadas son paralelos a los de  $I$ .

Comparando las dos descripciones de  $\mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  con respecto a los dos marcos en reposo de  $P_2$ , demuéstrese que para una velocidad relativa infinitesimal, es decir, para

$$v_{2x} = v + \Delta v_x \quad \text{y} \quad v_{2y} = \Delta v_y,$$

donde  $\Delta v_x$  y  $\Delta v_y$  son velocidades infinitesimales, los dos ejes  $x$  de los marcos en reposo de  $P_2$ , descritos anteriormente, forman un ángulo infinitesimal que está dado por

$$\Delta\theta = \frac{v \Delta v_y}{2c^2},$$

y representa una rotación alrededor de sus ejes  $z$  paralelos. Por tanto, podemos establecer

$$\Delta\theta = \frac{\mathbf{v} \times \Delta\mathbf{v}}{2c^2},$$

a partir de lo cual sacamos la conclusión de que el sistema de coordenadas unido a una partícula acelerada que permanece siempre paralelo a sí mismo se observará que gira con la velocidad angular

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2c^2} \mathbf{v} \times \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{1}{2c^2} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\alpha}$$

por un observador con respecto al cual la partícula se mueve con una velocidad  $\mathbf{v}$  y una aceleración  $\boldsymbol{\alpha}$ . Este fenómeno es importante en física atómica y se conoce por *precesión de Thomas*.

13-5. Demuéstrese que una transformación general de Lorentz entre dos sistemas de coordenadas inerciales,  $I$  e  $I'$ , cuando  $I'$  se mueve con una velocidad  $\mathbf{v} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}$  con respecto a  $I$  es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}}{V^2} \mathbf{v} + \gamma t' \mathbf{v}$$

y

$$t = \left( t' + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right) \gamma, \quad \text{donde} \quad \gamma = \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{-1/2}.$$

Hállese la matriz de transformación de Lorentz para estas ecuaciones.

13-6. a) Utilizando el vector de cantidad de movimiento tetradimensional de un fotón (sección 13-6), hállese la relación entre las frecuencias del fotón observadas por dos distintos observadores inerciales,  $I$  e  $I'$ , cuando  $I'$  se mueve con una velocidad  $V$  a lo largo del eje  $x$  positivo, con respecto al observador  $I$ , que también es la dirección de propagación del fotón.

b) Hállese el cambio de la frecuencia de una onda plana electromagnética reflejada normalmente por un espejo plano que se mueve en una dirección normal a sí mismo con una velocidad  $\mathbf{V} = \pm V\mathbf{i}$ .

13-7. Hágase el problema 10-9.

13-8. Háganse los problemas 10-10.

13-9. Dado que el campo eléctrico de una carga estacionaria  $q$  es

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} = -\nabla \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right),$$

hállese el campo electromagnético producido por una carga  $q$  que se observa que se mueve con una velocidad  $\mathbf{V} = V\mathbf{i}$ .

13-10. Demuéstrese que, a partir de las ecuaciones de movimiento y con una elección adecuada del origen del sistema de coordenadas, se halla que la ecuación diferencial de la órbita de una partícula cargada que se mueve en un campo eléctrico uniforme es

$$\frac{d^2x}{dy^2} - \frac{q^2 E^2}{c^2 p_{y0}^2} x = 0.$$

Utilícese esta ecuación para obtener la órbita de una partícula que se mueve en un campo eléctrico uniforme.

13-11. Hállese la ecuación diferencial de la órbita de una partícula relativista en un campo central de fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia, y demuéstrese que las ecuaciones (13-160), (13-161) y (13-162) describen sus órbitas posibles.

13-12. Analizar cualitativamente el movimiento de una partícula cargada relativista sometida a la acción del campo magnético axialmente simétrico que se puede deducir del vector de potencial

$$\mathbf{A} = \alpha \ln \rho \mathbf{k},$$

donde  $\rho$  es la distancia de la partícula al eje  $z$ .

13-13. Determinése el movimiento relativista de una partícula cargada bajo la acción de un campo eléctrico y un magnético perpendiculares.

13-14. Se puede considerar que un fotón es una partícula de masa nula que, sin embargo, posee una cantidad de movimiento lineal  $\mathbf{p} = h/\lambda = h\nu/c$  y una energía cinética  $h\nu$ . Si el fotón choca con un electrón de masa en reposo  $m_0$ , se dispersará o desviará un cierto ángulo  $\theta$  con una nueva energía  $h\nu'$ . Demuéstrese que el cambio en la longitud de onda del fotón está relacionado con el ángulo de dispersión  $\theta$  por la fórmula

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \text{sen}^2 \frac{\theta}{2},$$

donde  $\lambda_c = h/m_0c$  recibe el nombre de *longitud de onda de Compton*. Demuéstrese además que la energía cinética ganada por el electrón que recula es

$$\mathcal{T} - m_0c^2 = \Delta\mathcal{T} = h\nu \frac{2(\lambda_c/\lambda) \text{sen}^2(\theta/2)}{1 + 2(\lambda_c/\lambda) \text{sen}^2(\theta/2)}.$$

13-15. Dado que en un sistema inercial  $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_0 \neq 0$  y  $\mathbf{E}_0$  no es paralelo a  $\mathbf{B}_0$ , hállese la velocidad,  $V$ , del sistema inercial que se mueve en una dirección perpendicular a  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{B}_0$ , con respecto al cual los campos eléctrico y magnético,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , son paralelos.

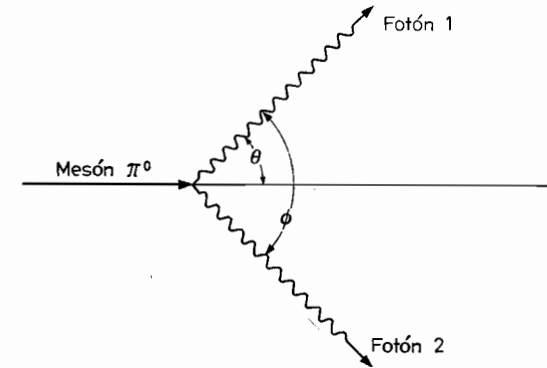


FIG. 13-5

13-16. Un mesón  $\pi^0$  con energía en reposo  $\mathcal{T}_0$ , moviéndose con una velocidad  $v$  en el laboratorio se desintegra en dos rayos  $\gamma$ . Hállense: a) la energía del rayo  $\gamma$  observada en un ángulo  $\theta$  con la dirección de movimiento del mesón  $\pi^0$ ; b) la energía del segundo rayo  $\gamma$  y el ángulo  $\phi$  que se observa forma la dirección en que se propaga este rayo con la dirección de propagación del primero (fig. 13-5).

13-17. Si una partícula de energía cinética inicial  $\mathcal{T}_0$  y energía en reposo  $m_0c^2$  choca con una partícula en reposo, ¿cuál es la energía cinética  $\mathcal{T}$  de la partícula dispersada o desviada elásticamente en un ángulo  $\theta$ ?

13-18. Se necesita una energía  $2m_p c^2 = 1,862$  Mev para producir un "par de protones" en el sistema del centro de masa. ¿Cuál será la energía de umbral para que un electrón produzca un "par de protones" al chocar con un protón en reposo?

## Referencias recomendadas

### Textos de Mecánica Intermedia

- BECKER, R. A., *Introduction to Theoretical Mechanics*. Nueva York: McGraw-Hill, 1954.
- MCCUSKEY, S. W., *An Introduction to Advanced Dynamics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1959.
- LINDSAY, R. B., *Physical Mechanics*. Princeton, N. J.: Van-Nostrand, 1961.
- OSGOOD, W. F., *Mechanics*. Nueva York: Macmillan, 1937.
- SYMON, K. R., *Mechanics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1960.
- SYNGE, J. L. y GRIFFITH, B. A., *Principles of Mechanics*. Nueva York: McGraw-Hill, 1959.

### Textos de Mecánica Avanzada y Relatividad

- BERGMANN, P. G., *Introduction to the Theory of Relativity*. Nueva York: Prentice-Hall, 1942.
- BRILLOUIN, L., *Wave Propagation in Periodic Structures*. Nueva York: McGraw-Hill, 1946 (Nueva York: Dover, 1953).
- CORBEN, H. C. y STEHLE, P., *Classical Mechanics*. Nueva York: Wiley, 1950.
- GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1950.
- LANCZOS, C., *The Variational Principles of Mechanics*. Toronto: University of Toronto Press, 1949.
- LANDAU, L. D. y LIFSHITZ, E. M., *Mechanics*. Londres: Pergamon Press, 1960 (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1960).
- SLATER, J. C. y FRANK, N. H., *Mechanics*. Nueva York: McGraw-Hill, 1947.
- SOMMERFELD, A., *Mechanics (Lectures on Theoretical Physics)*. Nueva York: Academic Press, 1949.
- WEBSTER, A. G., *The Dynamics of Particles and of Rigid, Elastic, and Fluid Bodies*. Leipzig: B. G. Teubner, 1904.
- WHITTAKER, E. T., *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. Cambridge: Cambridge University Press, 1937 (Nueva York: Dover, 1944).

## Textos de Matemáticas

- CHURCHILL, R. V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*. Nueva York: McGraw-Hill, 1963.
- KAPLAN, W., *Advanced Calculus*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1952.
- LASS, H., *Vector and Tensor Analysis*. Nueva York: McGraw-Hill, 1950.
- OSGOOD, W. F., *Advanced Calculus*. Nueva York: Macmillan, 1925.
- PHILLIPS, H. B., *Vector Analysis*. Nueva York: Wiley, 1933.
- SOKOLNIKOFF, I. S. y REDHEFFER, R. M., *Mathematics of Physics and Modern Engineering*. Nueva York: McGraw-Hill, 1958.

## Respuestas a los problemas de números impares

### Capítulo 1

- 1-1. a)  $9\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$     b)  $A = 5\sqrt{2}$ ,  $B = \sqrt{21}$ ,  $C = \sqrt{6}$   
 d)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 3$ ,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = 7$ ,  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = -8$ ,  $\cos \theta_{AB} = 3/5\sqrt{42}$ ,  
 $\cos \theta_{AC} = 7/5\sqrt{12}$ ,  $\cos \theta_{BC} = -8/3\sqrt{14}$   
 e)  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -28\mathbf{i} + \mathbf{j} + 16\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{A} \times \mathbf{C} = 9\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$ ,  
 $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$   
 f)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = -41$ , no    g) cero

1-3.  $c = -2$

1-5.  $-13\mathbf{i} + 31\mathbf{j} - 17\mathbf{k}$

1-11.  $\mathbf{b}_1 = (6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 11\mathbf{k})/41$ ,  $\mathbf{b}_2 = (-\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k})/41$ ,

$\mathbf{b}_3 = (16\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/41$

1-13.  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , donde  $x + 7y + 18z = 13$

1-17. a)  $\bar{\mathbf{k}} = \sin \psi \operatorname{cosec} \theta \mathbf{i}' + \cos \psi \operatorname{cosec} \theta \mathbf{j}'$ ,  $\bar{\mathbf{k}}' = -\operatorname{ctg} \theta \sin \psi \mathbf{i}' - \operatorname{ctg} \theta \cos \psi \mathbf{j}' + \mathbf{k}$

$\bar{\mathbf{e}}'_\phi = \cos \psi \mathbf{i}' - \sin \psi \mathbf{j}' = \mathbf{e}'_\phi$

b)  $\mathbf{i} = (\mathbf{i} \cdot \bar{\mathbf{k}}) \bar{\mathbf{k}} + (\mathbf{i} \cdot \bar{\mathbf{k}}') \bar{\mathbf{k}}' + (\mathbf{i} \cdot \bar{\mathbf{e}}'_\phi) \bar{\mathbf{e}}'_\phi = \sin \theta \sin \phi \bar{\mathbf{k}} + \cos \phi \bar{\mathbf{e}}'_\phi$

$\mathbf{j} = (\mathbf{j} \cdot \bar{\mathbf{k}}) \bar{\mathbf{k}} + (\mathbf{j} \cdot \bar{\mathbf{k}}') \bar{\mathbf{k}}' + (\mathbf{j} \cdot \bar{\mathbf{e}}'_\phi) \bar{\mathbf{e}}'_\phi$

Véanse ecuaciones 9-9 y 9-10 para la resolución.

1-19. a)  $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$

b)  $x = (A + B) \cos \omega t$ ,  $y = (A - B) \sin \omega t$ ,  $A > B$  en sentido contrario al reloj.

$A < B$  en sentido del reloj.

### Capítulo 2

2-1. a)  $\mathbf{v} = -n\omega A \sin n\omega t \mathbf{i} + m\omega B \cos m\omega t \mathbf{j}$

$\bar{\mathbf{a}} = -(n\omega)^2 A \cos n\omega t \mathbf{i} - (m\omega)^2 B \sin m\omega t \mathbf{j}$

b)  $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{a} = 2\mathbf{k}$

c)  $\mathbf{v} = a(1 - \omega \cos \omega t)\mathbf{i} + a\omega \sin \omega t\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{a} = a\omega^2 \sin \omega t\mathbf{i} + a\omega^2 \cos \omega t\mathbf{j}$

d)  $\mathbf{v} = (b_1 + 2c_1t)\mathbf{i} - kd_2e^{-kt}\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{a} = 2c_1\mathbf{i} + k^2d_2e^{-kt}\mathbf{j}$

2-3.  $\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{k} = ab\mathbf{e}_\rho - ck\mathbf{k}$

$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{k} = -ab^2\mathbf{e}_\rho$

2-5.  $\mathbf{b}_1 = \frac{a}{2}(\sinh q_1 \cos q_2\mathbf{i} + \cosh q_1 \sin q_2\mathbf{j})$

$\mathbf{b}_2 = \frac{a}{2}(-\cosh q_1 \sin q_2\mathbf{j} + \sinh q_1 \cos q_2\mathbf{i})$ ,  $\mathbf{b}_3 = \mathbf{k}$

Los vectores son ortogonales con magnitudes

$h_1 = h_2 = \frac{a}{2} \sqrt{\cosh^2 q_1 - \cos^2 q_2}$ ,  $h_3 = 1$ .

$b_i = \frac{1}{h_i^2} \mathbf{b}_i$

2-7.  $v_1 = \frac{1}{2}bx\dot{\phi} \sin \phi$ ,  $v_2 = \frac{1}{2}bx\dot{x} \sin \phi + cx^2\dot{\phi}$

$a_1 = \frac{d}{dt}v_1 - (ax + \frac{1}{2}bx\dot{x} \sin \phi + cx^2\dot{\phi})$

$a_2 = \frac{d}{dt}v_2 - \frac{1}{2}(bx\dot{x}\dot{\phi} \cos \phi)$

2-11. a)  $\rho = \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} / \frac{d^2y}{dx^2}$

b) Para las coordenadas polares  $r$  y  $\phi$ ,

$\rho = \left[ r^2 + \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 \right]^{3/2} / \left[ 2 \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + r^2 - r \frac{d^2r}{d\phi^2} \right]$

2-15.  $\mathbf{e}_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{k})$

Capítulo 3

3-1.  $\mathbf{v} = (20t - 20)\mathbf{i} - 10t\mathbf{j}$ , velocidad = 30 nudos

3-3. a) 4 m/seg<sup>2</sup> verticalmente hacia arriba b) cero

3-5.  $V = R\omega - v_B$ ,  $A = R\alpha - \dot{a}_B$

3-7. Empleando vectores base cilíndricos,

$\mathbf{r} = A \sin \omega t \mathbf{e}_\rho$

$\mathbf{v} = A\omega \cos \omega t \mathbf{e}_\rho - A\Omega \sin \omega t \mathbf{e}_\phi$

$\mathbf{a} = (-A\omega^2 \sin \omega t - A\Omega^2 \sin \omega t)\mathbf{e}_\rho - 2A\omega\Omega \cos \omega t \mathbf{e}_\phi$

3-9. a)  $-2gt\Omega \sin \theta \mathbf{e}_\phi$  b)  $d = r_0\Omega \sin \theta \sqrt{2h/g}$ ,  $r_0 =$  radio de la Tierra

3-11. a)  $v_{1x} = l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1$ ,  $v_{1y} = l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1$

$v_{2x} = l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + v_{1x}$ ,  $v_{2y} = l_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + v_{1y}$

$a_{1x} = l_1\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_1\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1$ ,  $a_{1y} = l_1\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_1\dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1$

$a_{2x} = l_2\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + a_{1x}$

$a_{2y} = l_2\ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + l_2\dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + a_{1y}$

3-13.  $\begin{bmatrix} 11 & 11 & -2 \\ 10 & 3 & 0 \\ 46 & 40 & 6 \end{bmatrix}$

3-15. Véase sección 10-6, ecuación (10-93).

Capítulo 4

4-1. a)  $t_{\text{ascenso}} = \frac{v_0}{g(\sin \theta + \mu \cos \theta)}$ ,  $t_{\text{descenso}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2(\sin^2 \theta - \mu^2 \cos^2 \theta)}}$

$t = t_{\text{ascenso}} + t_{\text{descenso}}$

b)  $\mu_{\text{mín}} = \tan \theta$

4-3.  $x_p = \frac{(F_0/m)e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \phi)}{(\alpha^2 + \omega^2)}$ , donde  $\phi = \tan^{-1} \frac{2\alpha\omega}{\alpha^2 - \omega^2}$

$x(t) = At + B + x_p$ .  $A$  y  $B$  se determinan de  $x(0)$  y  $\dot{x}(0)$ .

4-5.  $e^{-\mu x} = \frac{a}{\mu t + b}$ ,  $\dot{x} = \frac{1}{\mu t + b}$

4-7. a)  $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{3}kx^3 = \frac{1}{2}mv_0^2$  b)  $\dot{x} = 0$  en  $x = (3mv_0^2/2k)^{1/3}$

c)  $\dot{x} = \sqrt{v_0^2 - (2kx^3/3m)}$

4-9. a)  $F(x) = -\frac{a}{x} + \frac{2b}{x^3}$ ,  $x > 0$  b)  $x = \sqrt{\frac{2b}{a}}$

c) Si,  $\omega = \sqrt{\frac{a^2}{mb}}$

4-11. Limitado para  $E < 0$ , no limitado para  $E \geq 0$ ;  $\tau = -\frac{\pi a}{E} \sqrt{\frac{m}{-2E}}$

4-13. Para  $\mu < \omega_0$ ,

$x = Ae^{-\mu t} \sin(\nu t + \phi) + Ct + D$ ,

donde  $C = F_0/m\omega_0^2$ ,  $D = -2\mu F_0/m\omega_0^4$  y  $A$  y  $\phi$  son la solución de las ecuaciones.

$x(0) - D = A \sin \phi$ ,  $\dot{x}(0) - C = A\nu \cos \phi - \mu A \sin \phi$ .

4-15.  $\sigma = \frac{Ne^2}{m} \frac{2\mu - i\omega}{\omega^2 + 4\mu^2}$

4-17.  $\omega_r = \omega_0$ ,  $\Delta \approx \mu \sqrt{3}$

$$4-23. a) \omega_0 = \sqrt{gl} \quad b) \omega_0 = \sqrt{gb/a^2}$$

4-25. Suponiendo  $x_1 = a_1 \cos \omega t + a_3 \cos 3\omega t$ , se halla

$$(\omega_0^2 - \omega^2)a_1 = F_0/m - \beta(\frac{3}{4}a_1^3 + \frac{3}{4}a_3^2 a_1 + \frac{3}{2}a_1 a_3^2),$$

$$(\omega_0^2 - 9\omega^2)a_3 = -\beta(\frac{1}{4}a_1^3 + \frac{3}{4}a_3^3 + \frac{3}{2}a_1^2 a_3),$$

con las que se determinan  $a_1$  y  $a_3$ .

4-27. La solución supuesta da

$$(\omega_0^2 - \omega^2)a_1 = F_0/m - \beta(\frac{3}{4}a_1^3 + \frac{1}{4}a_{1/3}^3 + \frac{3}{2}a_1 a_{1/3}^2),$$

$$(\omega_0^2 - \frac{1}{9}\omega^2)a_{1/3} = -\beta(\frac{3}{4}a_{1/3}^3 + \frac{3}{2}a_1^2 a_{1/3} + \frac{3}{2}a_1 a_{1/3}^2).$$

La última ecuación es cuadrática en  $a_{1/3}$  ( $a_{1/3}$  es un factor),

$$(\omega_0^2 - \frac{1}{9}\omega^2) = -\beta(\frac{3}{4}a_{1/3}^2 + \frac{3}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_1 a_{1/3}).$$

Una solución es posible si  $a_{1/3}$  es real. Esto se satisface si se condiciona el discriminante de la última ecuación a que sea positivo.

## Capítulo 5

$$5-3. a) \text{ sobre } e_1, mg \cos \theta + m\ddot{y} \cos \theta - R = -ml\dot{\theta}^2$$

$$\text{sobre } e_2, -mg \sin \theta - m\ddot{y} \sin \theta = ml\ddot{\theta}$$

$R$  = tracción o tensión de la cuerda

$$5-5. V^2 = l^2\dot{\theta}^2 + v^2 + 2vl\dot{\theta} \sin(\theta - \phi), \text{ donde } \phi = (v/a)t \text{ es el ángulo que el radio vector del punto de soporte forma con el eje } x; U = mga \sin \phi - mgl \cos \theta$$

$$5-7. a) T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2), U = mg\rho \cos \phi, \text{ restricción } \rho - a = 0$$

$$b) R = 3mg \cos \phi - 2mg \quad c) R = 0 \text{ o } \cos \phi = \frac{2}{3}$$

$$5-9. a) T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2), U = mgz, \rho - z \operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$b) v^2 = gz$$

$$5-11. a) \text{ sobre } e_1: -R_1 + R_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + m_1g \cos \theta_1 = -m_1l_1\dot{\theta}_1^2,$$

donde  $R_i$  = tensión de la  $i$ -ésima cuerda

$$\text{sobre } e_2: R_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_1g \cos \theta_1 = m_1l_1\ddot{\theta}_1$$

$$\text{sobre } e_2: -m_2g \sin \theta_1 - R_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$= m_2l_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2l_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2l_1\ddot{\theta}_1$$

$$\text{sobre } e_4: -m_2g \sin \theta_2 = m_2l_2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$+ m_2l_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$b) T = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_2^2\dot{\theta}_2^2 + l_1^2\dot{\theta}_1^2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$5-15. a) T = \frac{1}{2}m(q_1^2 + q_2^2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), p_1 = m(q_1^2 + q_2^2)\dot{q}_1, p_2 = m(q_1^2 + q_2^2)\dot{q}_2$$

$$c) Q_1 = -mq_1\dot{q}_2^2 = -m\dot{c}u_0^2, Q_2 = mq_2\dot{q}_2^2 = mu_0^3\dot{t}$$

$$d) F_x = Q_1b_{1x} + Q_2b_{2x}, F_y = Q_1b_{1y} + Q_2b_{2y}, \text{ donde}$$

$$b_1 = \nabla q_1 = \frac{1}{h_1^2}b_1 = \frac{1}{h_1^2}(q_1i + q_2j),$$

$$b_2 = \frac{1}{h_2^2}b_2 = \frac{1}{h_2^2}(-q_2i + q_1j);$$

$$h_1^2 = h_2^2 = q_1^2 + q_2^2 = c^2 + u_0^2t^2$$

## Capítulo 6

6-1. a), c) y d) son conservativas

$$a) U = - \left[ \int f(x) dx + \int f(y) dy + \int f(z) dz \right]$$

$$c) U = -a \ln r = -\frac{a}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2) \quad d) U = -\frac{x^2y^2z}{2}$$

6-3. a)  $-28\pi$  b) 14

6-5. Para  $\mu^2 \ll \omega_0^2$  y  $\omega_L$  pequeño,

$$(\omega_{\text{res}} \pm \omega_L)^2 = \omega_0^2 - 2\mu^2.$$

6-7. a)  $v_0 = 2\phi/qB = 1.1 \times 10^5$  m/seg

$$b) m = 2T/v_0^2 = 2.45 \times 10^{-23} \text{ g} = 14.7 \text{ uma} \quad c) A = 15$$

6-9.  $\theta = 45^\circ, 71.5^\circ$

6-13. a)  $x = A \cos(\omega_1 t + \phi_1), y = B \sin(\omega_2 t + \phi_2)$ , donde  $m\omega_1^2 = k_1, m\omega_2^2 = k_2$ ; la órbita es cerrada si  $n_1\omega_1 = n_2\omega_2$ , donde  $n_1$  y  $n_2$  son enteros

$$b) H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2), \dot{x} = \frac{p_1}{m}, \dot{y} = \frac{p_2}{m}$$

$$\dot{p}_1 = -k_1x, \dot{p}_2 = -k_2y$$

$$6-15. e) \alpha = i\omega = \pm i\sqrt{2}, \pm 2i\sqrt{3}$$

6-21. Con  $B$  sobre el eje  $z$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{Nq^2}{m} \frac{2\mu + i\omega}{(2\mu + i\omega)^2 + q^2B^2/m^2}$$

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \frac{Nq^2}{m} \frac{qB/m}{(2\mu + i\omega)^2 + q^2B^2/m^2}$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0, \sigma_{zz} = \frac{Nq^2}{m} \frac{1}{2\mu + i\omega}$$

## Capítulo 7

$$7-3. U_{\text{ef}} = \frac{k}{r^2} \left[ \frac{h^2}{2mk} - re^{-ar} \right]$$



La órbita limitada es posible si para algún valor de  $r$ ,  $re^{-ar} > h^2/2mk$ . Esto es posible si el valor máximo de  $re^{-ar}$  excede de  $h^2/2mk$  o  $1/ae > h^2/2mk$ . En este caso, hay dos órbitas circulares posibles. La que tiene energía total negativa es estable. Por consiguiente, hemos de tener

$$E = U_{ef} < 0 \quad \text{o} \quad \frac{k}{r^2} \left[ \frac{h^2}{2mk} - re^{-ar} \right] < 0.$$

Pero para una órbita circular

$$\frac{h^2}{mr^3} = -F_r = \frac{k(1+ar)}{r^2} e^{-ar}.$$

De donde,  $(k/r)[ar - 1]e^{-ar} < 0$  o  $aa < 1$  para la órbita estable de radio  $a$ .

7-5. Por la ley de Newton para órbitas giratorias esperamos que las órbitas sean movimientos rectilíneos descritos con respecto a un sistema de coordenadas con precesión; es decir, espirales. Concretamente, para

$$h^2 > mk, \quad \frac{1}{r} = A \cos \sqrt{1 - \frac{mk}{h^2}} (\phi - \phi_0),$$

$$h^2 < mk, \quad \frac{1}{r} = A \cosh \sqrt{\frac{mk}{h^2} - 1} (\phi - \phi_0),$$

(o una combinación lineal de  $e^{\pm \sqrt{mk/h^2 - 1}\phi}$ ),

$$h^2 = mk, \quad \frac{1}{r} = A\phi + B.$$

7-7. a)  $k > 0, m\omega^2 = 4k$

b)  $k_2 > 0, \kappa_1 < 0, m\omega^2 = |\kappa_1|^3/k_2^2$ , donde  $\kappa_1 = \frac{h^2}{2m} + k_1$

c)  $0 < k < 2, m\omega^2 = (2-k)h^2/mr^4$

7-9. Aproximadamente  $\frac{1}{3}\Omega \sin \theta \sqrt{8h^3/g}$  hacia el este

7-11. a)  $v = \sqrt{GM/r}$     b)  $v = \sqrt{2GM/r}$

c)  $a = \frac{1}{2}(r_{\text{máx}} + r_{\text{mín}})$ ,  $e = \frac{1}{2a}(r_{\text{máx}} - r_{\text{mín}})$

d)  $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{r_{\text{máx}}}{r_{\text{mín}}}}$     e)  $E = -\frac{GMm}{2a}$

7-13.  $r_{\text{mín}} = \frac{Ze^2}{\pi \epsilon_0 m v_0^2}$

### Capítulo 8

8-1. Si  $\mathbf{p}_1 = 3m\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{p}_2 = 2m\mathbf{a}$ , entonces

$$\mathbf{p}_3 = -m(3\mathbf{a} + 2\mathbf{a}), \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{p}_i \times 10^5.$$

8-3. a)  $v_1 = v_2 = \frac{1}{2}v_0$     b)  $v_1 = \frac{1}{2}v_0(1 + \sqrt{2})$ ,  $v_2 = \frac{1}{2}v_0(1 - \sqrt{2})$

8-5.  $\frac{m_1}{m_2} = 1 + 2 \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \cos(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\sin^2(\theta_2 + \theta_1) - \sin^2 \theta_2}{\sin^2 \theta_1}$

8-7.  $T_1 = Q \left[ 1 - \frac{m_1}{m_3} \frac{\sin^2 \theta_4}{\sin^2(\theta_3 + \theta_4)} - \frac{m_1}{m_4} \frac{\sin^2 \theta_3}{\sin^2(\theta_3 + \theta_4)} \right]^{-1}$

8-9.  $M_1 = 36,200 \text{ Kg}$ ,  $M_2 = 1,770 \text{ Kg}$

8-11. Midiendo  $x_1, x_2, x_3$  desde la recta horizontal que pasa por el centro de la polea fija

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 + m_3\dot{x}_3^2),$$

$$U = -m_1gx_1 - m_2gx_2 - m_3gx_3.$$

La restricción es  $x_2 + x_3 + 2x_1 = \text{constante}$ , la cual introduce las tensiones en las cuerdas que unen las masas, en las ecuaciones de movimiento.

8-13. a)  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 + \frac{1}{2}m(l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m(l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 + \frac{1}{2}m(l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \dot{x})^2$

$$U = -2mgl_1 \cos \theta_1 - mgl_2 \cos \theta_2$$

b) Para valores pequeños de  $\theta$ ,

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l_1\dot{\theta}_1 + \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2 + \dot{x})^2$$

$$U = mgl_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}mgl_2\theta_2^2$$

8-15. a) Empleando coordenadas esféricas para determinar la posición de las bolas,

$$T = m(l^2\dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}M(2l \sin \theta \dot{\theta})^2$$

$$U = -2mgl \cos \theta - 2Mgl \cos \theta$$

b) altura  $z = 2l - 2 \frac{m+M}{m\omega^2} g$

$$\text{equilibrio en } l \cos \theta_0 = \frac{m+M}{m\omega^2} g$$

frecuencia de las pequeñas oscilaciones  $\Omega$  dada por

$$\Omega^2 = \frac{m\omega^2 \sin^2 \theta_0}{m + 2M \sin^2 \theta_0}$$

8-17. a)  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$     b)  $\omega^2 = \frac{k}{m} + \frac{g}{l}$     c)  $\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \frac{g}{l}$

d)  $\omega_{\text{bat}} = |\omega_1 - \omega_2|$

8-19.  $x_1 = A \cos \omega t$ ,  $x_2 = B \cos \omega t$ , donde  $A = F_0(2k - m\omega^2)/mD$ ,

$$B = kF_0/mD, \quad D = (3k - m\omega^2)(k - m\omega^2)$$

8-21. La relación entre  $\mathbf{f}$  y  $\omega$  es

$$\omega^4 - 2k \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \omega^2 + \frac{4k^2}{mM} \text{sen}^2 \frac{\ell d}{2} = 0.$$

Para la propagación

$$\frac{4k^2}{mM} \text{sen}^2 \frac{\ell d}{2} = \frac{2k}{mM} (m + M) \omega^2 - \omega^4 \geq 0;$$

luego  $\omega^2 \leq (2k/mM)(m + M)$ , donde  $m = m_1$ ,  $M = m_2$ .

Para todos los valores de  $\ell d$  entre cero y  $\pi$  hay dos raíces para  $\omega^2$ . La raíz mayor se encuentra entre  $2k/m$  y  $(2k/mM)(m + M)$ , mientras que la menor está entre cero y  $2k/M$ , con  $M > m$ . Luego tampoco habrá propagación para  $2k/M < \omega^2 < 2k/m$ .

8-23. Para  $m\omega_1^2 = k$  y  $M\omega_2^2 = k$  hallamos que

$$\text{sen}^2 \frac{\ell_1 d}{2} = \frac{\omega^2}{4\omega_1^2}, \quad \text{sen}^2 \frac{\ell_2 d}{2} = \frac{\omega^2}{4\omega_2^2}.$$

Para las masas  $n = 0$  y  $n = 1$  obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} -m\omega^2(A + B) &= -2k(A + B) + k(Ce^{it_2d} + Ae^{it_1d} + Be^{-it_1d}), \\ -M\omega^2Ce^{-it_2d} &= -2kCe^{-it_2d} + k(Ce^{-2it_2d} + A + B), \end{aligned}$$

con las que se pueden determinar  $B$  y  $C$  en función de  $A$ . Se obtienen ecuaciones semejantes para las constantes  $D$ ,  $E$  y  $F$ .

### Capítulo 9

9-1. a)  $\frac{8}{10}mr^2, \frac{8}{20}mr^2 + \frac{8}{5}mh^2$  a  $\frac{1}{4}h$  de la base

9-3. Véase tabla 9-1.

9-5. a)  $I_{xx} = 10Ma^2, I_{yy} = I_{zz} = 6Ma^2, I_{yz} = 4Ma^2, I_{zx} = I_{xy} = 0$

b)  $I_1 = I_2 = 10Ma^2, I_3 = 2Ma^2$

$$e_{1,2} = (a^2 + 2b^2)^{-1/2}[ai + b(i - k)], \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + k)$$

9-7. a) Escogiendo  $k$  a lo largo del eje de rotación ( $\omega = \omega k$ ),  $k'$  a lo largo del eje de simetría del disco e  $i$  verticalmente hacia arriba, obtenemos  $\psi = \dot{\theta} = 0$ ,  $\dot{\phi} = \omega$ ,  $N_\psi = N_\phi = 0$ , y para  $I_1 = I_2 = \frac{1}{2}I_3$ ,

$$N_\theta = \frac{1}{2}I_3\omega^2 \text{sen } 2\alpha,$$

$$F = \frac{W}{2}i \pm \frac{N_\theta}{l}[\text{sen}(\omega t + \phi_0)i - \cos(\omega t + \phi_0)j]$$

b) Escogiendo  $k$  verticalmente hacia arriba,  $t = 0$  cuando el plano de  $k$  y  $k'$  es vertical, y el eje  $i$  a lo largo de la dirección inicial de  $\omega$ , tenemos

$$\omega = \omega(\cos \Omega t i + \text{sen} \Omega t j), \quad \Omega = \Omega k,$$

y, por consiguiente,

$$\dot{\psi} = (\omega + \Omega) \cdot \bar{k}' = -\frac{\omega}{\text{sen} \theta} \text{sen}(\Omega t - \phi),$$

$$\dot{\theta} = (\omega + \Omega) \cdot e_\phi = \omega \cos(\Omega t - \phi),$$

$$\dot{\phi} = (\omega + \Omega) \cdot \bar{k} = \Omega + \omega \text{ctg} \theta \text{sen}(\Omega t - \phi),$$

y

$$N_\psi = \frac{d}{dt} I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta),$$

$$N_\theta = \frac{d}{dt} (I_1 \dot{\theta}) - I \dot{\phi}^2 \text{sen} \theta \cos \theta + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\phi} \text{sen} \theta,$$

$$N_\phi = \frac{d}{dt} [I_1 \dot{\phi} \text{sen}^2 \theta + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta].$$

9-9. Para ángulos pequeños, la ecuación de movimiento para  $\theta$  es:

$$\ddot{\theta} = -\left[\frac{g}{l} - \omega_0^2\right]\theta,$$

que da un movimiento oscilatorio para  $g/l > \omega_0^2$ . (El desarrollo no es válido para  $g/l < \omega_0^2$ )

9-13. a)  $T = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}Mh^2\dot{\phi}^2 - MRh\dot{\phi}^2 \cos \phi + \frac{1}{2}MR^2\dot{\phi}^2, U = -Mgh \cos \phi$

b)  $(I + Mh^2 - 2MRh \cos \phi + MR^2)\ddot{\phi} = -Mgh \text{sen} \phi$ , que para  $\phi$  pequeño se reduce a

$$\ddot{\phi} = -\frac{Mgh}{I + M(R - h)^2} \phi.$$

Luego  $\omega^2 = Mgh/[I + M(R - h)^2]$ .

9-15. a)  $T = \frac{3}{40}ML^2\dot{\theta}^2[1 + 5 \cos^2 \alpha] \cos^2 \alpha$

$$U = -\frac{3}{4}MgL \cos^2 \alpha \text{sen} \beta \cos \theta + \text{const}$$

b)  $\omega^2 = 5g \text{sen} \beta / L(1 + 5 \cos^2 \alpha)$

9-17. a)  $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Mgl \cos \theta = \frac{1}{2}Mgl, I = \frac{1}{3}ML^2$

b)  $\frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}Mgl \cos \theta = \frac{1}{2}Mgl$ , donde  $v = \frac{1}{2}l\dot{\theta} \text{sen} \theta$

c)  $I_0\ddot{\theta} = \frac{Nl}{2} \text{sen} \theta - \frac{\mu Nl}{2} \cos \theta, M\ddot{y} = Mg - N, M\ddot{x} = -\mu N$

$$\dot{y} = \frac{l}{2}\dot{\theta} \text{sen} \theta \text{ y } N = \text{fuerza normal de reacción}$$

9-19.  $v_{CM} = \frac{3 - 4\epsilon}{7}V, l\omega = \frac{6}{7}(1 + \epsilon)v$

9-21. a) El trompo tiene precesión uniforme sin nutación.

## Capítulo 10

$$10-1. \quad a) \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b) [-4 \quad 11] \quad c) \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$10-3. \quad a) (S_s) = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}, (S_a) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b) (S_s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}, (S_a) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$c) (S_s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{bmatrix}, (S_a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$10-5. \quad a) \mathbf{u}_1 \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{14}} [3, 2, 1], \mathbf{u}_2 \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{27}} [-1, -1, 5], \mathbf{u}_3 \leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt{42}} [-11, 16, 1]$$

$$10-7. \quad a) \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 6 \\ 6 \\ -3 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 & 9 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & -2 & 12 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$10-9. \quad a) \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \frac{iV}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{iV}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \text{ donde } \gamma = \left[ 1 - \frac{V^2}{c^2} \right]^{-1/2}$$

b) Véase ecuación (13-87).

10-11. Los elementos diagonales son

$$a) 2, 4 \quad b) -1, 3, -2 \quad c) 4, 10, -8 \\ d) 1, 7, 1 \quad e) 9, 4, 36 \quad f) 0, 2$$

$$10-15. \quad (\mathbf{X}) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -13 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \quad 10-17. \quad (\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \mp i & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \mp i \\ 0 & \pm i\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \mp i & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \pm i \end{bmatrix}$$

## Capítulo 11

11-1. a) Equilibrio en  $(0, \frac{3}{2}a, a)$ ,  $m\omega^2 = 10U/a^2, 4U/a^2, 8U/a^2$ , donde

$$U = U(0, \frac{3}{2}a, a) = U_0 e^{-27/4}$$

11-3. a)  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{8}\lambda\dot{x}^2$

11-5. b)  $\omega = 0, \pm 2, \pm 3$

c) Solución general:

$$x_1 = 3A \cos(2\omega t + \phi_1) + 4B \cos(3\omega t + \phi_2) + \alpha t + \beta,$$

$$x_2 = A \cos(2\omega t + \phi_1) - 2B \cos(3\omega t + \phi_2) + \alpha t + \beta,$$

$$x_3 = -3A \cos(2\omega t + \phi_1) + B \cos(3\omega t + \phi_2) + \alpha t + \beta,$$

$A, B, \alpha, \beta$  se determinan con las condiciones iniciales

$$11-11. \quad T = \frac{1}{2}M \left( \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \text{ donde } L\omega = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$$

$U = \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2)$ ,  $x_1$  y  $x_2$  medidas a partir de la posición de equilibrio.

11-13. Condiciones iniciales:  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ ,  $k_1 x_1 = mg$ ,  $k_2 |x_2 - x_1| = mg$ , o bien,

$$k_2(x_2 - x_1) = mg \quad \text{si} \quad k_1 > k_2$$

$$k_2(x_1 - x_2) = mg \quad \text{si} \quad k_1 < k_2$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  se miden desde las posiciones de equilibrio respectivas de las masas.

Solución general:

$$x_1 = 2A \cos(\sqrt{6}t + \phi_1) + B \cos(t + \phi_2)$$

$$x_2 = -A \cos(\sqrt{6}t + \phi_1) + 2B \cos(t + \phi_2)$$

11-15. a)  $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$ ,  $U = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2$

$$mx_1 = k(x_2 - x_1) + m\mu(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$mx_2 = k(x_3 - x_2) - k(x_2 - x_1) - m\mu(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + m\mu(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)$$

$$mx_3 = -k(x_3 - x_2) - m\mu(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)$$

11-19.  $x_1 = A + Be^{-t}$ ,  $x_2 = C + De^{-t}$ , donde

$A = C = F_0/m\omega_0^2$ ,  $m\omega_0^2 = k$ ,

y

$B = \frac{1 - 2\mu + \omega_0^2}{\omega_0^2 - \mu}$ ,  $D = \frac{(F_0/m)(1 - 2\mu + \omega_0^2)}{(\mu - \omega_0^2)^2 - (1 - \mu + 2\omega_0^2)(1 - 2\mu + \omega_0^2)}$

11-21.  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}} \left(1 - \frac{\Delta m}{4m}\right)$ ,  $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \left(1 - \frac{\Delta m}{4m}\right)$

11-23. a)  $T = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^6 \dot{x}_i^2 + \dot{x}_1\dot{x}_4 + \dot{x}_2\dot{x}_5 + \dot{x}_3\dot{x}_6$

$U = \frac{1}{2}k \left[ \frac{\epsilon}{4} \sum_{i=1}^6 x_i^2 + x_1(x_3 + 2x_4 + \frac{1}{2}x_6 + 2x_5 + x_2) + x_2(x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 2x_5 + 2x_6) + x_3(2x_4 + 2x_6 + \frac{1}{2}x_5) + x_4(x_5 + x_6) + x_5x_6 \right]$

a, b, c, designan las tres partículas

d)  $O_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) Los valores propios son  $\lambda = 1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$

Vectores propios para

$\lambda = 1: e_1 \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} [1, 1, 1, 0, 0, 0], e_4 \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} [0, 0, 0, 1, 1, 1]$

$\lambda = e^{2\pi i/3}: e_2 \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} [1, \epsilon, \epsilon^2, 0, 0, 0], e_5 \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} [0, 0, 0, 1, \epsilon, \epsilon^2]$

$\lambda = e^{4\pi i/3}: e_3 \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} [1, \epsilon^2, \epsilon, 0, 0, 0], e_6 \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} [0, 0, 0, 1, \epsilon^2, \epsilon]$

donde  $\epsilon = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}), \epsilon^2 = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) = \epsilon^*$ ,  $\epsilon^{\star 2} = \epsilon$

(S) =  $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \epsilon & \epsilon^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \epsilon^2 & \epsilon \end{bmatrix}$

f)  $|\bar{r}\rangle = S|r\rangle, \bar{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3), \bar{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + \epsilon x_2 + \epsilon^2 x_3)$

$\bar{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + \epsilon^2 x_2 + \epsilon x_3)$ , etc.

g)  $\omega^2 = 0, \frac{3}{2} \frac{k}{m}, 9 \frac{k}{m}$ ; cero es una raíz triple,  $\frac{3}{2} \frac{k}{m}$  es una raíz doble.

Capítulo 12

12-1.  $\psi(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen } k_n z \cos \omega_n t$ , donde  $k_n = (2n - 1)\pi$ ,  $\omega_n = \sqrt{T/\mu} k_n$ ,  $a_n = 0.8(-1)^{n+1}/k_n^2$

12-3. a)  $T \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{T\lambda}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$ , donde  $T\lambda/v$  es la constante de amortiguación

b)  $\psi_n(z, t) = A e^{-k_n vt} \text{senh } k_n z$ , donde las  $k_n$  son las raíces de la ecuación  $\text{tgh } kl = 1/\lambda$

12-5. a)  $-T \frac{\partial \psi}{\partial z} = m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$

b)  $\psi_n(z, t) = A \text{sen } k_n l \text{sen } \omega_n t$ , donde  $\omega_n = k_n \sqrt{T/\mu}$ , y  $k_n$  es una raíz de la ecuación

$k_n \text{tg } k_n l = \mu/m$

12-7.  $\psi(z, t) = A \text{sen } \omega t \frac{\text{sen } k(l-z)}{\text{sen } kl}$ , donde  $k = \omega \sqrt{\frac{\mu}{T}}$

12-9.  $\psi(z, t) = \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n e^{i(\omega t + \phi)} \text{sen } (n\pi z/l)}{(k_n^2 - k^2) + 2i\lambda k}$ , donde  $k_n = \omega_n \sqrt{\frac{\mu}{T}} = \frac{n\pi}{l}$ ,

$k = \omega \sqrt{\frac{\mu}{T}}, f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \text{sen } k_n z dz$

12-11.  $\gamma = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$

La frecuencia de corte es  $\omega = kv = \pi v/a$ , donde  $a$  es la mayor dimensión de la sección transversal. Para el modo  $nm$  de la TM, la frecuencia de corte es

$\omega = v \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$

12-13. a)  $r_{12} = \frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1}, t_{12} = \frac{2n_{12}}{n_{12} - 1}$  b)  $k_2 = \sqrt{k_1 k_3}, n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$

12-15. b)  $T \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{0+} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{0-} \right) = \kappa \psi$  c)  $\text{tg } kl = -\frac{2Tk}{\kappa}$

$$d) \left( \frac{n\pi}{2l} - k_n \right) = - \frac{\kappa}{n\pi T}$$

$$12-17. a) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = - \frac{1}{T} \kappa(\psi_2 - \psi_1) \delta(z),$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = \frac{1}{T} \kappa(\psi_2 - \psi_1) \delta(z)$$

o

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = 0$$

con

$$T \left( \left. \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right|_{0+} - \left. \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right|_{0-} \right) = -\kappa(\psi_2 - \psi_1) \quad \text{en } z = 0,$$

$$T \left( \left. \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right|_{0+} - \left. \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right|_{0-} \right) = \kappa(\psi_2 - \psi_1) \quad \text{en } z = 0$$

d) Para la solución par  $\phi_1$ , las frecuencias propias se obtienen con la ecuación  $\cos kl = 0$ . Las frecuencias propias para la solución impar  $\phi_2$  se hallan con la ecuación  $\text{tg } kl = -Tk/\kappa$ .

### Capítulo 13

13-1.  $d = 4.64 \times 10^3 \text{ m}$

13-3.  $pc = 39.8m_e, J = 233.2m_e$

13-9.  $E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x - Vt)(1 - V^2/c^2)}{\bar{r}^3}, E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y(1 - V^2/c^2)}{\bar{r}^3}$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z(1 - V^2/c^2)}{\bar{r}^3}$$

donde  $\bar{r}^2 = (x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right)$ .

$$\mathbf{B} = \gamma \frac{\mathbf{V}}{c^2} \times \mathbf{E}', \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{E}}{c^2}$$

o sea,

$$B_x = 0, \quad B_y = -\frac{V}{c^2} E_z, \quad B_z = \frac{V}{c^2} E_y$$

13-11.  $\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \lambda u = -\frac{k\epsilon}{l^2 c^2}$ , donde  $f(r) = \frac{k}{r}, \lambda = 1 - \frac{k^2}{l^2 c^2}$

13-13. Las ecuaciones de movimiento son:

$$m_0 \ddot{x} = \gamma qE + qy\dot{B} = qE\dot{t} + qB\dot{y},$$

$$m_0 \ddot{y} = -qxB,$$

$$m_0 \ddot{z} = 0, \quad m_0 c \dot{t} = \frac{qE}{c} x$$

Estas son ecuaciones diferenciales simultáneas con coeficientes constantes. La solución de tanteo  $x = Ae^{at}$ , etc., da una ecuación secular cuyas raíces son

$$\alpha^2 = 0, \frac{q^2}{m_0^2 c^2} (E^2 - c^2 B^2),$$

donde cero es una raíz de cuarto orden. Con una elección apropiada del origen, la solución que satisface la condición  $u^2 = -c^2$  para  $E^2 < c^2 B^2$  es

$$x = A_1 \cos(\omega t + \phi),$$

$$y = -\frac{qB}{m\omega} A_1 \text{sen}(\omega t + \phi) - \frac{qE}{mc} A_2 t,$$

$$ct = \frac{qE}{mc\omega} A_1 \text{sen}(\omega t + \phi) + \frac{Bq}{m} A_2 t,$$

$$z = A_3 \omega t,$$

donde

$$A_2^2 - A_1^2 - A_3^2 = \frac{c^2}{\omega^2}, \quad \omega^2 = \frac{q^2}{m^2 c^2} (c^2 B^2 - E^2).$$

13-15.  $V$  es la raíz de la ecuación

$$\frac{V/c}{1 - V^2/c^2} = \frac{c|\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0|}{c^2 B_0^2 + E_0^2}$$

cuya magnitud es menor que  $c$ .

13-17. Es la solución de

$$\frac{J_1 - m_0 c^2}{J_1 + m_0 c^2} = \frac{J_0 - m_0 c^2}{J_0 + m_0 c^2} \cos^2 \theta.$$

# Indice alfabético

## A

Aceleración, 37, 39  
angular, 73  
centrípeta, 73  
componente(s),  
en coordenadas cartesianas, 38  
en coordenadas cilíndricas, 39  
en coordenadas esféricas, 43  
covariantes, 52  
normal, 60  
tangencial, 60  
de Coriolis, 43, 73  
en cuatro dimensiones, 518  
de la partícula que se mueve en una  
circunferencia, 61  
relativista tetradimensional, 520  
Adición de matrices, 375  
Aire,  
amortiguamiento producido por el, 117  
resistencia del, 497  
Algebra matricial, 375  
Amortiguado, movimiento, 441  
Amortiguamiento,  
fuerzas de, 116, 118, 491  
oscilador armónico con, 118  
Anarmónico,  
movimiento, 147  
oscilador, 147-148  
Anchura media de la curva de frecuencia  
de resonancia, 132-133  
Angular,  
aceleración, 73  
frecuencia, 469  
velocidad, 27, 71, 88, 332 (véase *Ve-*  
*locidad angular*)  
Angulo(s),  
de dispersión, 253  
de Euler, 35  
Arco, longitud del, 56  
Area,  
barrida por el vector radial, 240  
de la elipse, 251  
de una superficie infinitesimal, 57  
Areolar, velocidad, 240  
Armónicas, ondas (véase *Ondas armó-*  
*nicas*)  
Armónico, oscilador (véase *Oscilador ar-*  
*mónico*)

Asociativa, ley, 3  
Átomos,  
en un campo eléctrico, 165  
en un campo magnético, 203, 296  
Atwood, máquina de, 275, 335-336  
Axial, vector, 388

## B

Bloch, teorema de, 483  
Bandas de transmisión, 484  
permitidas, 484  
prohibidas, 484  
Bohr, N., 545  
Bragg, W. L., 17  
difracción de, en un cristal, 18, 307  
ley de, 17

## C

Cambio de fase ante la reflexión, 480  
Campo eléctrico, 190  
uniforme, movimiento en un, 193  
Campo electromagnético, 425  
invariantes relativistas del, 530  
tensor de, 529  
transformación de Lorentz, 527-528  
Campo magnético, 192  
uniforme, movimiento en un, 193  
Cantidad(es) de movimiento,  
angular, 161, 273, 544  
conservación de la, 282  
de un cuerpo rígido, 320-321  
ecuaciones, 163-164, 262  
orbital, 207, 274-275  
conservación de la, 231  
de la partícula, 161, 164  
relación con la velocidad angular de  
un cuerpo rígido, 320  
conservación de la, 279-280  
generalizada o conjugada, 211-213,  
291, 536, 538, 541  
covariantes de la partícula, 51, 160,  
539  
lineal, 99, 279, 291  
del centro de masa, 280  
conservación de la, 293

- relativista, 522, 536  
 tetradimensional relativista, 525  
 tetradimensional, 523  
 Característica, frecuencia, 486  
 Cartesiano, sistema (véase *Sistema de coordenadas cartesianas*)  
 Central, fuerza (véase *Fuerza central*)  
 Centrípeta, aceleración, 73  
 Centro de masa, 261  
 cantidad de movimiento angular del, 273  
 ecuación de movimiento del, 261, 280, 339  
 energía cinética del, 265  
 de un hemisferio, 315  
 velocidad del, 264  
 Ciclotrón, 196  
 Cinemática de la partícula, 36 ss.  
 Cinética, energía, 104, 264, 282 (véase *Energía cinética*)  
 Clásica, mecánica, 238  
 Coeficiente de restitución, 269  
 Coeficiente de rozamiento, de deslizamiento, 341  
 estático, 341  
 Cohete, movimiento por, 270  
 Colisión, elástica, 268  
 de partículas, 545-548  
 protón-protón, 548  
 Complejas, ondas armónicas, 469  
 Componente de la ecuación de movimiento de Newton, 144  
 Componente de un vector, 5  
 covariante, 50-51  
 de la aceleración, 52  
 de la velocidad, 51  
 de la ecuación de Euler a lo largo de un eje principal, 332  
 Componentes, contravariantes de la velocidad, 51  
 contravariantes de tensor métrico, 35  
 covariantes de la velocidad, 50  
 del momento del par, 159  
 Compton, longitud de onda de, 550  
 Condiciones en la frontera, 478  
 para la función de Green, 492  
 Conductividad tensorial, 230  
 de corriente continua, 118, 230  
 Configuración de equilibrio de un sistema conservativo de partículas, 430  
 Conjunto infinito de osciladores acoplados, 304  
 Conmutativa, ley de la suma de vectores, 3  
 Cono, del cuerpo, 357-358  
 espacial, 356-358  
 Conservación, de la cantidad de movimiento, angular, 232, 542  
 generalizada, 293  
 lineal, 279-280  
 tetradimensional, 545  
 de la energía, 104, 184, 231, 264, 280, 343, 478, 542  
 teoremas de, y ecuaciones de Lagrange, 293  
 Conservativas, fuerzas, 182, 187-188  
 Contracción de Lorentz-Fitzgerald, 513, 515  
 Contravariantes, componentes, de la velocidad, 51  
 Coordenadas, cartesianas, 4, 37  
 cilíndricas, 39  
 curvilíneas, geometría diferencial de las, 54  
 despreciables, 293  
 esféricas, 43  
 generalizadas, 46, 285, 535  
 aceleración en, 50  
 para movimiento de cuerpos rígidos, 314  
 vectores base para, 46  
 velocidad en, 50  
 normales, 304, 430, 436-439  
 ortogonales, representación matricial de transformaciones de, 82  
 transformación de, 87  
 parabólicas, 49, 165  
 sistema de, que se mueve con el centro de masa, 264  
 transformación de, 78, 398  
 Coriolis, aceleración de, 43, 73  
 Corte, frecuencia de, 312, 498  
 Cosenos directores, 79  
 Coulomb, movimiento de una partícula cargada dentro de un campo de, 542  
 Covariantes, componentes, 50-51  
 Cristal, ejes del, 17  
 red recíproca, 17  
 vectores primitivos de traslación del, 17  
 Cristalina, red, 17  
 Cuántica, mecánica, 134, 207, 238, 391, 406  
 Cuerda vibrante, ecuación de onda para una, 466  
 función de Green para una, 490  
 movimiento general de una, 485  
 nodos, 485  
 perturbada, 493  
 resonancia de una, 490  
 vibración forzada, 490  
 Cuerpo, cono del, 357-358  
 Cuerpo(s) rígido(s), cantidad de movimiento angular de un, 320-321  
 choque de dos, 352

## E

- ecuaciones de movimiento para aplicarse a, 332  
 energía cinética rotacional de un, 329  
 equilibrio de un, 346  
 momentos de inercia de un, 320, 325  
 movimiento de un, 314 ss.  
 movimiento plano de un, 338, 345  
 movimiento sin momento rotacional, 355  
 productos de inercia de un, 320-321, 325  
 velocidad angular de un, 319  
 Curvas y superficies coordenadas, 54
- CH
- Choque, de cuerpos rígidos, 351  
 parámetro de, 253  
 Christoffel, símbolo de, 63
- D
- De Broglie, longitud de onda de, 224, 526  
 Degeneración, 413  
 Degeneradas, raíces, 447  
 "del", operador, 56  
 Delta, función (véase *Dirac, función delta de*)  
 Delta de Kronecker, 11  
 Denominador de resonancia, 491  
 Derivada, de un producto de vectores, 23  
 de un vector, 21  
 Desplazamiento virtual, 351  
 Desplazamientos pequeños, ecuaciones de movimiento para, 433  
 Determinante, jacobiano, 47, 290  
 de una matriz 382  
 Diagonal, matriz (véase *Matrix diagonal*)  
 Diagonalización, de operadores normales, 411 ss.  
 simultánea de operadores de conmutación, 420  
 Dilatación del tiempo, 513  
 Dinámica de las partículas, 94 ss.  
 Dirac, función delta de, 137-138, 455, 492, 496  
 Dispersión, 276  
 ángulo de, 253  
 sección diferencial de la, 254, 256  
 Distributiva, ley, 7, 378  
 Divergencia de un vector, 64  
 Doppler, efecto, 70, 527  
 Dos partículas, problema de, 261-262  
 Drude, P., 134
- Ecuación(es), del movimiento (véanse *Cantidad de movimiento generalizada; Ecuaciones de movimiento de Hamilton*)  
 covariantes de movimiento, 546  
 diferenciales, parciales lineales, 465  
 integral, 457  
 de Lagrange, 211, 297  
 de onda para una cuerda, 465  
 vibrante, 466  
 radial de movimiento, 241  
 secular, 412  
 Ecuaciones de movimiento, para desplazamientos pequeños, 433  
 de Euler, de un cuerpo rígido, 332  
 generalizadas, 162, 292  
 de Hamilton, 216-217  
 de Lagrange, 162, 189, 292  
 relativistas, 521, 539, 540  
 de un cuerpo rígido, 339  
 de un sistema de partículas, 279  
 Ecuaciones diferenciales, de estado estacionario, solución, 127  
 homogéneas, 119  
 lineales con coeficientes constantes, 119, 445  
 lineales simultáneas, 228, 434  
 con coeficientes constantes, 197, 200  
 no homogéneas, solución, 127  
 parciales, 489  
 solución homogénea, 490  
 solución, general, 119  
 particular, 127  
 transitoria, 127  
 Efectiva, masa, 230  
 Efecto Doppler, 70  
 Eigenvalores, 411 (véase *Valores propios*)  
 Eigenvectores, 412 (v. *Vectores propios*)  
 Einstein, A., 503  
 Eje instantáneo de rotación, 338  
 Ejes, paralelos, teorema de los, 329  
 principales de un cuerpo rígido, 324  
 Elástica, colisión (véase *Colisión elástica*)  
 Elipse, 235, 250  
 excentricidad de la, 250  
 semieje mayor, 235  
 semieje menor, 235  
 Elipsoide, de inercia, 415  
 de Poinsot, 355-356  
 Energía, cinética, 104, 264, 282, 329  
 del centro de masa, 265  
 en las ecuaciones de movimiento generalizadas, 162  
 relativista, 523  
 de una onda armónica, 470

- de un cuerpo rígido, 329  
de un sistema de partículas, 282, 433  
total, 265  
conservación de la, 104, 184, 213, 264, 280, 478  
deducción de la ecuación de Lagrange, 294  
de una partícula, 184, 213-215  
de un cuerpo rígido, 343, 355  
para un sistema de partículas, 264  
potencial, 104, 184  
dependiente de la velocidad, 211  
efectiva, 236-237  
de ondas armónicas, 470  
principio del trabajo y la, 104  
y trabajo, 103  
de umbral, 545-548  
en una onda armónica, 470
- Equilibrio,  
estable, 110, 430  
estático, de cuerpos rígidos, 346  
inestable, 111  
punto de, 110  
de un cuerpo rígido, 346  
de un sistema de partículas, 348
- Espacio universal, 510
- Escalar, 1  
potencial (véase *Potencial eléctrico*)  
producto, 7, 348
- Esféricas, coordenadas, 43
- Espacial, cono, 356, 358
- Espacio vectorial, 392  
definición, 391  
lineal, 388  
suma directa, 286
- Espectrómetro de masas, 196
- Estabilidad,  
de las órbitas circulares, 241-244  
de una configuración de equilibrio, 430
- Estable, equilibrio, 110
- Estacionarias, ondas armónicas, 485
- Estado estacionario, 127
- Estructura periódica, 17, 482
- Euler,  
ángulos de, 317  
ecuación de movimiento para un cuerpo rígido, 332
- Evento, 505
- F
- Faraday, efecto de, 32, 202
- Fase de una onda armónica, 527
- Fotón, 224, 526  
cantidad de movimiento tetradimensional asociada con un, 526
- Foucault, péndulo de, 259
- Fourier,  
integral de, 455, 496  
serie de, 127, 487, 490
- Frecuencia,  
angular, 469  
característica, 486  
del ciclotrón, 229  
de corte, 498  
de onda, 469  
resonancia, 131, 450
- Frecuencia de corte, 306  
para ondas en una guía de onda, 498  
para sistema de osciladores acoplados, 306, 312
- Frecuencia normal de vibración, 438
- Frontera, condiciones en la, 478
- Fuerza(s), 96  
amortiguadora(s), 116, 118, 491  
en un oscilador, 123  
central(es), 231  
inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, 236  
conservativas, 182  
condiciones necesarias y suficientes para la, 187-188  
definición, 96  
eléctricas y magnéticas, 190  
electromagnéticas, 527-528  
excitadora sinusoidal, 129, 449  
en función únicamente del tiempo, 100  
generalizadas, 157-158, 291, 297, 449, 536, 539  
gravitacional, 236  
impulsora, 135, 453, 495  
internas, 260, 279  
inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia, 246  
magnética, 192  
periódica, 127  
restauradora, 119  
restrictivas, 167, 297  
de rozamiento, 341  
tetradimensional, 521, 523
- Función,  
delta, de Dirac, 492  
de Green, 490  
lagrangiana, 212  
relativista, 538
- Funciones ortogonales, 486
- G
- Generalizada(s),  
coordenadas, 46, 535  
fuerza, 449, 536, 539  
velocidad, 51
- Geometría diferencial de las coordenadas curvilíneas, 54
- Golpe impulsor, 487
- Gradiente, 49, 56  
en coordenadas curvilíneas ortogonales, 58
- Grados de libertad, 285
- Gravitación, ley de Newton de la, 236

- Green, función de, 139-142, 490  
condiciones en la frontera en la, 492  
desarrollo en modos normales, 493  
simetría de la, 493  
solución de forma cerrada, 493  
tensorial de, 453  
para una cuerda vibrante, 490
- Grupo de matrices, 429

## H

- Hall,  
campo eléctrico de, 199  
efecto, 199
- Hamilton,  
ecuaciones de movimiento de, 216 ss.  
función característica de, 223
- Hamiltoniana, función, 213-215
- Hamilton-Jacobi, ecuación diferencial parcial de, 223
- Hipérbola, 250
- Holonómicas, restricciones, 167

## I

- Igualdad,  
de matrices, 375  
de vectores, 2, 6
- Impulso, 100  
y cantidad de movimiento, teorema del, 101  
fuerzas de, 180  
unidad, 135
- Índice de refracción, 134, 220
- Índices de Miller, 19
- Inercia,  
elipsoide de momentos de, 415  
momentos de, 320-321, 325  
producto de, 320-321, 325
- Inerciales, sistemas de coordenadas, 95
- Inestable, equilibrio, 111 (véase *Equilibrio*)
- Integral, ecuación, 151, 457
- Intermodulación, 156
- Invariancia de las leyes fundamentales de la física, 95
- Invariante, 425-426
- Inversión de un sistema de coordenadas, 388
- Inverso del cuadrado de la distancia, 248, 249, 251
- Ionosfera, 102
- Isotrópico, oscilador harmónico, 199-202

## J

- Jacobiano, determinante, 47, 290
- Julio, unidad de trabajo, 103

## K

- Kepler,  
primera ley del movimiento planetario, 235  
segunda ley del movimiento planetario, 240  
tercera ley del movimiento planetario, 250-251
- Kronecker, delta de, 11

## L

- Lagrange, J. L., 157
- Lagrange, ecuaciones de, 189, 211, 285, 292 ss., 297, 299-300, 537  
aplicaciones de las, 299  
para fuerzas conservadoras, 189  
de movimiento, 162  
para movimiento restringido de un sistema, 297  
relativistas, 537
- Lagrangiana, función (o lagrangiano), 189, 212  
covariante, 541  
para un sistema vibrante, 433
- Larmor, teorema de, 203, 296
- Ley(es),  
de los cosenos, 6  
distributiva, 7  
de la gravitación universal, 236  
del movimiento, de Newton, 94  
del movimiento planetario (véase *Kepler, leyes del movimiento planetario*)
- Línea universal, 512
- Lineal,  
cantidad de movimiento, 99  
operador, 394  
oscilador (véase *Oscilador armónico*)  
transformación, 82, 88
- Longitud de onda, 469
- Lorentz, A. H., 134  
fuerza (véase *Fuerza electromagnética*)  
transformación de, 424, 503  
matriz de, 507, 508
- Lorentz-Fitzgerald, contracción de, 513, 515
- Luz, velocidad de la, 503

## M

- Magnética,  
fuerza, 192  
resonancia, 209-211
- Magnético, potencial vectorial, 192
- Magnitud de un vector, 1
- Masa, 96, 97  
centro de, 261, 280  
efectiva, 230



- reducida, del sistema de dos partículas, 264  
relativista, 521, 523, 525  
en reposo, 523  
tensorial, 229  
unidad de, 97
- Matricial,  
álgebra, 375  
multiplicación, 84
- Matriz, matrices,  
adición de, 375  
anticommutativas, 378  
antihermitianas, 407  
antisimétrica, 379  
conmutativas, 377  
diagonal, 378  
escalar, 379  
hermitianas, 407  
igualdad de, 375  
inversa de una, 87  
multiplicación de, 376  
no singular, 382  
nula o cero, 378  
producto directo de, 382  
recíproca, 381  
simétrica, 379  
singular, 382  
de transformación, 83, 402  
transpuesta de una, 84, 374  
traza, 425  
unidad, 87
- Mecánica,  
clásica, 238  
cuántica, 134, 207, 222, 238, 257, 391, 394, 406, 484, 526  
ondulatoria, 222  
y óptica geométricas, 219
- Mesón  $\mu$ , 514
- Mesones en reposo, 514
- Michelson, A. A., 503
- Miller, índices de, 19
- Minkowski, espacio de, 510
- Modos normales,  
de la cuerda vibrante, 485  
de oscilación o vibración, 304, 438
- Momento, 159  
magnético orbital, 206  
rotacional, 283
- Momentos de inercia, 320-321, 325, 414  
elipsoide, 415  
operador de, 420  
principales, 414, 420  
de varios cuerpos, 320, 321, 325
- Morley, E. W., 503
- Movimiento,  
amortiguado, 441  
anarmónico, 147  
conservativo, 182 ss.  
ilimitado, 108  
dispersión, 253  
limitado, 108  
no amortiguado, 433
- período del, 110
- plano, de un cuerpo rígido, 338  
rodadura y deslizamiento, 345  
primera ley de Newton, 94  
relativista, de una partícula, 521  
respecto a una órbita circular estable, 243  
restringido, 58, 167 ss., 297  
segunda ley de Newton, 97  
sistema de coordenadas en, 65  
tercera ley de Newton, 98  
de una cuenta de collar sin rozamiento sobre un alambre parabólico, 176  
en una órbita circular en un campo eléctrico, 242  
de una partícula a lo largo de una curva determinada, 144  
en un campo de fuerzas centrales, 231  
en un campo eléctrico uniforme, 193  
en un campo eléctrico uniforme y magnético uniforme, 196  
en un campo magnético uniforme, 193  
unidimensional, de una partícula, 94 ss.  
a un lado y otro de un punto de equilibrio estable, 111
- Multiplicación,  
matricial, 84, 376  
de vectores, 7, 389
- Muón, 548
- N
- Newton,  
ecuaciones de movimiento de, 336  
leyes de, 94-99  
de la gravitación universal, 236  
para órbitas giratorias, 244  
teoría de, para órbitas giratorias, 543  
unidad de fuerza, 98
- Nodos, 485
- Normal, operador, 417
- Nuclear, reacción, 309
- Nula, matriz, 378
- Nulo, vector, 2
- Número de onda, 468
- Números complejos, representación de vectores planos por medio de, 28
- Nutación, 367
- O
- Onda(s),  
armónicas, 468  
complejas, 469  
descripción, 81  
energía, 470  
cinética, 470  
potencial, 470

- estacionarias, 485  
electromagnética, 498  
electrones, 484  
longitud de, 469  
mecánica (véase *Mecánica cuántica*)  
número de, 69, 468  
planas,  
ecuación de, 463  
representación matemática de, 464  
propagación a lo largo de una cuerda, 463  
reflexión de, 477  
transmisión de, 477-478  
transversal, a lo largo de una cuerda, 463
- Ondulatoria, mecánica, 222
- Operador(es),  
antihermitiano, 407  
conmutativos, 462  
"del", 56  
de espín de Pauli, 395  
hermitiano, 407  
inverso, 396, 452  
lineal, 394  
métrico, 386  
normal, 417  
de permutación, 416  
simétrico, 435  
de transformación, 440  
de traslación, 429  
unitario, 409
- Optica geométrica mecánica, 222
- Orbita(s),  
campo de fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia, 246  
en campos electromagnéticos, 531  
circulares, estabilidad de las, 241  
ecuación diferencial de la, 235  
giratorias, 246  
ley de Newton para, 244  
teoría de Newton para, 543  
movimiento ilimitado o no acotado, 237-239  
movimiento limitado o acotado, 237-239  
de los planetas, 250-251
- Ortogonales,  
coordenadas, transformación de, 87  
funciones, 486  
transformaciones, 399
- Oscilaciones forzadas, 449 (véanse *Oscilador armónico*; *Cuerda vibrante*)
- Oscilador anarmónico, 147-151  
forzado, 151-152
- Oscilador armónico, 111  
amortiguado, 118, 443  
factor  $Q$  del, 133  
anisotrópico, 228  
coordenadas normales, 304, 436-437  
forzado, 125, 450
- fuerza amortiguadora, 123  
función de Green, 135, 142  
isotrópico, 199-202, 225  
simple acoplado, 300  
sobreamortiguado, subamortiguado y crítico, 122
- Osciladores acoplados, 430 (véase *Oscilador armónico*)  
conjunto infinito de, 304  
modo normal de oscilación, 302
- P
- Par, 273-274  
protón-antiprotón, 548
- Parábola, 250
- Parabólicas, coordenadas, 49, 165
- Partícula(s),  
alfa, 257, 259  
cinemática de la, 36  
dinámica de las, 94 ss.  
de masa cero, 526
- Péndulo,  
doble, 299, 432  
esférico, 172  
físico, 336  
simple, 338
- Periódica, estructura, 17
- Período del movimiento, 110
- Permutación(es),  
operador de, 416  
teoría de las, 456
- Pión (mesón  $\pi$ ), 549
- Planck, constante de, 224, 526
- Plano,  
inclinado, movimiento de una partícula en un, 167, 169  
invariable, 355  
oscilador, 60
- Poinsot, L., 356
- Poinsot, elipsoide de, 355-356  
solución para un cuerpo de revolución, 356
- Polar, vector, 388
- Polarización, 471-477  
circular, 473-474  
elíptica, 475  
plana, 472
- Potencial,  
eléctrico escalar, 191  
energía, 184 (véase *Energía potencial*)  
magnético vectorial, 192
- Precesión de Thomas, 549
- Principio,  
de relatividad, 503, 521  
de superposición, 463, 468  
del trabajo virtual, 348  
del trabajo y la energía, 104
- Problema de los valores propios, 437
- Producto,  
escalar, 7, 287, 391, 406

- triple, 9  
 vectorial, 7, 15  
 Productos de inercia, 320-321, 325  
 Propagación,  
 de ondas a lo largo de una cuerda, 463  
 tetradimensional, vector de la, 527  
 Protón-antiprotón, par, 548  
 Protón-protón, colisión, 548  
 Proyección, 4  
 Punto,  
 de equilibrio, 110  
 que gira, 240  
 de retorno, 109
- Q
- Q de un sistema de vibración, 133
- R
- Radio,  
 de curvatura, 59, 60  
 de giro, 326  
 Rayos X, difracción de, 17  
 Reacción,  
 fuerzas de, 167  
 nuclear, 309, 545, 548-549  
 Red,  
 cristalina, 17  
 recíproca, 17  
 Reflexión,  
 cambio de fase ante la, 480  
 coeficiente de, 481, 498  
 simetría de, 458  
 Refracción, índice de, 134  
 Relativista, masa, 523  
 Relatividad,  
 principio extendido de, 503  
 teoría especial de la, 502  
 Reloj, calibración del, 505  
 Reposo,  
 masa en, 523  
 sistema en, 514  
 Resonancia, 125, 131  
 denominadores de, 452, 491  
 frecuencia de, 131  
 magnética, 209-211  
 de una cuerda vibrante, 490  
 Restitución, coeficiente de, 269  
 Restricciones,  
 holonómicas, 167, 341  
 no holonómicas, 298, 341  
 Restrictivas, fuerzas, 167, 341  
 Restringido, movimiento, 167 ss.  
 sobre una curva determinada, 58-59  
 Retorno, punto de, 109  
 Rotación,  
 impropia, 401  
 propia, 401, 510  
 sistema de coordenadas en, 70  
 Rotacional, 187-188  
 Rozamiento,  
 de deslizamiento, coeficiente de, 341  
 estático, coeficiente de, 341  
 fuerza de, 341  
 Rutherford, E., 257  
 sección diferencial de la dispersión  
 clásica de, 257
- S
- Satélite de la Tierra, 258  
 Schmidt, procedimiento de ortogonaliza-  
 ción de, 419  
 Sección cónica, 250  
 Sección diferencial de la dispersión, 254,  
 256  
 clásica, de Rutherford, 257  
 Secular, ecuación, 412  
 Segunda ley de Newton, 97  
 Separación de variables, 489, 497  
 Serie de Fourier, 127  
 Seudoescalar, 388  
 Seudovector, 388 (véase *Vector axial*)  
 Simetría, 303-304, 482-483  
 de reflexión, 458  
 Simétrico, operador, 435  
 Sistema de partículas, movimiento amor-  
 tiguado de un, 441  
 Sistema vibrante,  
 ecuación lagrangiana, 433  
 ecuaciones de movimiento, 433  
 movimiento no amortiguado, 441  
 oscilaciones forzadas, 449, 453  
 Sistemas de coordenadas,  
 ángulos de dispersión, 276  
 cartesianas, 4, 37  
 del centro de masa, 264  
 generalizadas, curvilíneas ortogonales,  
 48  
 inerciales, 95  
 movimiento, 65 ss.  
 de traslación y rotación, 77  
 no ortogonales, 10  
 partícula instantáneamente en reposo,  
 514  
 rotación, 70  
 traslación, 65  
 tridimensional, 4  
 Snell, ley de, 220  
 Stark, efecto, 165  
 Stokes, teorema de, 188  
 Subamortiguado (véase *Oscilador amor-  
 tiguado*)  
 Suma de,  
 vectores, 3, 6  
 velocidades, 67  
 Superposición, principio de, 463, 468

## T

- Taylor, desarrollo en serie de, 111, 431  
 Tensor métrico, 35, 386  
 de campo electromagnético, 529  
 componentes contravariantes del, 35  
 componentes covariantes del, 35  
 elementos covariantes del, 386  
 de momentos de inercia, 321  
 Tensorial,  
 conductividad, 230  
 masa, 229  
 Teorema virial, 251  
 Tercera ley de Newton, 98  
 Thomas, precesión de, 549  
 Tiempo,  
 derivada con respecto al, en un siste-  
 ma de coordenadas en rotación,  
 70  
 dilatación del, 513  
 propio, 512  
 de la partícula, 518  
 Tierra, precesión del eje de rotación, 359  
 Trabajo,  
 concepto del, 103  
 principio de la energía y el, 104  
 virtual, 348  
 principio del, 348  
 Transformación(es),  
 de coordenadas, 78, 398  
 dependientes del tiempo, 74, 536  
 ortogonales, 87  
 representación matricial, 82  
 lineales, 82, 88, 372 ss., 393-395  
 matriz de, 83  
 operador de, 440  
 unitaria, 409  
 de velocidades, 516  
 Transmisión,  
 bandas de, 484  
 coeficiente de, 481, 498  
 Transpuesta,  
 de una matriz, 84  
 del vector, 21  
 Transversal, onda, 463  
 Traslación, movimiento de, 65  
 Traza, 425  
 Triple producto,  
 escalar, 9  
 vectorial, 10  
 Trompo simétrico, movimiento bajo la  
 acción de la gravedad, 361, 371

## U

- Unidad,  
 de masa, 97  
 matriz, 87  
 de trabajo, el julio, 103  
 vector, 2

## V

- Valores propios, 412  
 degenerados, 413-414  
 problema de los, 437  
 Variables, separación de, 489  
 Vector(es),  
 adición, 391  
 axial, 388  
 base, 288  
 para coordenadas generalizadas, 46,  
 536, 539  
 generalizados, 54-55  
 inversos, 12  
 recíprocos, 48, 373-374  
 de un espacio  $n$ -dimensional, 392  
 en un espacio tetradimensional, 538  
 componentes de un, 5  
 derivada de un, con respecto a un  
 escalar, 21  
 $n$ -dimensional, 388  
 divergencia de un, 64  
 igualdad de, 2, 6  
 ley de adición del paralelogramo, 3  
 multiplicación por un escalar, 2  
 nulo, 2, 287  
 planos, representación por medio de  
 números complejos, 28  
 polar, 388  
 potencial, 192  
 producto, 7, 15  
 directo de, de dos matrices, 382  
 escalar, 7, 287  
 propios, 412  
 recíprocos, 291  
 representación,  
 algebraica, 4  
 geométrica, 2  
 matricial, 19, 372  
 resta de, 3  
 rotación de un, 23  
 suma de, 3  
 directa, 388  
 tetradimensional de posición, 518  
 transpuesta del, 21  
 triple producto, 10  
 unidad, 2  
 Velocidad(es), 37, 39  
 angular, 27, 71, 88, 332, 544  
 de un cuerpo rígido, relación con  
 la cantidad de movimiento an-  
 gular, 320  
 en función de los ángulos de Euler,  
 319  
 areolar, 240  
 componentes de la,  
 en coordenadas generalizadas, 50  
 contravariantes, 51  
 covariantes, 51  
 en coordenadas,  
 cilíndricas, 39

- esféricas, 43  
en cuatro dimensiones, 518  
generalizada, componentes de la, 51  
transformación de, 516  
Vibración forzada de una cuerda, 490  
resonancia, 490  
Vibrante, cuerda (véase *Cuerda vibrante*)
- Virial, teorema, 251  
energía potencial media, 252  
Virtual,  
desplazamiento, 351  
trabajo, 348  
Volumen infinitesimal ortogonal en un sistema de coordenadas curvilineas, 57

ESTA OBRA HA SIDO EDITADA POR UNIÓN TIPOGRÁFICA  
EDITORIAL HISPANO-AMERICANA, DE MÉXICO, D. F.,  
AVENIDA UNIVERSIDAD, 767. FUE IMPRESA EN  
UNIÓN GRÁFICA, S. A., DE MÉXICO, D. F.,  
AVENIDA DIVISIÓN DEL NORTE, 1521,  
Y SE TERMINÓ EL DÍA 16 DE  
MAYO DE 1969. LA EDICIÓN  
CONSTA DE 8,000 EJEM-  
PLARES.

Jesús Humberto Molina Melara

Jesús Humberto Molina Melara

PRECIO DE VENTA EN MÁXICO: \$